UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Introdução à Análise Funcional

Lista 5: **Adjunto de Banach, convergêcia fraca e topologias fracas**

1. Se $f \in X^*$, determine seu adjunto de Banach, $f^a$.

2. Seja $T : X \to Y$ uma transformação linear limitada entre os espaços normados $X$ e $Y$. Mostre que:

   (a) $NucT = {}^{\perp}(ImgT^a)$

   (b) $NucT^a = (ImgT)^{\perp}$

   (c) $\overline{ImgT} \subset {}^{\perp}(NucT^a)$. Em particular, se $T$ é sobrejetora então $T^a$ é injetora.

   Conclua de (a) que $T$ é injetor se, e somente se $T^a(Y^*)$ separa pontos de $X$.

3. Seja $T \in L(X, Y)$ defina $T^{aa}$, identifique $X$ e $Y$ com $\hat{X}$ e $\hat{Y}$, respectivamente, e mostre que $T^{aa}|_X = T$. Se $X$ é reflexivo, então $T^{aa} = T$.

4. Mostre que se $X$ é um espaço reflexivo e $M$ é um subespaço fechado de $X$ então $M = {}^{\perp}(M^{\perp})$.

5. Sejam $X$ um espaço de Banach e $T \in L(X, X)$. Mostre que, se $ImgT$ é fechada, então $\overline{ImgT^a} = (NucT)^{\perp}$.

6. Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e $T \in L(X, Y)$. Suponha que $T^a$ é sobrejetor, por Aplicação Aberta, mostre que existe $r > 0$ de modo que $T^a B(0, 1) \supset B(0, r)$; conclua que $\|Tx\| \geq r\|x\|$, para todo $x \in X$. Com tais resultados, mostre que $T$ é invertível se, e somente se, $T^a$ é invertível.

7. Verifique que $c_0(\mathbb{N})^* = l^1(\mathbb{N})$ e conclua que $c_0$ não é reflexivo.

8. Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach.

   (a) Mostre que se $X$ e $Y$ são isomorfos então $X^*$ e $Y^*$ são isomorfos.

   (b) Se para algum $T \in L(X, Y)$, $T^a$ é um isomorfismo entre $Y^*$ e $X^*$ (sobrejetor), mostre que $X$ e $Y$ são isomorfos.

9. Seja $M$ um subespaço de um espaço normado $X$ e $i : M \to X$ a inclusão canônica. Confira que $i$ é um operador linear limitado, e mostre que seu adjunto de Banach $i^a : X^* \to M^*$ é o operador $i^a(f) = f|M$, para todo $f \in X^*$.

10. Seja $T \in L(X, l^{\infty}(\mathbb{N}))$, onde $X$ é um espaço de Banach. Mostre que existe uma sequência limitada $(f_j) \subset X^*$, de modo que $Tx = (f_1(x), f_2(x), \dots)$ para todo $x \in X$.

11. Mostre que $L(X, Y)$ é um espaço de Banach se, e somente se, $Y$ é um espaço de Banach.

12. Sejam $X$ um espaço de Banach e $Y$ um espaço vetorial normado. Mostre que se $(T_n)_n$ é uma sequência em $L(X, Y)$ que converge fortemente para $T : X \to Y$, então $T \in L(X, Y)$ e $\|T\| = \liminf_n \|T_n\|$.

13. Seja $X$ um espaço vetorial normado. Mostre que uma sequência $(x_n)_n$ converge fracamente para $x \in X$ se, e somente se, $f(x_n) \to f(x)$, para todo $f$ num conjunto denso de $X^*$ e $(\|x_n\|)_n$ é limitada.

14. Suponha que $\psi_n$ converge fracamente para $\psi$ em $C[a, b]$. Mostre que $\psi_n$ converge pontualmente para $\psi$.

15. Sejam $X$ espaço de Banach e $Y$ um espaço vetorial normado. Uma sequencia $(y_n)_n$ é dita fracamente limitada se $(f(y_n))_n$ é limitada para todo $f \in Y^*$. Mostre que toda sequência fracamente limitada em $Y$ é limitada e que se $(T_n)_n$ converge fracamente em $L(X, Y)$, então $(\|T_n\|)_n$ é limitada.

16. Mostre que se $x_n \rightharpoonup x$ então $x \in \overline{[x_1, x_2, \dots]}$.

17. Seja $X$ um espaço de Banach. Mostre que:

    (a) Se $T_n \xrightarrow{s} T$ e $S_n \xrightarrow{w} S$ em $L(X)$ então $S_nT_n \xrightarrow{w} ST$.

    (b) Se $T_n \xrightarrow{s} T$ e $S_n \xrightarrow{s} S$ em $L(X)$ então $S_nT_n \xrightarrow{s} ST$.

    (c) Dê um exemplo para mostrar que as conclusões do item (b) não valem se convergência forte for substituida por convergência fraca.

18. Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach, mostre que uma transformação linear $T : X \to Y$ é (fortemente) contínua se, e somente se, $T$ é fracamente contínua (isto é, $T : (X, \sigma(X, X^*)) \to (Y, \sigma(Y, Y^*))$ é contínua).

19. Mostre que se $X$ é um espaço vetorial e $f, f_1, f_2, \dots, f_k$ são funcionais lineares tais que $\cap_{i=1}^{k} Nucf_i \subset Nucf$ então $f = \alpha_1 f_1 + \cdots + \alpha_k f_k$ para algum $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{F}$.

    [Dica: Use a transformação linear $\Phi : X \to \mathbb{F}^k$, $\Phi(x) = (f(x), f_1(x), \dots, f_k(x))$]

20. Mostre que se $Y$ é um subespaço de $X^*$ então os únicos funcionais lineares $f : X \to \mathbb{F}$ contínuos na topologia $\sigma(X, Y)$ são os funcionais pertencentes a $Y$.

    [Dica: Mostre que dado $f$ contínuo na topologia $\sigma(X, Y)$, existem $f_1, f_2, \dots, f_k \in Y$ tais que $\cap_{i=1}^{k} Nucf_i \subset Nucf$ e use o exercício anterior.]

21. Mostre que todo subespaço fechado de um espaço reflexivo é reflexivo.

22. Seja $X$ um espaço de Banach. Mostre que $X$ é reflexivo se, e somente se, $X^*$ é reflexivo.

23. Seja $(Y_i)_{i\in I}$ uma família de espaços topológicos e seja $(\varphi_i : X \to Y_i)$ uma família de aplicações. Considere em $X$ a menor topologia que faz com que todas as aplicações $\varphi_i$ sejam contínuas. Mostre que se $Z$ é um espaço topológico então uma aplicação $\psi : Z \to X$ é contínua se, e somente se, $\psi \circ \varphi_i$ é contínua para todo $i \in I$.

24. Mostre que se $X$ é reflexivo, então a aplicação canônica $\hat{}: (X, \sigma(X, X^*)) \to (X^{**}, \sigma(X^{**}, X^*))$ dada por $\hat{x}(f) = f(x)$ para $f \in X^*$ tem inversa limitada. Conclua que se $X$ é reflexivo então a bola unitária fechada, $B_X\bar{(}0, 1)$ é compacta na topologia fraca.