UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Introdução à Análise Funcional

Lista 7: Espaços de Hilbert, Projeção Ortogonal e Representação de Riesz

1. (a) Se para todo z num espaço com produto interno tem-se $\langle x, z\rangle = \langle y, z\rangle$, mostre que $x = y$.

   (b) Mostre que a condição $\|x\| = \|y\|$ num espaço com produto interno real implica que $\langle x + y, x - y\rangle = 0$, ou seja, $x + y$ e $x - y$ são ortogonais.

2. Sejam X um espaço vetorial normado e H um espaço de Hilbert. Mostre que se $T : X \to H$ é uma isometria linear sobrejetora então X é um espaço de Hilbert.

3. Sejam x_1, x_2, x_3 vetores num espaço com produto interno. Mostre que estes vetores formam um conjunto linearmente independente se, e somente se, o determinante da matriz $(\langle x_i, x_j\rangle)$ não é nulo.

4. Se E é um subespaço de um espaço com produto interno, mostre que $y \in E^\perp$ se, e somente se, $\|y - x\| \geq \|y\|$, $\forall x \in E$.

5. Seja (x_j) uma sequência ortogonal, ou seja, $x_j \perp x_k$, $\forall j \neq k$.

   (a) Verifique a relação de Pitágoras
$$\|\sum_{j=1}^{n} x_j\|^2 = \sum_{j=1}^{n} \|x_j\|^2, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

   (b) Se $x = \sum_{j=1}^{\infty} a_j x_j$ (soma convergente na norma), mostre que $\|x\|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} |a_j|^2 \|x_j\|^2$.

6. Sejam E um subespaço fechado do espaço de Hilbert H e $x \in H$. Assim de decomposição $H = E \oplus E^\perp$, tem-se $x = y + z$, $y \in E$ e $z \in E^\perp$. Mostre que y e z são os únicos elementos de E e $E^\perp$, respectivamente, cujas distâncias a x são minimais.

7. Em $L^2[0, \infty)$ considere $E = [\{e^{-t}, te^{-t}\}]$ e $\psi(t) = (1 + t^2)e^{-t}$. Encontre a decomposição $\psi = \psi_E + \psi_{E^\perp}$, com $\psi_E \in E$ e $\psi_{E^\perp} \in E^\perp$.

8. Seja $E = \{\psi \in L^2[-1, 1] : \int_{-1}^{1} \psi(t)\, dt = 0\}$. Determine $E^\perp$.

9. Mostre que se C é um conjunto convexo e fechado de um espaço de Hilbert H e $x_0 \in H$ então existe um único $y_0 \in C$ tal que $\|x_0 - y_0\| = \inf_{y \in C} \|x_0 - y\|$, isto é, y_0 é o único elemento de C que realiza a distância de x_0 a C.

10. Sejam E, F subconjuntos de H. Mostre que:

(a) Se $E \subset F$, então $F^\perp \subset E^\perp$ e $E^{\perp\perp\perp} = E^\perp$

(b) $E^{\perp\perp}$ é o menor subespaço vetorial fechado que contém o subconjunto E. Conclua que se E for subespaço vetorial, então $\overline{E} = E^{\perp\perp}$.

(c) E é subespaço fechado de H se, e somente se, $E = E^{\perp\perp}$.

11. Mostre que, no caso de espaço de Hilbert real, todo operador $S : H \to H$ que preserva distância entre vetores, ou seja, $\|S(x) - S(y)\| = \|x - y\|$, para todos $x, y \in H$, possui a forma $S(x) = S(0) + V(x)$, para alguma isometria linear $V \in L(H)$.

12. Se E é um subespaço fechado do espaço de Hilbert H e $T \in L(H)$, diz-se que E é invariante por T se $T(E) = E$. Mostre que E é invariante por T se, e somente se, $TP_E = P_E T P_E$, sendo P_E o projetor ortogonal sobre E.

13. Sejam H_1 e H_2 espaços de Hilbert. Mostre que se $T, S \in L(H_1, H_2)$ e $\alpha \in \mathbb{F}$, então:

    (a) $(T + S)^* = T^* + S^*$ e $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$

    (b) Se $T^{-1} \in L(H_1, H_2)$ então $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

    (c) Se $H_1 = H_2$ então $(ST)^* = T^* S^*$, e portanto $(T^n)^* = (T^*)^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

14. Se H é um espaço de Hilbert e $T \in L(H)$, mostre que $NucT = (ImgT^*)^\perp$, e também que $NucT^* = (ImgT)^\perp$.

15. Sejam S e T operadores auto-adjuntos em um espaço de Hilbert. Mostre que o produto ST é auto-adjunto se, e somente se, esses operadores comutam entre si.

16. Seja H um espaço de Hilbert. Verifique:

    (a) O conjunto dos operadores unitários em H forma um grupo em relação à operação de multiplicação de operadores.

    (b) Dados um subespaço $E \subset H$ e um operador unitário $U : H \to H$, então vale a relação $U(E^\perp) = (U(E))^\perp$.

    (c) Se $U : H \to H$ é unitário e $U^2 = \mathbf{1}$, então ele é auto adjunto. Além disso, todo operador $V \in L(H)$ que é unitário e auto-adjunto satisfaz $V^2 = \mathbf{1}$. (Obs: $\mathbf{1}$ é o operador identidade.)