UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

2ª Prova de Introdução à Análise Funcional

Verão 2012

Professor: Carlos Bocker

Aluno:... Data: 06/02/2012

1. Seja X um espaço de Banach. Prove que X é reflexivo, se e somente se, X^* é reflexivo.

2. Seja $T \in L(X, Y)$ onde X e Y são espaços de Banach. Mostre que T é uma bijeção se, e somente se, sua adjunta de Banach, T^a, é uma bijeção. Conclua que, neste caso, $(T^{-1})^a = (T^a)^{-1}$.

3. Seja C um conjunto aberto convexo de um espaço vetorial normado X. Suponha ainda que $0 \in C$. Defina a aplicação $p : X \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = \inf\{t > 0 : t^{-1}x \in C\}$$

Mostre que:

(a) p é um funcional sublinear (isto é, $\forall \alpha > 0$, $\forall x, y \in X$, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ e $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$).

(b) Se $f : X \to \mathbb{F}$ é um funcional linear satisfazendo $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$ então $f \in X^*$.

(c) Se $x_0 \notin C$ então existe um funcional $f \in X^*$ tal que $f(x_0) > f(x)$ para todo $x \in C$. (Obs: Não use as versões geométricas do Teorema de Hahn-Banach.)

4. Sejam $1 < p, q < \infty$ tal que $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

(a) Mostre que a aplicação $\varphi_q : l^q \to (l^p)^*$ dada por $\varphi_q(\mathbf{x})(\mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{+\infty} x_j y_j$ onde $\mathbf{x} = (x_j)_{j=1}^{+\infty} \in l^q$ e $\mathbf{y} = (y_j)_{j=1}^{+\infty} \in l^p$ é uma isometria linear sobrejetora.

(b) Se $T = \varphi_q^{-1}$, mostre que a aplicação $\widehat{\ }: l^p \to (l^p)^{**}$ dada por $\widehat{\mathbf{y}}(f) = f(\mathbf{y})$ coincide com $T^a \circ \varphi_p$, onde T^a é a adjunta de Banach de T. Conclua que l^p é reflexivo.

5. (a) Seja X um espaço normado e seja $A^* \subset X^*$ tal que $[A^*]$ é denso em X^*. Mostre que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada tal que $f(x_n) \to f(x)$ para todo $f \in A^*$ então $x_n \rightharpoonup x$.

(b) Use o item anterior para provar que se $(\mathbf{x}^n = (x_1^n, x_2^n, \dots))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada em l^p e $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l^p$ (onde $1 < p < +\infty$) então $\mathbf{x}^n \rightharpoonup \mathbf{x}$ se, e somente se, $(x_j^n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para x_j, para todo $j \in \mathbb{N}$.