UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Introdução à Análise Funcional

Lista 8: Operadores Auto-Adjuntos, Bases Ortonormais, Operadores Compactos

1. Seja $T \in L(H)$ com H espaço de Hilbert complexo. Mostre que existem únicos operadores auto-adjuntos T_R e T_I de forma que $T = T_R + iT_I$ e $T^* = T_R - iT_I$. Verifique que o operador T é normal se, e somente se, T_R e T_I comutam entre si; e que é unitário se, e somente se, T_R e T_I comutam entre si e $T_R^2 + T_I^2 = \mathbf{1}$.

2. Seja H um espaço de Hilbert e seja $(T_n)_n$ um sequência de operadores auto-adjuntos em $L(H)$. Mostre que se $T_n \xrightarrow{w} T$ então T é auto-adjunto.

3. Sejam H um espaço de Hilbert complexo e $T \in L(H)$. Verifique que:

   (a) T é normal se, e somente se, $\|Tx\| = \|T^*x\|$, para todo $x \in H$

   (b) Se T é normal, então $\text{Nuc}T = \text{Nuc}T^* = (\text{Im}T)^\perp$; consequentemente, se $\alpha \in \mathbb{C}$ é autovalor do operador normal T, então $\bar{\alpha}$ é autovalor de T^*.

   (c) Se $\alpha \neq \beta$ são autovalores de um operador normal T, então os auto-espaços correspondentes são ortogonais entre si.

   (d) Se $T^2 = T$ e T é normal então T é auto-adjunto e, portanto é um operador de projeção ortogonal.

4. Sejam P_E e P_F operadores de projeção ortogonal sobre os subespaços fechados $E, F \in H$, respectivamente. Mostre que se $\text{Im}P_E \cap \text{Nuc}P_F \neq \{0\}$, então $\|P_E - P_F\| = 1$. Quando $(P_E - P_F)$ é um operador de projeção ortogonal?

5. Sejam E, F subespaços fechados de H e P_E, P_F os operadores de projeção ortogonal correspondentes. Demonstre que $E \perp F$ se, e somente se, $P_E P_F = P_F P_E = 0$.

6. Seja $T : l^2(\mathbb{Z}) \to l^2(\mathbb{Z})$ dado por $(Tx)_n = (x_{n+1} - x_{n-1})$, sendo $x = (\ldots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots)$. Mostre que T é limitado. Determine $\|T\|$ e T^*.

7. Mostre que toda sequência ortonormal num espaço de Hilbert converge fracamente para zero, mas não converge fortemente.

8. Em cada um dos casos abaixo, aplique o processo de ortonormalização Gram-Schmidt aos três primeiros termos apresentados.

   (a) $H = L^2[-1, 1]$, e $p_j(t) = t^j$, $j = 0, 1, \ldots$. Os polinômios ortonormais resultantes são chamados polinômios de Legendre.

(b) $H = L^2(\mathbb{R})$, e $\psi_j(t) = t^j e^{-\frac{t^2}{2}}$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Os polinômios resultantes são chamados polinômios de Hermite.

9. (a) Mostre que se $T : X \to Y$ é um operador linear compacto então sua imagem, $T(X)$ é separável.

   (b) Mostre que o operador linear $T : X \to Y$ é compacto se, e somente se, $\overline{TB(0,1)}$ é compacto.

10. Mostre que todo autovalor de um operador auto-adjunto é real.

11. Prove se $\psi \in L^2[0, 2\pi]$ então

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} e^{-int}\psi(t)\, dt = 0$$

12. Usando que $L^2[0, 2\pi]$ é denso em $L^1[0, 2\pi]$, mostre que o exercício anterior vale para ψ em $L^1[0, 2\pi]$. (Tal resultado é conhecido como Lema de Riemann-Lebesgue).

13. Seja $T \in L(H_1, H_2)$ onde H_1, H_2 são espaços de Hilbert. Mostre que T é de posto finito se, e somente se, seu adjunto de Hilbert T^* é de posto finito, neste caso tem-se dim ImT = dim ImT^*.

14. Seja H um espaço de Hilbert separável de dimensão infinita.

    (a) Se (x_n) é uma base ortonormal de H, Mostre que o operador linear $Tx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \langle x_n, x\rangle x_n$, com a_n tomando apenas os valores 0 ou 1, é limitado. Mostre que a distância, em $L(H)$, entre dois desses operadores (distintos, é claro) é sempre igual a 1. Conclua que $L(H)$ não é separável.

    (b) Mostre que existe uma sequência (P_n) de operadores de posto finito em $L(H)$, com $P_n \xrightarrow{s} \mathbf{1}$, e de forma que todo operador compacto $T \in L_0(H)$ tem-se $P_n T P_n \to T$. Conclua que $L_0(H)$ é um conjunto separável de $L(H)$.

15. Sejam X, Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear onde X é reflexivo tal que T leva sequências fracamente de Cauchy em sequências fortemente convergentes. Mostre que T é um operador compacto.