UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Introdução à Análise Funcional

Lista 9: Teoria Espectral para Operadores Limitados

1. Sejam $S, T \in L(X)$ onde X é um espaço de Banach. Mostre que se S comuta com $R_\lambda := (T-\lambda)^{-1}$ para algum $\lambda \in \rho(T)$ então S comuta com T e com R_μ para qualquer $\mu \in \rho(T)$.

2. Sejam X um espaço de Banach, $T, S \in L(X)$ e $\lambda \in \rho(T) \cap \rho(S)$. Demonstre a segunda identidade do resolvente

$$R_\lambda(T) - R_\lambda(S) = R_\lambda(T)(S-T)R_\lambda(S) = R_\lambda(S)(S-T)R_\lambda(T).$$

3. Seja $T : C[0,1] \to C[0,1]$ o operador de Volterra definido por $(T\psi)(t) = \int_0^t \psi(s)\, ds$. Usando a série de Neumann, mostre que para $\lambda \neq 0$ tem-se

$$(R_\lambda(T)\psi)(t) = \frac{\psi(t)}{\lambda} + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^t e^{\frac{t-s}{\lambda}}\psi(s)\, ds$$

4. Se $T \in L(X)$ é invertível, com $T^{-1} \in L(X)$, mostre que $\sigma(T^{-1}) = \{\lambda^{-1} : \lambda \in \rho(T)\}$.

5. Se $T \in L(X)$, mostre que $\lim_{|\lambda|\to\infty} \lambda R_\lambda(T) = -\mathbf{1}$.

6. Sejam X, Y espaços de Banach, $V : X \to Y$ um isomorfismo (operador linear isométrico e sobrejetor), $T \in L(X)$ e $S = VTV^{-1}$. Mostre que $S \in L(Y)$ e $\sigma_j(T) = \sigma_j(S)$, para $j = p, r, c$.

7. (a) Se $T \in L(X)$ é idempotente, ou seja, $T^2 = T$, mostre que $\sigma(T) \subset \{0, 1\}$. Analise o que ocorre com o espectro se T é idempotente mas distinto da identidade e do operador nulo.

   (b) Mostre que se $T^n = 0$ para algum n, então $\sigma(T) = \{0\}$. Analise o espectro de $T : l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N})$, $1 \leq p \leq \infty$, $T(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots, x_n, 0, 0, \dots)$.

8. Verifique que se T é normal e $\sigma(T) = \{\lambda_0\}$ então $T = \lambda_0 \mathbf{1}$.

9. Mostre que se H é um espaço de Hilbert e $T \in L(H)$ então $\sigma(T^*) = \{\bar{\lambda} : \lambda \in \sigma(T)\}$.

10. Se para certo $T \in L(X)$ tem-se $\lim_{n\to\infty} \|T^n\| = 0$, mostre que o raio espectral $r_\sigma(T) < 1$ e conclua que $\sum_{n=0}^{\infty} T^n = (\mathbf{1} - T)^{-1} \in L(X)$.

11. Mostre que se $T \in L(H)$ é normal, então $\|T^n\| = \|T\|^n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

12. Se $0 \neq \phi \in C[a,b]$, mostre que $\lambda \in \mathbb{C}$ é um autovalor do operador de multiplicação $M_\phi : C[a,b] \to C[a,b]$, $(M_\phi\psi)(t) = \phi(t)\psi(t)$, $\psi \in C[a,b]$, se, e somente se, o conjunto $\phi^{-1}(\lambda)$ possui interior não-vazio.

13. Considere $T \in L(H)$ auto-adjunto.

    (a) Mostre que $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, existe uma sequência $(h_n)_n$ de vetores unitários em H tal que $T_\lambda h_n \to 0$.

    (b) Mostre que $\lambda \in \sigma(T)$ se, e somente se, $\inf_{\|h\|=1} \|T_\lambda h\| = 0$

    (c) As caracterizações em a) e b) acima não valem para todo operador (embora valha para operadores normais). Verifique isto ao considerar o shift à esquerda em $l^2(\mathbb{N})$, mostrar que zero pertence ao seu espectro, mas como esse operador é uma isometria a) e b) não valem para $\lambda = 0$.

14. Se P_E é o operador de projeção ortogonal sobre o subespaço fechado próprio $E \subset H$, determine $m = \inf_{\|h\|=1}\langle P_E h, h\rangle$ e $M = \sup_{\|h\|=1}\langle P_E h, h\rangle$.

15. Mostre que se $T \in L(H)$ é auto-adjunto e $T^n = 0$ para algum n, então $T = 0$. E se T for um operador normal?

16. Encontre o espectro do operador compacto $T_K : C[0,1] \to C[0,1]$, dado por $(T_K\psi)(t) = \int_0^1 K(t,s)\psi(s)\,ds$, com $K(t,s) = t - s$.

17. Seja $T \in L(H)$, com $\dim H = \infty$. Mostre que se existe $C > 0$ com $\|Tx\| \geq C\|x\|$ para todo $x \in H$, então T não é compacto.

18. Se $T \in L_0(H)$ é auto-adjunto, mostre que $m = \inf_{\|h\|=1}\langle Th, h\rangle$ e $M = sup_{\|h\|=1}\langle Th, h\rangle$ são o menor e o maior autovalor de T, respectivamente.

19. Fixe $\eta \in H$ com $\|\eta\| = 1$. Seja $T_\eta : H \to H$ definido por $T_\eta x = \langle \eta, x\langle \eta$. determine o espectro e o raio espectral de T_η.

20. Seja $T : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ dado por $(Tx)_n = (-i)(x_{n+1} - x_{n-1})$, sendo $x = (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, \dots)$. Mostre que T é limitado, que seu espectro é real e calcule seu raio espectral.