UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CENTRO DE CIÊNCIAS EXATAS E DA NATUREZA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Lista de Exercícios - Cálculo Diferencial e Integral I

Professor: Alexandre de Bustamante Simas - Sala 233
E-mail: `alexandre@mat.ufpb.br` / Home page: `http://www.mat.ufpb.br/~alexandre/`

Lista 1 - Números Reais e Funções

1. Se $a \neq 0$ e $b \neq 0$, com $a, b, \in \mathbb{R}$, mostre que $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$, e conclua que $(a/b)^{-1} = b/a$.

2. Prove que $\forall x, y, z \in \mathbb{R}$, $|x - z| \leq |x - y| + |y - z|$.

3. Prove que $||x| - |y|| \leq |x - y|$, para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$.

4. Dados $x, y \in \mathbb{R}$, se $x^2 + y^2 = 0$, prove que $x = y = 0$.

5. Prove que para todo $x, y \in \mathbb{R}$, $|a - b| < \varepsilon \Rightarrow |a| < |b| + \varepsilon$.

6. Prove a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica: $\forall x, y \geq 0$:

$$\sqrt{xy} \leq \frac{x+y}{2}.$$

7. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$, com $0 < x < y$, mostre que

$$\sqrt{y - x} > \sqrt{y} - \sqrt{x}.$$

8. Resolva a inequação:

a) $2x + 1 < x + 6$, b) $1 - x > 3 - x$, c) $2x - 1 \leq 5x + 3$, d) $2 - x \leq 0$, e) $3x + 1 \geq 0$.

9. Estude o sinal de:

a) $3x + 1$, b) $2 - x$, c) $5 - 2x$, d) $\frac{2x+1}{x-4}$, e) $(x - 5)(3 - x)$, f) $(x^2 + 3)(x - 1)$.

10. Resolva a inequação:

a) $\frac{2x+1}{x-1} > 0$, b) $\frac{1-x}{3-x} \geq 0$, c) $\frac{x-2}{2-x} < 0$, d) $(2x - 1)(x + 3) < 0$,

e) $x(x - 1)(x - 2) \geq 0$, f) $\frac{x}{x-1} \geq 1$, g) $\frac{x-1}{2-x} < 1$, h) $(2x - 3)(x^2 + 1) < 0$,

i) $x^2 - 4 > 0$, j) $x^2 - 3x + 5 \geq 1$, l) $x^2 \geq 1$, m) $\frac{x^2+4}{x^2-4} > 2$

n) $-x^2 + 3x - 2 < 0$, o) $x^2 + x + 1 > 0$, p) $(1 - x)(x^2 + 2x + 2) < 0$, q) $\frac{x}{x^2+x+1} \geq 0$.

11. Prove que

$$\frac{5x+3}{x^2+1} \geq 2 \Leftrightarrow 5x + 3 \geq 2(x^2 + 1).$$

12. Prove que a afirmação: Para todo x real, $x \neq 2$,

$$\frac{x^2+x+1}{x-2} > 3 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 > 3(x - 2)$$

é falsa.

13. Compare os exercícios 11 e 12. Por quê as conclusões são diferentes?

14. Elimine o módulo:

a) $|-5|+|-2|$, b) $|-5-2|$, c) $|-a|, a>0$, d) $|a|, a<0$, e) $|-a|$, f) $|2a|-|3a|$.

15. Resolva as equações:

a) $|x|=4$, b) $|x+1|=3$, c) $|2x-1|=1$, d) $|x-2|=-1$

e) $|2x+3|=0$, f) $|x|=2x+1$.

16. Resolva as inequações:

a) $|x|\leq 1$, b) $|2x-1|<3$, c) $|3x-1|<-2$, d) $|2x^2-1|<1$, e) $|x+3|>1$

f) $|x+1|<|2x-1|$, g) $|x-1|-|x+2|>x$, h) $|x-3|<x+1$, i) $|x-2|+|x-1|>1$.

17. Expresse os conjuntos abaixo em notação de intervalo:

a) $\{x\in\mathbb{R}; 4x-3<2x+1\}$, b) $\{x\in\mathbb{R}; |2x+1|<2x\}$, c) $\{x\in\mathbb{R}; x^2-2x\leq 5\}$.

18. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, com regra:

a) $f(x)=-x^2+2x$, calcule $f(-1)$ e $f(1/2)$.

b) $f(x)=3x+1, ab\neq 0$, calcule:

$$\frac{f(a+b)-f(a-b)}{ab}.$$

19. Dê o domínio maximal e esboce os gráficos das funções com regras:

a) $f(x)=5$, b) $f(x)=2x-1$, c) $f(x)=-3x+1$, d) $f(x)=x^2+3x-10$,

e) $f(x)=|x+2|-|x-5|$, f) $f(x)=\begin{cases} x, & \text{se } x\geq 2, \\ 2, & \text{se } x<2, \end{cases}$, g) $f(x)=\begin{cases} 4x+4, & \text{se } x\geq 0, \\ -4x-4, & \text{se } x<0, \end{cases}$

h) $f(x)=|x|$, i) $f(x)=|x|+|x+1|+|x-2|$.

20. Determine o domínio maximal das funções com regras:

a) $f(x)=\frac{1}{x-2}$, b) $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$, c) $f(x)=\frac{2x}{\sqrt{x+2}}$, d) $f(x)=\frac{x}{x+2}$,

e) $f(x)=\sqrt{x+2}$, f) $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$, g) $\sqrt{\frac{2x-1}{1-3x}}$, h) $f(x)=\frac{\sqrt{x}}{2-x}$,

i) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$, j) $f(x)=\sqrt{x-\sqrt{x}}$, l) $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{5-2x}$.

21. Determine se os subconjuntos do $\mathbb{R}^2$ abaixo são ou não são gráficos de alguma função:

a) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 3x+4y=2x+1\}$,

b) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; 4x^2+4xy+y=5\}$,

c) $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2-2x=0\}$.

22. Dê os domínios maximais de $f, g, f+g$ e $\frac{f}{g}$. Além disso obtenha as regras de $f+g$ e $\frac{f}{g}$:

a) $f(x)=x$ e $g(x)=x^2-1$, b) $f(x)=x$ e $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, c) $f(x)=1$ e $g(x)=\sqrt{x-1}$,

d) $f(x)=1$ e $g(x)=\frac{1}{(x-2)^2}$.

23. Verifique que $Im(f)\subset D(g)$, determine o domínio maximal de $g\circ f$ e dê a regra de $h=g\circ f$:

a) $g(x)=3x+1$ e $f(x)=2+x^2$, b) $g(x)=\sqrt{x}$ e $f(x)=2+x^2$, c) $g(x)=x+1$ e $f(x)=x^2+3$,

d) $g(x)=\sqrt{x+1}$ e $f(x)=x^2-5x+10$, e) $g(x)=\sqrt{x-3}$ e $f(x)=|x-2|+|x-3|+5$.

24. Mostre que a função $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R} \setminus \{0\}$ com regra $f(x) = \frac{1}{x}$ é invertível, e encontre a inversa (domínio e regra).

25. Encontre o domínio maximal da função com regra $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Esta função é invertível? Em caso positivo, qual a sua inversa?

26. a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com regra $f(x) = |x|$ é invertível?

b) O que acontece se considerarmos o domínio como sendo $[0, \infty) \to \mathbb{R}$? Qual será a inversa de f (domínio e regra)?

27. Mostre que as funções são invertíveis e obtenha suas inversas:

a) $f : [0, \infty) \to Im(f), \quad f(x) = \sqrt{x},$ b) $f : [-1, \infty) \to Im(f), \quad f(x) = -\sqrt{x+1}$

c) $f : (-\infty, 0] \to Im(f), \quad f(x) = x^2,$ d) $f : [-1, \infty) \to Im(f), \quad f(x) = |x+1| - 2,$

e) $f : [-1, 2] \to Im(f), \quad f(x) = |x+1| - |x-2|.$

28. Seja $f : (-\infty, 0] \to [0, \infty)$ com regra $f(x) = x^2$ e seja g sua inversa. Seja agora $h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ com regra $h(x) = x^2$ e seja p sua inversa. Podermos afirmar que f e h são iguais? Podemos afirmar que g e p são iguais?

29. Mostre que se $f : D(f) \to \mathbb{R}$ e $g : D(g) \to \mathbb{R}$ são duas funções:

a) $f + g = g + f,$ b) $fg = gf.$

30. Sejam $f : D(f) \to \mathbb{R}$ e $g : D(g) \to \mathbb{R}$ duas funções:

a) Se f e g são pares, o que podemos dizer sobre $\frac{f}{g}$?

b) Se f é par e g é ímpar, o que podemos dizer sobre $\frac{f}{g}$?

c) Se f e g são ímpares, o que podemos dizer sobre $\frac{f}{g}$?

31. Seja $f : D(f) \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$. f é uma função par? Existe alguma função par g tal que se $x \in D(f)$, $f(x) = g(x)$? Se sim, construa um exemplo de tal função par.

32. Seja $f : D(f) \to \mathbb{R}$ uma função ímpar, se $0 \in D(f)$, calcule $f(0)$.

33. Seja $f : D(f) \subset [0, \infty) \to \mathbb{R}$, com $0 \in D(f)$. f é uma função ímpar? Existe alguma condição que temos que impor para que exista alguma função ímpar g tal que se $x \in D(f)$, $f(x) = g(x)$? Se sim, diga qual a condição e construa um exemplo de tal função ímpar. Dica: Use o exercício 32.