UFPB/CCEN/Departamento de Matemática

Introdução à Análise Funcional

Lista 1: **espaços normados, espaços separáveis, transformações lineares**

1. Sejam A e B subconjuntos não-vazios de um espaço vetorial normado X. Seja

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

Prove que:

(a) Se A é qualquer e B é um conjunto aberto então $A + B$ é aberto.

(b) Se A e B são compactos então $A + B$ é compacto.

(c) Se A é compacto e B é fechado então $A + B$ é fechado.

(d) A soma de fechados não necessariamente é fechada.

2. Sejam Ω um subconjunto compacto de um espaço de Hausdorff e $C(\Omega)$ o espaço das funções contínuas $\psi : \Omega \to \mathbb{F}$. Mostre que

$$\|\psi\|_\infty = \sup_{t\in\Omega} |\psi(t)|$$

define uma norma em $C(\Omega)$, e que o espaço normado $(C(\Omega), \|.\|_\infty)$ é completo com a métrica induzida. Esta norma é também chamada de norma da convergência uniforme.

3. Mostre que $\|\psi\|_1 = \int_0^1 |\psi(t)|\, dt$ é uma norma em $C([0, 1])$ e que $\|\psi\|_1 \leq \|\psi\|_\infty$ para toda função $\psi \in C([0, 1])$. Mostre também que $(C([0, 1]), \|.\|_1)$ não é completo. Existe $C > 0$ tal que $\|\psi\|_\infty \leq C\|\psi\|_1$ para toda $\psi \in C([0, 1])$?

4. Seja $\mathbb{F}^{\mathbb{N}}$ o espaço das sequências $(x_1, x_2, \dots)$ com $x_i \in \mathbb{F}$ para todo i. Para cada $1 \leq p < +\infty$, defina o espaço vetorial

$$l^p(\mathbb{N}) = \{(x_n)_n \in \mathbb{F}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p < +\infty\}$$

munido da norma $\|(x_n)_n\|_p = (\sum_{n=1}^{+\infty} |x_n|^p)^{\frac{1}{p}}$. Mostre que $(l^p(\mathbb{N}), \|.\|_p)$ é um espaço de Banach.

5. Analise a convergência das sequências $(\psi_n(t) = t^n - t^{2n})_n$, $(\phi_n(t) = t^n - t^{n+1})_n$ e $(\varphi_n(t) = t^n/n - t^{n+1}/(n + 1))_n$ em $L^p[0, 1]$, para $p = 1$ e ∞.

6. Denote por $C^1[a, b]$ o espaço das funções continuamente diferenciáveis $\psi : [a, b] \to \mathbb{R}$ com a norma

$$\|\psi\|_{C^1} := \sup_{t\in[a,b]} |\psi(t)| + \sup_{t\in[a,b]} |\psi'(t)|$$

Verifique que $\|.\|_{C^1}$ é uma norma e $C^1[a,b]$ é Banach; generalize para funções de classe C^r. Analise a convergência da sequência $(\varphi_n(t) = t^n/n - t^{n+1}/(n+1))_n$ em $C[0,1]$ e em $C^1[0,1]$.

7. Sejam $c = c(\mathbb{N})$ e $c_0 = c_0(\mathbb{N})$ os conjuntos das sequências $(\alpha_n)_n$ em $\mathbb{F}$ cujos limites $\lim \alpha_n$ existe e $\lim \alpha_n = 0$, respectivamente. Mostre que esses conjuntos são subespaços fechados de $l^\infty(\mathbb{N})$ e, portanto, são Banach com a norma $\|.\|_\infty$. Mostre que dado um elemento $x \in c$ existem um elemento $y \in c_0$ e $\alpha \in \mathbb{F}$ de modo que $x = y + z$, $z = (\alpha, \alpha, \alpha, \dots) \in c$.

8. Pode ocorrer de duas métricas gerarem a mesma topologia, mas apenas um desses espaços métricos ser completo (o que não ocorre no caso de duas métricas geradas por normas). Verifique isto para as métricas $d(s,t) = |t-s|$ e $D(s,t) = |f(s) - f(t)|$ em $\mathbb{R}$, sendo $f(t) = t/(1+|t|)$

9. Considere $1 < p < \infty$ e $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.
   (a) (*Desigualdade de Young*) Mostre $rs \leq r^p/p + s^q/q$,, para quaisquer $r, s > 0$.
   (b) (*Desigualdade de Hölder*) Use o item (a) para mostrar que
   $$|\int \varphi\psi \, d\mu| \leq \int |\varphi\psi| \, d\mu \leq \|\varphi\|_p \|\psi\|_q$$
   para $\varphi \in L^p_\mu$ e $\psi \in L^q_\mu$
   Lembre-se que: $\|u\|_p = (\int |u|^p \, d\mu)^{\frac{1}{p}}$
   (c) (*Desigualdade de Minkovski*) Use o item (b) para concluir que
   $$\|\varphi_1 + \varphi_2\|_p \leq \|\varphi_1\|_p + \|\varphi_2\|_p$$
   e que $\|.\|_p$ é uma norma.
   (d) Adapte para l^p.

10. Mostre que se X é um espaço vetorial normado de dimensão infinita, então qualquer conjunto $Y \subset X$ que contém um subconjunto aberto de X não pode ser compacto. Conclua que espaços vetoriais normados de dimensão infinita não podem ser localmente compactos.

11. Uma sequência $(x_n)_n$ num espaço normado X é *absolutamente somável* se $\sum_{n=1}^\infty \|x_n\| < \infty$. Mostre que X é um espaço de Banach se, e somente se, toda sequência absolutamente somável é somável (ou seja, $\sum_{n=1}^\infty x_n$ converge) em X.

12. Sejam N_1 e N_2 espaços normados, $\psi : N_1 \to N_2$ uniformemente contínua e $\widetilde{N}_1$ e $\widetilde{N}_2$ completamentos de N_1 e N_2, respectivamente. Mostre que a aplicação ψ possui uma única extensão $\widetilde{\psi} : \widetilde{N}_1 \to \widetilde{N}_2$ uniformemente contínua.

13. Construa uma sequência de funções $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ de forma que $\|\psi\|_\infty = 1$, a qual converge a zero em $L^p[0,1]$ para todo $1 \leq p < \infty$, e para todo $t \in [0,1]$ a sequência de escalares $(\psi_n(t))_n$ não é convergente.

14. Seja X espaço normado e $Y \subset X$ subespaço vetorial tal que $\text{int}Y \neq \emptyset$. Prove que $Y = X$.

15. Dê um exemplo de um espaço normado X e um funcional linear $f : X \to \mathbb{R}$ descontínuo.

16. Sejam X, Y dois espaços normados e $T : X \to Y$ sobrejetiva e limitada tal que existe $b > 0$ satisfazendo $\|Tx\| \geq b\|x\|$ para todo $x \in X$. Mostre que T é invertível e $T^{-1} \in \mathcal{L}(Y; X)$.

17. Seja E espaço de Banach. Dado $T \in \mathcal{L}(E)$, podemos definir a composição $T \circ T = T^2$, e indutivamente $T^{n+1} = T \circ T^n$. Mostre que $T^n \in L(E)$. Estime a norma de T^n. Se $\|T\| < 1$, mostre que $I - T$ é invertível, onde $I : E \to E$ é a identidade.

18. Se $S, T \in L(E)$ são tais que T é invertível e $\|T - S\| < \|T^{-1}\|^{-1}$ então S é invertível. Conclua que o conjunto dos operadores invertíveis de $L(E)$ é aberto em $L(E)$.

19. Seja $R : l^p(\mathbb{N}) \to l^p(\mathbb{N})$ tal que $R(x_1, x_2, x_3, \dots) = (0, x_1, x_2, \dots)$. Mostre que R é injetivo, mas não é sobrejetivo. R é chamado de shift à direita. Defina também o shift a esquerda, $L(x_1, x_2, \dots) = (x_2, x_3, \dots)$. Mostre que L é sobrejetivo mas não é injetivo.

20. Mostre que um espaço métrico é separável se, e somente se, ele tem uma base topológica contável. (Obs: Uma base topológica é uma coleção $(A_\alpha)_{\alpha \in \Lambda}$ de conjuntos abertos tais que qualquer outro aberto contém algum A_α.)

21. Mostre que os subespaços de $l^\infty(\mathbb{N})$, $c = \{(x_n)_n \in l^\infty(\mathbb{N}) : \lim_n x_n \text{ existe}\}$ e $c_0 = \{(x_n)_n \in l^\infty(\mathbb{N}) : \lim_n x_n = 0\}$, são separáveis.

22. Mostre que um subconjunto de um conjunto separável é separável e que o fecho de um conjunto separável é separável.

23. Sejam X_1 e X_2 espaços normados. Mostre que se uma aplicação $\psi : X_1 \to X_2$ é contínua em um ponto $x_0 \in X_1$ e satisfaz $\psi(x + y) = \psi(x) + \psi(y)\ \forall\, x, y \in X_1$ então ela é contínua em todo ponto.

24. Seja P_N o espaço dos polinômios $p : [-1,1] \to \mathbb{R}$ de grau menor ou igual a N, com a norma da convergência uniforme $\|.\|_\infty$. Seja $D : P_N \to P_N$ o operador derivada $D(p)(t) = p'(t)$. Mostre que D é limitado. Escolha uma base de P_N e encontre a matriz que representa D.

25. Sejam X e Y espaços métricos compactos, $u : Y \to X$ uma aplicação contínua, e considere o operador linear limitado $T_u : C(X) \to C(Y)$, $(T_u\psi)(y) = \psi \circ u(y)$. Mostre que:

    (a) T_u é uma isometria se, e somente se, u é sobrejetora.

    (b) T_u é sobrejetor se, e somente se, u é injetora.