UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

2ª Prova de Introdução à Análise Funcional

Professor: Carlos Bocker
Aluno:

1. (2 pts) Seja X um espaço vetorial normado e $M \neq X$ um subespaço fechado de X. Mostre que existe $0 \neq f \in X^*$, tal que $f|_M = 0$.

2. (2 pts) Sejam X e Y espaços vetoriais normados e seja $T : X \to Y$ uma transformação linear. Mostre que se $f \circ T \in X^*$ para todo $f \in Y^*$ então T é contínua.

3. (2 pts) Mostre que se C é um conjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert H e $x_0 \in H$ então existe um único $y_0 \in C$ tal que $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\|$, isto é, y_0 é o único elemento de C que realiza a distância de x_0 a C.

4. (2 pts) Seja $M \neq \{0\}$ um subespaço fechado do espaço de Hilbert X e seja $P := P_M : X \to X$ o operador linear projeção ortogonal sobre M, isto é, se $x = m + m^\perp$ com $m \in M$ e $m^\perp \in M^\perp$ então $Px = m$. Mostre que:

   (a) $\|P\| = 1$ e que $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$ para todo $x, y \in X$ (isto é, $P = P^*$).

   (b) Se $M = [\{e_1, \ldots, e_k\}]$, tal que $\{e_1, \ldots, e_k\}$ é um conjunto ortonormal, então $Px = \sum_{j=1}^k \langle e_j, x\rangle e_j$.

5. (2 pts) Seja $\{e_1, e_2, \ldots\}$ um conjunto ortonormal de um espaço de Hilbert X.

   (a) Usando a questão anterior, mostre que para qualquer $x \in X$, $\|x\|^2 \geq \sum_{j=1}^k |\langle e_j, x\rangle|^2$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

   (b) Mostre que $(e_j)_j$ converge fracamente para zero, mas não converge fortemente. [Dica: Representação de Riesz + item (a)].

6. (2 pts) Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Mostre que:

   (a) Se $\emptyset \neq G \subset X$ é um conjunto aberto na topologia fraca então G é ilimitado (na norma de X).

   (b) Se F é um conjunto fechado e convexo então F é um fechado fraco.