UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Cálculo Diferencial e Integral I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 2 - Continuidade

1. Escreva a definição de uma função f ser contínua em um ponto $p \in D(f)$.

2. Escreva a condição para que uma função f não seja contínua em um ponto $p \in D(f)$.

3. Prove, pela definição, que a função dada seja contínua no ponto dado:

a) $f(x) = 4x - 3$ em $p = 2$, b) $f(x) = -x + 1$ em $p = 0$, c) $f(x) = x^3$ em $p = 1$,

d) $f(x) = x^4$ em $p = -1$, e) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 4$, f) $f(x) = \sqrt{x}$ em $p = 0$.

4. Seja $n > 0$ um número natural. Prove que $f(x) = x^n$ é contínua. Dica: prove que se n é ímpar: $a^n < x^n < b^n$ se e somente se $a^{1/n} < x < b^{1/n}$; se n é par: $a^n < x^n < b^n$ se e somente se $|a|^{1/n} < x < |b|^{1/n}$ ou $-|b|^{1/n} < x < -|a|^{1/n}$. Comece estudando os casos $n = 2$ e $n = 3$.

5. $f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{se } x \leq 1, \\ 1, & \text{se } x > 1, \end{cases}$ é contínua em 1? Prove.

6. $f(x) = \begin{cases} 3x - 1, & \text{se } x \leq 0, \\ -1, & \text{se } x > 0, \end{cases}$ é contínua em 0? Prove.

7. Seja $f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q}, \\ -1, & \text{se } x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$. Mostre que f é descontínua em p, para todo p real.

8. Determine L para que a função dada seja contínua no ponto dado. Justifique.

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2}, & \text{se } x \neq 2, \\ L, & \text{se } x = 2, \end{cases}$ em $p = 2$.

b) $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x}{x}, & \text{se } x \neq 0, \\ L, & \text{se } x = 0, \end{cases}$ em $p = 0$.

9. Suponha que $|f(x) - f(1)| \leq (x - 1)^2$ para todo $x \in D(f)$. Prove que f é contínua em $p = 1$.

10. Prove que as funções abaixo são contínuas (em todos os pontos):

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com regra $f(x) = |2x + 1|$,

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com regra $f(x) = ax + b$.