UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Introdução à Análise Funcional

Lista 2: **Operadores limitados, dualidade, transformações lineares**

1. Sejam X um espaço de Banach e $T \in L(X)$. Mostre que, para todo $t \in \mathbb{F}$, o operador $\exp(tT)$ definido por
$$\exp(tT) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(tT)^j}{j!}$$
pertence a $L(X)$ e $\|\exp(tT)\| \leq \exp(|t|\|T\|)$.

2. Mostre que se X_1 e X_2 são espaços normados e $T \in L(X_1, X_2)$ então seu núcleo $N(T)$ é um subespaço vetorial fechado. Verifique que $S : l^1(\mathbb{N}) \to l^1(\mathbb{N})$, $(Sx)_n = \dfrac{x_n}{n}$ é limitado mas sua imagem $img(S)$ não é fechado, e que seu operador inverso $S^{-1} : img(S) \to l^1(\mathbb{N})$ existe e não é limitado.

3. Seja f um funcional linear sobre o espaço vetorial normado X.
   (a) Mostre que $f \in X^*$ se, e somente se, existe $C > 0$ com $|f(x)| \leq C$ para todo x em alguma bola $B(y, \delta)$. Generalize para operadores lineares entre espaços normados.
   (b) Mostre que $f \in X^*$ se, e somente se, $N(f)$ é fechado. Dê um exemplo para mostrar que isso nem sempre vale para operadores lineares.
   (c^*) Mostre que se f é ilimitado então seu núcleo é denso.

4. Discuta se o núcleo do funcional $f : (l^1(\mathbb{N}), \|.\|_\infty) \to \mathbb{F}$, definido por $f(x_1, x_2, \dots) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j$, é fechado.

5. Seja X um espaço vetorial normado de dimensão infinita. Contrua um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ descontínuo.

6. Mostre que o operador $I\psi(t) = \int_a^t \psi(s)\, ds$ pertence a $L(C[a, b])$. Mostre também que ele não possui autovalores, isto é, não existem $\lambda \in \mathbb{F}$ e $\psi \neq 0$ contínua tais que $I\psi = \lambda\psi$.

7. Para cada $a \in \mathbb{R}$ considere o funcional em $C[-1, 1]$ dado por
$$f_a(\psi) = \int_{-1}^{1} \psi(t)\, dt + a\psi(0)$$
Mostre que f_a é um elemento do dual e que $\|f_a\| = 2 + |a|$.

8. Mostre que não existem operadores $S, T \in L(X)$ tais que $TS - ST = 1$.

   Dica: Supondo que existem tais operadores, mostre que $TS^n - S^nT = nS^{n-1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, e portanto $\|S^{n-1}\| \leq \dfrac{2\|T\|\|S\|\|S^{n-1}\|}{n}$, de forma que $S^N = 0$ para todo N

suficientemente grande. Com isso, chegue a uma contradição, mostrando que $0 = S^N = S^{N-1} = \cdots = S = S^0 = 1$.

9. Seja $\psi : X \to \mathbb{R}$ um funcional contínuo com a propriedade

$$\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y),$$

para todos $x, y \in X$. mostre que $\psi(\alpha x) = \alpha\psi(x)$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.