UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Introdução à Análise Funcional

Lista 3: **Teoremas de Baire, Banach-Steinhaus, Aplicação Aberta e Gráfico Fechado**

1. Mostre que um espaço topológico homeomorfo a um espaço de Baire é também um espaço de Baire.

2. Mostre que todo conjunto enumerável $E$ num espaço métrico $X$ é magro se, e somente se, $E$ não possui pontos isolados em $X$.

3. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é um conjunto $G_\delta$ em $\mathbb{R}$ e que, para cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos de continuidade de $f$ é um conjunto $G_\delta$. Conclua que não existe função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que o conjunto dos pontos de continuidade seja exatamente $\mathbb{Q}$. Dê exemplo de uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ contínua apenas em $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

4. Seja $\psi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Mostre que existem um intervalo não vazio $(a, b)$ e um natural $n_0$ tal que $\{t \in (a, b) : \psi(t) > \dfrac{1}{n_0}\}$ é denso em $(a, b)$.

5. Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach e seja $b : X \times Y \to \mathbb{F}$ uma aplicação bilinear. Mostre que $b$ é contínua se, e somente se as aplicações lineares $x \mapsto b(x, y)$ (para cada $y$ fixado) e $y \mapsto b(x, y)$ (para cada $x$ fixado) são contínuas.

6. Prove as seguintes generalizações do exercício anterior:

   (a) Se $X$, $Y$ e $Z$ são espaços vetoriais normados e $X$ é completo, então uma aplicação bilinear $b : X \times Y \to Z$ é contínua se, e somente se, as aplicações lineares $x \mapsto b(x, y)$ (para cada $y$ fixado) e $y \mapsto b(x, y)$ (para cada $x$ fixado) são contínuas.

   (b) Se $X_1, \ldots, X_k$ são espaços de Banach e $b : X_1 \times \ldots X_k \to \mathbb{F}$ é uma aplicação multilinear tal que para cada $i = 1, \ldots, k$ e $x_j \in X_j$ fixados com $j \neq i$, as aplicações $b_i : X_i \to \mathbb{F}$, $b_i(x_i) = b(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ são contínuas então $b$ é contínua.

7. Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados e seja $T : X \to Y$ uma transformação linear. Mostre que $T$ é contínua se, e somente se, $T^{-1}\bar{B}_Y(0, 1)$ tem interior não vazio.

8. Sejam $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ duas normas em um espaço vetorial $X$ que o tornam um espaço de Banach. Mostre que se existe $C > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ para todo $x \in X$ então as duas normas são equivalentes.

9. Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach. Mostre que se $T \in L(X, Y)$ é uma bijeção então existem $C_1$ e $C_2$ tais que
$$C_1\|x\| \leq \|Tx\| \leq C_2\|x\|$$

para todo $x \in X$.

10. Mostre que $T : l^1(\mathbb{N}) \hookleftarrow$, dado por $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ é linear, contínuo e invertível, mas sua inversa $T^{-1}$, definida na imagem de $T$ não é um operador contínuo. Justifique que isso não contradiz o teorema da aplicação aberta, mostrando que a imagem de $T$ não é fechada em $l^1(\mathbb{N})$.

11. Mostre que se $T$ é uma transformação linear sobrejetora entre os espaços de Banach $X$ e $Y$ tal que $T(B(0,1))$ está contido em algum compacto então dimensão de $Y$ é finita.

12. Se $T$ é uma transformação linear contínua sobrejetora entre os espaços de Banach $X$ e $Y$, mostre que existe $C > 0$ tal que para todo $y \in Y$ a equação $Tx = y$ possui uma solução $x_0 = x_0(y)$ tal que $\|x_0\| \leq C\|y\|$.

13. Sejam $X$ e $Y$ espaços de Banach. Mostre que o conjunto das transformações lineares contínuas sobrejetoras de $X$ em $Y$ é um subconjunto aberto de $L(X, Y)$. (Dica: Use o roteiro do exercício 8.14 do livro de César de Oliveira).

14. Seja $T : domT \subset X \to Y$ uma transformação linear e suponha que $X$ e $Y$ são espaços de Banach. Considere a norma do gráfico de $T$

$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\|, \quad x \in domT$$

Mostre que se $T$ é fechado, então $(domT, \|.\|_T)$ é um espaço de Banach.

15. Sejam $domT = \{\psi \in L^2[-1,1] : \psi(t) = 0 \text{ numa vizinhança de } 0\}$ e $domS = \{\psi \in L^2[-1,1] : \dfrac{\psi(t)}{t} \in L^2[-1,1]\}$, com

$$(T\psi)(t) = (S\psi)(t) = \frac{\psi(t)}{t}, \quad \forall\, t \in [-1,1],$$

para $\psi$ nos domínios apropriados. Mostre que $T$ não é fechado, mas que $S$ é um operador fechado.

16. Sejam $X$ e $Y$ espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear fechada. Demonstre que:

    (a) Se $T^{-1}$ existe, então ela também é fechada.

    (b) Se $S \in L(X, Y)$, então $T + S$ é fechado.

    (c) Se $X = Y$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ o núcleo $N(T - \lambda 1)$ é um subespaço vetorial fechado de $X$.

17. Mostre que o operador identidade

$$1 : (C[0,1], \|.\|_1) \to (C[0,1], \|.\|_\infty), \quad \psi \mapsto \psi$$

é fechado, contudo não é contínuo. Conclua que $(C[0,1], \|.\|_1)$ não é completo.

18. Use o Teorema do Gráfico Fechado para provar que se $T : l^p(\mathbb{N}) \hookleftarrow$; $1 \leq p \leq \infty$, é linear e comuta com o operador shift $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2)$, então $T$ é limitado.