UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Cálculo Diferencial e Integral I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: alexandre@mat.ufpb.br / Home page: http://www.mat.ufpb.br/∼alexandre/

Lista 7 - Aplicações da Derivada

1. Um ponto P move-se sobre a parábola $y^2 = x, x > 0$ e $y > 0$. A abscissa x está variando com uma aceleração que, em cada instante, é o dobro do quadrado da velocidade da ordenada y. Mostre que a ordenada está variando com aceleração nula.

2. Uma escada de 8m está encostada em uma parede. Se a extremidade inferior da escada for afastada do pé da parede a uma velocidade constante de $2m/s$, com que velocidade a extremidade superior estará descendo no instante em que a inferior estiver a 3m da parede?

3. Sejam x e y os catetos de um triângulo retângulo e θ o ângulo oposto a y. Supondo que $x = 12$ e que θ decresce com velocidade de 1/30 rad/s, calcule $y'(t)$, quando $t = \pi/3$ rad.

4. A altura e o raio da base de um cone circular reto estão variando a taxas constantes de $0,1$m/s e $0,3$m/s, respectivamente. A que taxa estará variando o volume do cone no instante em que $h = 0,5$m e $r = 0,2$m?

5. Suponha f derivável em $\mathbb{R}$. Prove que entre duas raízes consecutivas de f' há, no máximo, uma raiz de f.

6. Sejam f e g contínuas em $[a,b]$ e deriváveis em (a,b), com $g(x) \neq 0$ em $[a,b]$. Suponha, ainda, que $f(a) = g(a)$ e $f(b) = g(b)$. Prove que existe $c \in (a,b)$ tal que $f'(c)g(c) = f(c)g'(c)$.

7. Prove que se $\dfrac{a_0}{1} + \dfrac{a_1}{2} + \cdots + \dfrac{a_n}{n+1} = 0$, então $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0$ tem pelo menos uma raiz em $(0,1)$.

8. Suponha que f é contínua em $[a,b]$ e derivável até a 2ª ordem em (a,b). Sejam x_1, x_1 e x_2 pontos de $[a,b]$ com $x_0 < x_1 < x_2$, e tais que $f(x_1) = f(x_1) = f(x_2)$. Prove que existe pelo menos um c em (a,b). Prove que existe pelo menos um c em (a,b) tal que $f''(c) = 0$.

9. Sejam $a < b$ dois reais dados. Prove que

$$\frac{e^b - e^a}{b-a} < e^b.$$

10. Dizemos que x_0 é um ponto fixo de f se $f(x_0) = x_0$. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e suponha que $f'(x) \neq 1$ para todo x. Prove que f só pode ter no máximo um ponto fixo.

11. Suponha que $g(t)$ seja uma primitiva de $f(t)$ em $[0,1]$, isto é, para todo t em $[0,1]$, $g'(t) = f(t)$. Suponha, ainda, que $f(t) < 1$ em $(0,1)$. Prove que

$$g(t) - g(0) < t, \quad \text{em} \quad (0,1].$$

12. Determine os intervalos de crescimento e decrescimento das funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 1$, b) $f(x) = x + \dfrac{1}{x}$, c) $f(x) = \dfrac{t^2}{1+t^2}$, d) $f(x) = e^{-x^2}$,

e) $f(x) = e^{-x^2}$, f) $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$.

13. Prove que a equação $x^3 + x^2 - 5x + 1 = 0$ possui três raízes distintas. Encontre intervalos que contenham tais raízes.

14. Seja $n \geq 2$ um natural dado. Prove que $x^n - 1 \geq n(x-1)$, para todo $x \geq 1$. *Sugestão*: Estude o crescimento da função $f(x) = (x^n - 1) - n(x-1)$ no intervalo $[1, +\infty)$.

15. Sejam f, g duas funções deriváveis em (a, b), tais que $\forall x \in (a, b)$, $f'(x) < g'(x)$. Suponha que existe $c \in (a, b)$, com $f(c) = g(c)$. Prove que $f(x) < g(x)$ se $x > c$ e que $f(x) > g(x)$ se $x < c$.

16. Estude as funções abaixo com relação à concavidade e pontos de inflexão.

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$, b) $f(x) = xe^{-2x}$, c) $f(x) = x\ln(x)$, d) $f(x) = \dfrac{x^3}{1+x^2}$,

e) $f(x) = x^2 + \dfrac{1}{x}$, f) $f(x) = xe^{1/x}$.

17. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$. Que condições b e c devem satisfazer para que 1 seja ponto de inflexão de f?

18. Um ponto de inflexão p é dito ponto de inflexão horizontal se $f'(p) = 0$. Seja $f(x) = x^5 + bx^4 + cx^3 - 2x + 1$, existem b e c que tornem 1 ponto de inflexão horizontal?

19. Encontre os pontos de máximos locais, mínimos locais e de inflexão das funções abaixo:

a) $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$, b) $f(x) = x^2e^{-5x}$, c) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 2x + 1}$.

20. Determine as dimensões do retângulo de área máxima cujo perímetro é $2p$.

21. Determine o número real positivo cuja diferença entre ele e seu quadrado seja máxima.

22. Considere a curva $y = 1 - x^2$, com $0 \leq x \leq 1$. Encontre a reta tangente à curva tal que a área do triângulo que ela forma com os eixos coordenados seja mínima.

23. Determine a altura do cone circular reto, de volume máximo, e com geratriz a dada.

24. Encontre o ponto da curva $y = \dfrac{2}{x}, x > 0$, que está mais próximo da origem.

25. Determine o ponto da parábola $y = x^2$ que se encontra mais próximo da reta $y = x - 2$.

26. Mostre que entre todos os triângulos isósceles de mesmo perímetro, o que tem a maior área é o triângulo equilátero.