

Lista 5: **Adjunto de Banach, convergência fraca e topologias fracas**

1. Se $f \in X^*$, determine seu adjunto de Banach, f^a .
2. Seja $T : X \rightarrow Y$ uma transformação linear limitada entre os espaços normados X e Y . Mostre que:
 - (a) $NucT = {}^\perp(ImgT^a)$
 - (b) $NucT^a = (ImgT)^\perp$
 - (c) $\overline{ImgT} \subset {}^\perp(NucT^a)$. Em particular, se T é sobrejetora então T^a é injetora.

Conclua de (a) que T é injetor se, e somente se $T^a(Y^*)$ separa pontos de X .
3. Seja $T \in L(X, Y)$ defina T^{aa} , identifique X e Y com \hat{X} e \hat{Y} , respectivamente, e mostre que $T^{aa}|_X = T$. Se X é reflexivo, então $T^{aa} = T$.
4. Mostre que se X é um espaço reflexivo e M é um subespaço fechado de X então $M = {}^\perp(M^\perp)$.
5. Sejam X um espaço de Banach e $T \in L(X, X)$. Mostre que, se $ImgT$ é fechada, então $\overline{ImgT^a} = (NucT)^\perp$.
6. Sejam X e Y espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$. Suponha que T^a é sobrejetor, por Aplicação Aberta, mostre que existe $r > 0$ de modo que $T^a B(0, 1) \supset B(0, r)$; conclua que $\|Tx\| \geq r\|x\|$, para todo $x \in X$. Com tais resultados, mostre que T é invertível se, e somente se, T^a é invertível.
7. Verifique que $c_0(\mathbb{N})^* = l^1(\mathbb{N})$ e conclua que c_0 não é reflexivo.
8. Sejam X e Y espaços de Banach.
 - (a) Mostre que se X e Y são isomorfos então X^* e Y^* são isomorfos.
 - (b) Se para algum $T \in L(X, Y)$, T^a é um isomorfismo entre Y^* e X^* (sobrejetor), mostre que X e Y são isomorfos.
9. Seja M um subespaço de um espaço normado X e $i : M \rightarrow X$ a inclusão canônica. Confira que i é um operador linear limitado, e mostre que seu adjunto de Banach $i^a : X^* \rightarrow M^*$ é o operador $i^a(f) = f|_M$, para todo $f \in X^*$.
10. Seja $T \in L(X, l^\infty(\mathbb{N}))$, onde X é um espaço de Banach. Mostre que existe uma sequência limitada $(f_j) \subset X^*$, de modo que $Tx = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ para todo $x \in X$.

11. Mostre que $L(X, Y)$ é um espaço de Banach se, e somente se, Y é um espaço de Banach.
12. Sejam X um espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Mostre que se $(T_n)_n$ é uma sequência em $L(X, Y)$ que converge fortemente para $T : X \rightarrow Y$, então $T \in L(X, Y)$ e $\|T\| = \liminf_n \|T_n\|$.
13. Seja X um espaço vetorial normado. Mostre que uma sequência $(x_n)_n$ converge fracamente para $x \in X$ se, e somente se, $f(x_n) \rightarrow f(x)$, para todo f num conjunto denso de X^* e $(\|x_n\|)_n$ é limitada.
14. Suponha que ψ_n converge fracamente para ψ em $C[a, b]$. Mostre que ψ_n converge pontualmente para ψ .
15. Sejam X espaço de Banach e Y um espaço vetorial normado. Uma sequência $(y_n)_n$ é dita fracamente limitada se $(f(y_n))_n$ é limitada para todo $f \in Y^*$. Mostre que toda sequência fracamente limitada em Y é limitada e que se $(T_n)_n$ converge fracamente em $L(X, Y)$, então $(\|T_n\|)_n$ é limitada.
16. Mostre que se $x_n \rightharpoonup x$ então $x \in \overline{[x_1, x_2, \dots]}$.
17. Seja X um espaço de Banach. Mostre que:
- Se $T_n \xrightarrow{s} T$ e $S_n \xrightarrow{w} S$ em $L(X)$ então $S_n T_n \xrightarrow{w} ST$.
 - Se $T_n \xrightarrow{s} T$ e $S_n \xrightarrow{s} S$ em $L(X)$ então $S_n T_n \xrightarrow{s} ST$.
 - Dê um exemplo para mostrar que as conclusões do item (b) não valem se convergência forte for substituída por convergência fraca.
18. Sejam X e Y espaços de Banach, mostre que uma transformação linear $T : X \rightarrow Y$ é (fortemente) contínua se, e somente se, T é fracamente contínua (isto é, $T : (X, \sigma(X, X^*)) \rightarrow (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é contínua).
19. Mostre que se X é um espaço vetorial e f, f_1, f_2, \dots, f_k são funcionais lineares tais que $\bigcap_{i=1}^k \text{Nuc} f_i \subset \text{Nuc} f$ então $f = \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_k f_k$ para algum $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$.
[Dica: Use a transformação linear $\Phi : X \rightarrow \mathbb{F}^k$, $\Phi(x) = (f(x), f_1(x), \dots, f_k(x))$]
20. Mostre que se Y é um subespaço de X^* então os únicos funcionais lineares $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ contínuos na topologia $\sigma(X, Y)$ são os funcionais pertencentes a Y .
[Dica: Mostre que dado f contínuo na topologia $\sigma(X, Y)$, existem $f_1, f_2, \dots, f_k \in Y$ tais que $\bigcap_{i=1}^k \text{Nuc} f_i \subset \text{Nuc} f$ e use o exercício anterior.]