UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

1ª Prova de Introdução à Análise Funcional

Professor: Carlos Bocker

Aluno:

1. Seja f um funcional linear sobre o espaço vetorial normado X.
   (a) (1 pt) Mostre que se existe $C > 0$ tal que $|f(x)| \leq C$ para todo x em alguma bola $B(x_0, \delta)$ então $f(L)$ é limitado para todo conjunto limitado $L \subset X$ e $f \in X^*$.
   (b) (1 pt) Mostre que $f \in X^*$ se, e somente se, seu núcleo $N(f)$ é fechado. Dê um exemplo para mostrar que isso nem sempre vale para operadores lineares.
2. (2 pts) Sejam X e Y espaços de Banach e seja $b : X \times Y \to \mathbb{F}$ uma aplicação bilinear. Mostre que b é contínua se, e somente se as aplicações lineares $x \mapsto b(x, y)$ (para cada y fixado) e $y \mapsto b(x, y)$ (para cada x fixado) são contínuas.
3. (2 pts) Se T é uma transformação linear contínua sobrejetora entre os espaços de Banach X e Y, mostre que existe $C > 0$ tal que para todo $y \in Y$ a equação $Tx = y$ possui uma solução $x_0 = x_0(y)$ tal que $\|x_0\| \leq C\|y\|$.
4. (2 pts) Enuncie e demonstre o Teorema do Gráfico Fechado.
5. (2 pts) Prove que se X é um espaço vetorial normado de dimensão infinita então a bola fechada $\overline{B(0,1)}$ não é compacta.
6. Seja X um espaço vetorial normado e seja $L(X)$ o espaço dos operadores lineares limitados de X em X.
   (a) (1 pt) Mostre que o conjunto dos operadores lineares invertíveis em $L(X)$ é um subconjunto aberto de $L(X)$.
   (b) (1 pt) Mostre, através de um exemplo, que o conjunto dos operadores lineares injetivos em $L(X)$ nem sempre é aberto.