UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Introdução à Análise Funcional

Lista 3: **Teoremas de Baire, Banach-Steinhaus, Aplicação Aberta e Gráfico Fechado**

1. Mostre que um espaço topológico homeomorfo a um espaço de Baire é também um espaço de Baire.

2. Mostre que todo conjunto enumerável E num espaço métrico X é magro se, e somente se, E não possui pontos isolados em X.

3. Mostre que $\mathbb{Q}$ não é um conjunto G_δ em $\mathbb{R}$ e que, para cada função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o conjunto dos pontos de continuidade de f é um conjunto G_δ. Conclua que não existe função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ tal que o conjunto dos pontos de continuidade seja exatamente $\mathbb{Q}$. Dê exemplo de uma função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ contínua apenas em $\mathbb{R}/\mathbb{Q}$.

4. Seja $\psi : \mathbb{R} \to (0, \infty)$. Mostre que existem um intervalo não vazio (a, b) e um natural n_0 tal que $\{t \in (a, b) : \psi(t) > \dfrac{1}{n_0}\}$ é denso em (a, b).

5. Sejam X e Y espaços de Banach e seja $b : X \times Y \to \mathbb{F}$ uma aplicação bilinear. Mostre que b é contínua se, e somente se as aplicações lineares $x \mapsto b(x, y)$ (para cada y fixado) e $y \mapsto b(x, y)$ (para cada x fixado) são contínuas.

6. Prove as seguintes generalizações do exercício anterior:

   (a) Se X, Y e Z são espaços vetoriais normados e X é completo, então uma aplicação bilinear $b : X \times Y \to Z$ é contínua se, e somente se, as aplicações lineares $x \mapsto b(x, y)$ (para cada y fixado) e $y \mapsto b(x, y)$ (para cada x fixado) são contínuas.

   (b) Se $X_1, \ldots, X_k$ são espaços de Banach e $b : X_1 \times \ldots X_k \to \mathbb{F}$ é uma aplicação multilinear tal que para cada $i = 1, \ldots, k$ e $x_j \in X_j$ fixados com $j \neq i$, as aplicações $b_i : X_i \to \mathbb{F}$, $b_i(x_i) = b(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ são contínuas então b é contínua.

7. Sejam X e Y espaços vetoriais normados e seja $T : X \to Y$ uma transformação linear. Mostre que T é contínua se, e somente se, $T^{-1}\bar{B}_Y(0, 1)$ tem interior não vazio.

8. Sejam $\|.\|_1$ e $\|.\|_2$ duas normas em um espaço vetorial X que o tornam um espaço de Banach. Mostre que se existe $C > 0$ tal que $\|x\|_1 \leq C\|x\|_2$ para todo $x \in X$ então as duas normas são equivalentes.

9. Sejam X e Y espaços de Banach. Mostre que se $T \in L(X, Y)$ é uma bijeção então existem C_1 e C_2 tais que
$$C_1\|x\| \leq \|Tx\| \leq C_2\|x\|$$

para todo $x \in X$.

10. Mostre que $T : l^1(\mathbb{N}) \hookleftarrow$, dado por $T(x_1, x_2, \dots) = (x_1, x_2/2, x_3/3, \dots)$ é linear, contínuo e invertível, mas sua inversa T^{-1}, definida na imagem de T não é um operador contínuo. Justifique que isso não contradiz o teorema da aplicação aberta, mostrando que a imagem de T não é fechada em $l^1(\mathbb{N})$.

11. Mostre que se T é uma transformação linear sobrejetora entre os espaços de Banach X e Y tal que $T(B(0,1))$ está contido em algum compacto então dimensão de Y é finita.

12. Se T é uma transformação linear contínua sobrejetora entre os espaços de Banach X e Y, mostre que existe $C > 0$ tal que para todo $y \in Y$ a equação $Tx = y$ possui uma solução $x_0 = x_0(y)$ tal que $\|x_0\| \leq C\|y\|$.

13. Sejam X e Y espaços de Banach. Mostre que o conjunto das transformações lineares contínuas sobrejetoras de X em Y é um subconjunto aberto de $L(X, Y)$. (Dica: Use o roteiro do exercício 8.14 do livro de César de Oliveira).

14. Seja $T : domT \subset X \to Y$ uma transformação linear e suponha que X e Y são espaços de Banach. Considere a norma do gráfico de T

$$\|x\|_T = \|x\| + \|Tx\|, \quad x \in domT$$

Mostre que se T é fechado, então $(domT, \|.\|_T)$ é um espaço de Banach.

15. Sejam $domT = \{\psi \in L^2[-1,1] : \psi(t) = 0 \text{ numa vizinhança de } 0\}$ e $domS = \{\psi \in L^2[-1,1] : \dfrac{\psi(t)}{t} \in L^2[-1,1]\}$, com

$$(T\psi)(t) = (S\psi)(t) = \frac{\psi(t)}{t}, \quad \forall\, t \in [-1,1],$$

para ψ nos domínios apropriados. Mostre que T não é fechado, mas que S é um operador fechado.

16. Sejam X e Y espaços vetoriais normados e $T : X \to Y$ uma transformação linear fechada. Demonstre que:

    (a) Se T^{-1} existe, então ela também é fechada.

    (b) Se $S \in L(X, Y)$, então $T + S$ é fechado.

    (c) Se $X = Y$, para todo $\lambda \in \mathbb{F}$ o núcleo $N(T - \lambda 1)$ é um subespaço vetorial fechado de X.

17. Mostre que o operador identidade

$$1 : (C[0,1], \|.\|_1) \to (C[0,1], \|.\|_\infty), \quad \psi \mapsto \psi$$

é fechado, contudo não é contínuo. Conclua que $(C[0,1], \|.\|_1)$ não é completo.

18. Use o Teorema do Gráfico Fechado para provar que se $T : l^p(\mathbb{N}) \hookleftarrow; 1 \leq p \leq \infty$, é linear e comuta com o operador shift $S(x_1, x_2, \dots) = (0, x_1, x_2)$, então T é limitado.