UFPB/CCEN/Departamento de Matemática
Introdução à Análise Funcional
Lista 6: Continuação topologias fracas; Teorema de Alaoglu

1. Seja $\delta_n \in l^2(\mathbb{N})^* = l^2(\mathbb{N})$ definido por $\delta_n(x_1, x_2, \dots) = x_n$. Mostre que $\delta_n \xrightarrow{w^*} 0$, mas $(\delta_n)_n$ não converge em $l^2(\mathbb{N})$.

2. Seja X um espaço de Banach e seja $(f_n)_n$ sequência em X^* tal que para cada $x \in X$, $f_n(x)$ é convergente. Mostre que existe $f \in X^*$ tal que $f_n \xrightarrow{w^*} f$.

3. Seja X um espaço de Banach. Mostre que $K \subset X^*$ é compacto na topologia fraca* se, e somente se, é fechado na topologia fraca* e limitado na topologia forte (na norma de X^*).

4. Se X é um espaço reflexivo, então $K \subset X$ é compacto na topologia fraca se, e somente se, K é fechado na topologia fraca e limitado (na norma de X).

5. Seja X um espaço vetorial normado. Dizemos que uma sequência $(x_n)_n \subset X$ é *fracamente de Cauchy* se $(f(x_n)_n)$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{F}$ para todo $f \in X^*$. Se qualquer sequência fracamente de Cauchy é fracamente convergente diremos que X é *fracamente sequencialmente completo.* Mostre que todo espaço reflexivo é fracamente sequencialmente completo.

6. Se X é separável, mostre que toda sequência limitada $(f_n)_n$ em X^* possui uma subsequência fracamente* convergente.

7. Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Mostre que:

   (a) A esfera unitária $S = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ não é fechada na topologia fraca e que seu fecho fraco coincide com a bola unitária $\overline{B} = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$.

   (b) A bola aberta $B = \{x \in X : \|x\| < 1\}$ não é aberta na topologia fraca e seu interior fraco é vazio.

   (c) Se F é um conjunto fechado e convexo então F é um fechado fraco.

8. Verifique que no cubo de Hilbert

$$\mathcal{C} = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in l^p(\mathbb{N}) : |x_j| \leq \frac{1}{j}, \forall j\}, \quad 1 \leq p < \infty$$

a convergência fraca é equivalente a convergência forte.