UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

1ª Prova de Introdução à Análise Funcional

Verão 2012

Professor: Carlos Bocker

Aluno:... Data:...................

Questões escolhidas:...

Resolva apenas 5 das 6 questões abaixo.

1. (2 pts) Uma sequência $(x_n)_n$ num espaço normado X é *absolutamente somável* se $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| < \infty$. Mostre que X é um espaço de Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é somável (ou seja, $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ converge) em X.

2. Seja f um funcional linear sobre o espaço vetorial normado X sobre o corpo $\mathbb{F} = (\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$.

   (a) (1 pt) Mostre que $f \in X^*$ se, e somente se, seu núcleo $N(f)$ é fechado. Dê um exemplo para mostrar que isso nem sempre vale para operadores lineares.

   (b) (1 pt) Mostre que se f é descontínuo então para todo $\delta > 0$ e para todo $x \in X$ $f(B(x, \delta)) = \mathbb{F}$.

3. Seja X um espaço vetorial normado. Mostre que:

   (a) (0,5 pt) Todo subespaço próprio de X tem interior vazio.

   (b) (0,5 pt) Qualquer subespaço de X de dimensão finita é fechado.

   (c) (1 pt) Se X é um espaço de Banach de dimensão infinita então ele não pode ter base (de Hamel) enumerável

4. (2 pts) Enuncie e demonstre o Princípio da Limitação Uniforme.

5. (2 pts) Sejam X e Y espaços de Banach e seja $b : X \times Y \to \mathbb{F}$ uma aplicação bilinear. Mostre que se as aplicações lineares $x \mapsto b(x, y)$ (para cada y fixado) e $y \mapsto b(x, y)$ (para cada x fixado) são contínuas então b é contínua.

6. (2 pts) Enuncie e demonstre o Teorema do Gráfico Fechado.