UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Introdução à Análise Funcional

Lista 4: **Teoremas de Hahn-Banach e Aplicações**

1. Seja X um espaço vetorial e seja $A \subset X$ um conjunto linearmente independente. Mostre que X possui uma base (de Hamel) que contém A.

   Dica: Use o Lema de Zorn.

2. Mostre que todo espaço vetorial X admite uma norma.

3. Mostre que $p : l^\infty(\mathbb{N})(\text{real}) \to \mathbb{R}$ definido por

$$p(x) = \limsup_{n\to\infty} x_n$$

   sendo $x = (x_1, x_2, x_3, \dots)$, é um funcional sublinear. Note que este é um exemplo de um funcional sublinear p que não é sempre positivo.

4. Seja p como no Teorema de Hahn-Banach complexo. Mostre que

$$|p(x) - p(y)| \leq p(x - y), \quad \forall\, x, y \in X.$$

5. Mostre que se um funcional sublinear num espaço normado X é contínuo em $x = 0$, então ele é contínuo em todo ponto de X.

6. Se o espaço normado $N \neq \{0\}$ (ou seja, é não-trivial), mostre que seu dual $N^* \neq \{0\}$.

7. Verifique as seguintes propriedades do funcional sublinear $p : X \to \mathbb{R}$:

   (a) $p(0) \geq 0$

   (b) $\max\{p(x), p(-x)\} \geq 0$, $\forall\, x \in X$

   (c) $q(x) = \sup_{|\alpha|=1} p(\alpha x)$ é uma seminorma

   (d) Se $\{p_j\}$ é uma família de funcionais sublineares e $\{p_j(x)\}$ é limitado para cada $x \in X$, então $p(x) := \sup_j p_j(x)$ também é um funcional sublinear.

8. Se X é um espaço vetorial real e $p : X \to \mathbb{R}$ é um funcional sublinear, mostre que para cada $x_0 \in X$ existe um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ que satisfaz $f(x_0) = p(x_0)$ e $f(x) \leq p(x)$ para todo $x \in X$. Enuncie e demonstre uma versão deste resultado no caso em que X é complexo.

9. Verifique que toda seminorma num espaço vetorial é um funcional sublinear. Vale a recíproca?

10. Se $p : N \to \mathbb{R}$ é subaditivo ($p(x+y) \leq p(x) + p(y)$), mostre que se $p(x) \geq 0$ para todo $\|x\| \geq r > 0$, então $p(x) \geq 0$ para todo $x \in N$

11. Seja X um espaço normado complexo e $h : X \to \mathbb{R}$ um funcional linear real limitado. Mostre que $f : X \to \mathbb{C}$, dado por $f(x) = h(x) - ih(ix)$, pertence ao dual de X e $\|f\| = \|h\|$.

12. Sejam N_1, N_2 dois espaços normados não triviais. Use o Teorema de Hahn-Banach para mostrar que se qualquer operador linear limitado e não-nulo $T : N_1 \to N_2$ é sobrejetor, então $\dim N_2 = 1$.

13. Mostre que se $L(X, Y)$ é um espaço de Banach com $X \neq \{0\}$, então Y é um espaço de Banach.

14. Use a desigualdade de Minkowski para mostrar que $l^p(\mathbb{N})$ é estritamente convexo se, e somente se, $1 < p < \infty$.

15. Sejam M um subespaço do espaço vetorial normado X e $f \in M^*$ com $\|f\| = 1$. Mostre que se existem duas extensões distintas de Hahn-Banach de f preservando norma então existem infinitas de tais extensões.

16. Seja Z subespaço vetorial de N. Mostre que todo funcional linear limitado em Z é restrição de algum elemento de N^*. Conclua, então, que $Z^* = \{f|_Z : f \in N^*\}$.

17. Mostre que se $x \in N$ é tal que $f(x) = 0$, para todo f num conjunto denso e N^*, então $x = 0$.

18. Seja N um espaço vetorial normado. Mostre que $K \subset N$ é limitado se, e somente se, $f(K)$ é limitado para todo $f \in N^*$.

19. Seja B um espaço de Banach. Mostre que um subconjunto $K \subset B^*$ é limitado se, e somente se, para cada $\hat{x} \in \hat{B}$ tem-se $\sup_{f \in K} |\hat{x}(f)| < \infty$. Dê um exemplo para mostrar que o resultado é falso se B não é Banach.

20. Se $T \in L(N_1, N_2)$, demonstre que

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \sup_{\|f\|=1} |f(Tx)|,$$

onde $x \in N_1$ e $f \in N_2^*$.

21. Seja M um subespaço do espaço vetorial normado X. O anulador de M é definido por

$$M^\perp = \{f \in X^* : f(x) = 0, \forall\, x \in M\}.$$

De forma análoga, define-se o anulador de um subespaço Λ de X^* por

$$^{\perp}\Lambda = \{x \in X : f(x) = 0, \forall\, f \in \Lambda\}.$$

(a) Mostre que $M^{\perp}$ e $^{\perp}\Lambda$ são subespaços de X^* e X, respectivamente.

(b) Verifique que $^{\perp}\Lambda = X \cap \Lambda^{\perp}$ (identificando X com $\hat{X} \subset X^{**}$).

(c) Mostre que $M \subset {}^{\perp}(M^{\perp})$ e, se M for fechado, então $M = {}^{\perp}(M^{\perp})$.

(d) Mostre que $\Lambda \subset ({}^{\perp}\Lambda)^{\perp}$ e, se X for reflexivo e Λ fechado, então $({}^{\perp}\Lambda)^{\perp} = \Lambda$.

22. Seja M um subespaço de um espaço normado X. Mostre que

$$\overline{M} = \bigcap \{N(f) : f \in X^*, M \subset N(f)\}.$$

23. Mostre que se X é um espaço vetorial normado reflexivo então ele é um espaço de Banach.

24. Mostre que todo subespaço vetorial fechado de um espaço normado reflexivo é reflexivo.

25. Mostre que um espaço de Banach X é reflexivo se, e somente se, seu dual X^* é reflexivo.

26. Se X é reflexivo, mostre que para qualquer $f \in X^*$ existe $x_0 \in X$, com $\|x_0\| = 1$, de modo que $\|f\| = f(x_0)$ (ou seja, em espaços reflexivos todo funcional linear contínuo atinge o máximo na bola unitária).

27. Seja $f : c_0 \to \mathbb{R}$ dado por $f((x_j)_{j=1}^{\infty}) = \displaystyle\sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j}{j^2}$. Mostre que $f \in c_0^*$, $\|f\| = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2}$, mas não existe $x \in c_0$ com $\|x\| = 1$ e $f(x) = \|f\|$. Use o exercício anterior para concluir que c_0 não é reflexivo.