Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Séries de Potências sobre Domínios de Mori

por

José Stálio Rodrigues dos Santos

sob orientação do

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Março/2001
João Pessoa - Pb

Séries de Potências sobre domínios de Mori

por

José Stálio Rodrigues dos Santos

Dissertação apresentada ao Corpo Docente do Programa de Pós-Graduação em Matemática - CCEN - UFPB, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Área de Concentração: Álgebra

Aprovada por:

Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva

Prof. Dr. João Montenegro de Miranda

Prof. Dr. Fernando Antônio Xavier de Souza

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Curso de Mestrado em Matemática

Março/2001

Agradecimentos

1. Primeiramente, gostaria de agradecer ao Prof. Amorim por haver, decisivamente, me encorajado a seguir a carreira matemática. Também agradeço ao Prof. Dr. Antônio de Andrade e Silva pela eficiente orientação, bem como o Prof. Dr. João Montenegro de Miranda, pelo apóio durante a elaboração desta dissertação.

2. Agradeço a minha esposa, pelas horas difíceis em que esteve ao meu lado e por suportar diversos momentos de ausência.

3. À Universidade Estadual Vale do Acaraú (UVA), pela liberação.

4. Aos amigos da turma do mestrado: Delano, Mário, Ângelo, Caminha, Juan, Luiz e Luzeilton pelo esclarecimento de algumas dúvidas, a magnífica convivência e distintas considerações.

5. Finalmente, agradeço a Deus, que sempre me deu força para continuar.

Dedicatória

À minha esposa
Paula.

Notação

R - Anel

$A^{-1}R$ - Anel das frações de R

$R[x]$ - Anel dos polinômios na variável x

R_v - Anel de valorização v de K

$\mathcal{C}$ - Classe de domínio de Mori R tal que $R[[x]]$ também o é

$R[[x]]$ - Conjunto das séries de potências formais sobre R

$U(R)$ - Conjunto das unidades de R

$\mathcal{F}(R)$ - Conjunto dos ideais fracionários não nulos de R

$\mathrm{Max}(R)$ - Conjunto dos ideais maximais de R

$\mathrm{Spec}(R)$ - Conjunto dos ideais primos de R

$\mathbb{Z}$ - Conjunto dos números inteiros

$\mathbb{N}$ - Conjunto dos números naturais

$\mathbb{Q}$ - Conjunto dos números racionais

$\mathbb{R}$ - Conjunto dos números reais

$K((R))$ - Corpo das frações de R

K - Corpo quociente

$K(S)$ - Corpo residual

$I[[x]]$ - Ideal de $R[[x]]$

$I = (R : (R : I))$ - Ideal divisorial de R

M - Ideal maximal

M_M - Ideal maximal de R_M

$\widehat{M}$ - Ideal maximal de $R[[x]]_{M[[x]]}$

P - Ideal primo de R

$Rx = xR = \langle x \rangle$ - Ideal principal gerado por x, $x \in R$

R_P - Localizaçãode R em P

ker - Núcleo do homomorfismo

$(J : I)$ - Quociente de J por I

$J(R)$ - Radical de Jacobson

A - Sistema multiplicativo de R

Sumário

Introdução

Nesta dissertação, estudaremos os domínios de Mori, isto é, domínios em que toda seqüência crescente de ideais divisoriais integrais é estacionária (cf. [12]). É bem conhecido os seguintes resultados:

Se R é um anel Noetheriano (Krull), então

- $R[x]$ é um anel Noetheriano (Krull);
- $R[[x]]$ é um anel Noetheriano (Krull).

Assim, verificaremos se algumas propriedades existentes dos domínios de Mori valem em outros domínios. Por exemplo, se R é um domínio de Mori:

1. $R[x]$ é um domínio de Mori?
2. $R[[x]]$ é um domínio de Mori?

A resposta do item 1. é positiva se R é integralmente fechado. Por outro lado, se R é um domínio Noetheriano ou Krull, então $R[[x]]$ é um domínio de Mori. Em geral, a resposta para 2. é negativa. O estudo dos domínios de Mori é de grande importância, pois eles nos permitem estudar simultaneamente os domínios Noetheriano e de Krull.

Nosso objetivo principal é determinar exemplos de domínios de Mori R tal que $R[[x]]$ também o é. Não obstante, conjectura-se que existem domínios de Mori R tal que $R[[x]]$ não são domínios de Mori

No capítulo 1, começamos relembrando alguns resultados básicos sobre anéis e módulos que são necessários para os desenvolvimentos posteriores. Em seguida, definimos anéis Noetheriano, anéis de valorizações, domínios de Krull, série de potências formais, dependência inteira e estudamos algumas de suas propriedades mais elementares. E por último estudaremos alguns resultados sobre ideais e anéis com os mesmos ideais primos.

No capítulo 2, estudaremos os domínios de Mori. Os dois resultados principais sobre domínios de Mori são: Primeiro, dados $R \subseteq S$ domínios locais com $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$ e K seu corpo quociente. Então R é um domínio de Mori se, e somente se, S é de Mori. Segundo, neste caso é fundamental que os anéis tenham os mesmos ideais primos, a importância deste fato é dado pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} R = D \times S & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ S & \xrightarrow{\varphi} & k(S), \end{array}$$

onde S é um domínio local, $k(S) = \frac{S}{M}$ o corpo residual, $\varphi : S \to k(S)$ o homomorfismo canônico, $\phi : D \to k(S)$ um homomorfismo de anéis, R é o pull-back de D e S sobre $k(S)$, isto é,

$$R = \{(d,s) \in D \times S : \phi(d) = \varphi(s)\} = \varphi^{-1}(D)$$

e D é um subcorpo de $k(S)$. Então R é de Mori se, e somente se, S é um de Mori e D é um corpo. Se nas condições acima S é domínio de valorização, obtemos o Corolário 2.5, que generaliza a Proposição 2, de [10].

No capítulo 3, apresentaremos a classe $\mathcal{C}$ de domínio de Mori S tal que $S[[x]]$ também o é, e provaremos o seguinte resultado. Sejam R e S domínios locais com $R \subset S$ e $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal. Se $S \in \mathcal{C}$, então $R \in \mathcal{C}$. Finalmente, apresentaremos exemplos de domínios de Mori R tal que $R[[x]]$ também o é.

Capítulo 1

Resultados Básicos

Neste capítulo apresentaremos os pré-requisitos de Álgebra Comutativa que serão necessários para à compreensão dos capítulos subsequentes e também a familiarização com a notação aqui adotada. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [1, 8, 11].

1.1 Anéis

Nesta seção nosso objetivo é apresentar alguns resultados sobre anéis, que serão necessários para à compreensão deste trabalho.

Um *anel* é um conjunto não vazio R equipado com duas operações binárias adição $(x,y) \to x+y$ e multiplicação $(x,y) \to xy$ tal que as seguintes propriedades valem:

1. $x+(y+z) = (x+y)+z$, para todos $x,y,z \in R$;

2. Existe $0 \in R$ tal que $0+x = x+0 = x$, para todo $x \in R$, 0 é o elemento neutro da adição;

3. Para todo $x \in R$ existe $y \in R$ tal que $x+y = y+x = 0$, y é o elemento inverso da adição e vamos denotá-lo por $-x$;

4. $x+y = y+x$, para todos $x,y \in R$;

5. $x(yz) = (xy)z$, para todos $x,y,z \in R$;

6. $x(y+z) = xy+xz$, $(x+y)z = xz+yz$, para todos $x,y,z \in R$.

Se um anel R satisfaz as propriedades:

7. Existe $1 \in R$ tal que $x1 = 1x = x$, para todo $x \in R$, dizemos que R é um *anel com identidade;*

8. $xy = yx$, para quaisquer $x, y \in R$, dizemos que R é um *anel comutativo.*

   Se um anel R satisfaz a propriedade:

9. Para todos $x, y \in R$, $xy = 0 \Rightarrow x = 0$ ou $y = 0$, dizemos que R é um *anel sem divisores de zero.*

Dizemos que um elemento $x \in R$ é um *divisor de zero* se existir $y \in R$, $y \neq 0$ tal que $xy = 0$. Caso contrário x é *regular.*

Se R é um anel comutativo, com identidade e sem divisores de zero, dizemos que R é um *domínio.* Um elemento $x \in R$ é dito uma *unidade* de R se existir $y \in R$ tal que $xy = yx = 1$. Denotaremos por $U(R)$ o conjunto de todas as unidades de R. Se $U(R) = R^* = R - \{0\}$, dizemos que R é um *corpo.*

Nesta dissertação, todo anel R, salvo menção explicita em contrário, será anel comutativo com unidade.

Sejam R e S dois anéis. Um *homomorfismo de anéis* é uma função ϕ de R em S tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$, para todos $x, y \in R$;

2. $\phi(xy) = \phi(x)\phi(y)$, para todos $x, y \in R$;

3. $\phi(1) = 1$.

Um subconjunto não vazio S de um anel R é um *subanel* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. para todos $x, y \in S$, tem-se $x - y \in S$;

2. para todos $x, y \in S$, tem-se $xy \in S$;

3. $1 \in S$.

Um subconjunto não vazio I de um anel R é um *ideal* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. para todos $x, y \in I$, tem-se $x - y \in I$;

2. Para todo $x \in I$ e $r \in R$, tem-se $rx \in I$.

Um ideal I de R é dito *finitamente gerado* se existir um subconjunto finito $S = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ de R tal que

$$\begin{aligned} I &= \langle S \rangle = Rx_1 + Rx_2 + \cdots + Rx_n \\ &= \{\sum_{i=1}^{n} r_i x_i : r_i \in R\}. \end{aligned}$$

O ideal $I = Rx = xR = \langle x \rangle$ é chamado *ideal principal* gerado por $x \in R$. Um domínio R é um *domínio de ideais principais* se todo ideal de R é principal.

Sejam I e J dois ideais de R. Então

$$I + J = \{x + y : x \in I,\ y \in J\}$$

é um ideal de R e

$$IJ = \{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i : x_i \in I,\ y_i \in J\}$$

é um ideal de R.

Um ideal P de um anel R é um *ideal primo* de R se $P \neq R$ e para todo $x, y \in R$ e $xy \in P$, tem-se $x \in P$ ou $y \in P$.

Um ideal M de um anel R é *ideal maximal* de R se $M \neq R$ e J é um ideal de R tal que $M \subseteq J \subseteq R$, então $M = J$ ou $J = R$. Dizemos que R é um *anel local* se R tem um único ideal maximal. Neste caso, $U(R) = R - M$. Um ideal M de um anel R é um *ideal minimal* de R se $M \neq \{0\}$ e J é um ideal de R tal que $\{0\} \subseteq J \subseteq M$, então $J = \{0\}$ ou $J = M$.

Observação 1.1 *Todo ideal maximal é primo.*

Proposição 1.1 *Seja R um anel. Então M é um ideal maximal de R se, e somente se, para todo $x \notin M$ existe $r \in R$ tal que $1 + xr \in M$. Neste caso, $x \in U(R)$.*

Prova. Para cada $x \notin M$ temos que $M \subset M + \langle x \rangle$. Logo, por hipótese, $M + \langle x \rangle = R$. Como $1 \in R$ temos que $1 \in M + \langle x \rangle$, isto é, existe $r \in R$ tal que $1 + xr \in M$.

Reciprocamente, seja J é um ideal de R tal que $M \subseteq J \subseteq R$. Suponhamos que $M \neq J$. Então existe $x \in J$ tal que $x \notin M$. Assim, por hipótese, existe $r \in R$ tal que $1 + xr \in M$. Logo,

$$1 = -xr + (1 + rx) \in J$$

e $J = R$. Portanto, M é um ideal maximal de R. ■

Seja R um anel, dizemos que I é um *ideal próprio* de R se $I \neq R$.

1.2 Módulos

Nesta seção enuciaremos e provaremos alguns resultados clássicos de anéis de frações e anéis Noetherianos que serão necessários para à compreensão deste trabalho.

Seja R um anel. um *R-módulo* V sobre R é um grupo comutativo aditivo junto com uma aplicação

$$R \times V \to V, (x, v) \to xv,$$

tal que as seguintes propriedades valem:

1. $x(yv) = (xy)v$, para todos $x, y \in R$ e $v \in V$;
2. $x(u + v) = xu + xv$, para todo $x \in R$ e $u, v \in V$;
3. $(x + y)v = xv + yv$, para todos $x, y \in R$ e $v \in V$;
4. $1v = v$, para todo $v \in V$.

Note que, se R é um corpo, então um R-módulo é espaço vetorial sobre R.

Um subconjunto não vazio W de um R-módulo V é um *R-submódulo* de V se as seguintes condições são satisfeitas:

1. para todos $w, v \in W$, tem-se $w - v \in W$;
2. Para todo $x \in R$ e $w \in W$, tem-se $xw \in W$.

Seja V um R-módulo. Uma seqüência crescente

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n \subseteq \cdots$$

de R-submódulos de V é uma *cadeia crescente*. Uma seqüência crescente

$$W_1 \subset W_2 \subset \cdots \subset W_n \subset \cdots$$

de R-submódulos de V é uma *cadeia estritamente crescente*. De modo inteiramente análogo, define-se uma *cadeia decrescente* e *cadeia estritamente decrescente*. Dizemos que uma cadeia crescente

$$W_1 \subseteq W_2 \subseteq \cdots \subseteq W_n \subseteq \cdots$$

de R-submódulos de V é *estacionária* se existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$W_n = W_{n_0}, \forall n \geq n_0.$$

Um subconjunto A de um anel R é um *sistema multiplicativo* de R se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $1 \in A$;

2. $ab \in A$ para todos $a, b \in A$.

Consideremos em $R \times A$ a seguinte relação de equivalência:

$$(x, a) \sim (y, b) \Leftrightarrow (xa - yb)c = 0 \text{ para algum } c \in A.$$

A classe de equivalência de (x, a) será denotado por $\frac{x}{a}$ e

$$\frac{R \times A}{\sim} = A^{-1}R.$$

Assim, podemos definir em $A^{-1}R$ as seguintes operações binárias:

$$\begin{aligned} \frac{x}{a} + \frac{y}{b} &= \frac{bx + ay}{ab} \\ \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} &= \frac{xy}{ab}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que estas operações estão bem definidas e $A^{-1}R$ é um anel comutativo com unidade, chamado de *anel de frações* de R, onde $\frac{0}{1}$ e $\frac{1}{1}$ é o elemento zero e o elemento identidade de $A^{-1}R$, respectivamente. Neste caso, temos também um homomorfismo de anéis

$$\varphi : R \to A^{-1}R$$

definido por

$$\varphi(x) = \frac{x}{1}.$$

Assim,

$$\ker \varphi = \{x \in R : xb = 0 \text{ para algum } b \in A\}.$$

De fato,

$$\begin{aligned} x &\in \ker\varphi \\ &\Leftrightarrow \frac{x}{1} = \frac{0}{1} \\ &\Leftrightarrow (x1 - 01)b = 0 \text{ para algum } b \in A \\ &\Leftrightarrow xb = 0 \text{ para algum } b \in A. \end{aligned}$$

Note que, este homomorfismo não é, em geral, injetor, pois

$$\ker\varphi = \{0\} \Leftrightarrow xb = 0 \Rightarrow x = 0.$$

Observação 1.2 *Se R é um domínio e $A = R^*$, então $K = A^{-1}R$ é chamado o* corpo quociente *de R.*

Proposição 1.2 *Seja $\sigma : R \to S$ um homomorfismo de anéis tal que $\sigma(a) \in U(S)$, para todo $a \in A$ onde, A é um sistema multiplicativo de R. Então existe um único homomorfismo $\phi : A^{-1}R \to S$ tal que $\sigma = \phi \circ \varphi$.*

Prova. Seja $\phi : A^{-1}R \to S$ dada por

$$\phi(\frac{x}{a}) = \sigma(x)\sigma(a)^{-1}.$$

Então ϕ está bem definida. De fato, se

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b},$$

então existe $c \in A$ tal que $(xb - ya)c = 0$. Assim, temos que

$$[\sigma(x)\sigma(b) - \sigma(y)\sigma(a)]\sigma(c) = 0.$$

Como $\sigma(c) \in U(S)$ temos que

$$\sigma(x)\sigma(a)^{-1} = \sigma(y)\sigma(b)^{-1},$$

isto é,

$$\phi(\frac{x}{a}) = \phi(\frac{y}{b}).$$

Agora, é fácil verificar que ϕ é um homomorfismo de anéis e que $\sigma = \phi \circ \varphi$. Finalmente,

$$\phi(\frac{x}{1}) = \phi(\varphi(x)) = \sigma(x), \forall x \in R.$$

Logo, se $a \in A$, então

$$\phi(\frac{1}{a}) = \phi((\frac{a}{1})^{-1}) = \phi(\frac{a}{1})^{-1} = \sigma(a)^{-1}.$$

Portanto,

$$\phi(\frac{x}{a}) = \phi(\frac{x}{1})\phi(\frac{1}{a}) = \sigma(x)\sigma(a)^{-1},$$

de modo que ϕ é unicamente determinada por σ. ■

O anel $A^{-1}R$ e o homomorfismo $\varphi : R \to A^{-1}R$ têm as seguintes propriedades:

1. Se $a \in A$, então $\varphi(a) \in U(A^{-1}R)$;
2. $\ker\varphi = \{x \in R : xb = 0 \text{ para algum } b \in A\}$;
3. Cada elemento de $A^{-1}R$ é da forma $\varphi(x)\varphi(a)^{-1}$ para algum $x \in R$ e $a \in A$.

Proposição 1.3 (Unicidade de $A^{-1}R$) *Seja $\sigma : R \to S$ um homomorfismo de anéis tal que*

1. *Se $a \in A$, então $\sigma(a) \in U(S)$;*
2. $\ker\sigma = \{x \in R : xb = 0$ *para algum* $b \in A\}$;
3. *Cada elemento de S é da forma $\sigma(x)\sigma(a)^{-1}$, para algum $x \in R$ e $a \in A$.*

Então existe um único isomorfismo $\phi : A^{-1}R \to S$ tal que $\sigma = \phi \circ \varphi$.

Prova. Pelo item 1., temos que $\phi : A^{-1}R \to S$ definida por

$$\phi(\frac{x}{a}) = \sigma(x)\sigma(a)^{-1}.$$

é um homomorfismo de anéis. Assim, pelo item 3., segue-se que ϕ é sobrejetor. Finalmente,

$$\frac{x}{a} \in \ker\phi \Rightarrow \sigma(x) = 0.$$

Logo, pelo item 2., temos que $xb = 0$, para algum $b \in A$. Portanto,

$$\frac{x}{a} = \frac{0}{1},$$

isto é, $\frac{x}{a} = 0$ em $A^{-1}R$. ■

Proposição 1.4 *Sejam I um ideal de R e A um sistema multiplicativo de R. Então $A^{-1}R \neq A^{-1}I$ se, e somente se, $I \cap A = \emptyset$.*

Prova. É claro que $A^{-1}I$ é um ideal de $A^{-1}R$. Suponhamos, por absurdo, que $I \cap A \neq \emptyset$. Então existe $x \in I \cap A$. Logo, $\frac{x}{x} = \frac{1}{1} = 1 \in A^{-1}I$ e, assim, $A^{-1}R = A^{-1}I$, o que é uma contradição.

Reciprocamente, suponhamos, por absurdo, que $A^{-1}R = A^{-1}I$. Então $\frac{1}{1} \in A^{-1}I$, isto é, $\frac{1}{1} = \frac{r}{a}$, onde $r \in I$ e $a \in A$. Assim, existe $c \in A$ tal que $(a-r)c = 0$. Portanto, $ac = rc \in I \cap A$, o que é uma contradição. ■

Exemplo 1.1 *Seja R um anel. Então é fácil verificar que $A = R - P$ é um sistema multiplicativo se, e somente se, P é um ideal primo de R. Neste caso, $A^{-1}R = R_P$ é chamado a* localização de R em P. *O conjunto*

$$M_P = \{\frac{x}{a} : x \in M \ \ e \ a \notin P\}$$

é o único ideal maximal de R_P. De fato, é claro que M_P é um ideal de R_P. Assim, se $\frac{y}{b} \in R_P - M_P$, então $y \notin P$, isto é, $y \in A$. Logo, pela Proposição 1.2, $\frac{y}{b} \in U(R_P)$. Portanto, $U(R_P) = R_P - M_P$. Neste caso, R_P é um anel local.

Um anel R é *Noetheriano* se todo ideal de R é finitamente gerado.

Proposição 1.5 *Seja R anel. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *R é um anel Noetheriano;*

2. *Toda seqüência crescente de ideais de R é estacionária;*

3. *Todo conjunto não vazio de ideais de R tem um elemento maximal.*

Prova. (1. ⇒ 2.) Seja

$$I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$$

uma seqüência crescente de ideais de R. É fácil verificar que

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$$

é um ideal de R. Por hipótese, existem $a_1, \ldots, a_k \in R$ tal que

$$I = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle.$$

Como $a_1, \ldots, a_k \in I$ temos que existem $n_{i_1}, \ldots, n_{i_k} \in \mathbb{N}$ tais que $a_1 \in I_{n_{i_1}}, \ldots, a_k \in I_{n_{i_k}}$. Tomando $n_0 = \max\{n_{i_1}, \ldots, n_{i_k}\}$ temos que $a_1, \ldots, a_k \in I_{n_0}$. Logo, $I \subseteq I_{n_0}$ assim, $I = I_{n_0}$. Portanto, $I_n = I_{n_0}, \forall n \geq n_0$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Seja

$$\mathcal{F} = \{I_i : I_i \text{ um ideal de } R, I_i \neq \{0\}, i \in \mathbb{N}\}$$

uma família não vazia de ideais de R. Seja $I_1 \in \mathcal{F}$. Então, se I_1 é um elemento maximal acabou, caso contrário, existe $I_2 \in \mathcal{F}$ tal que $I_1 \subset I_2$. Se I_2 é um elemento maximal acabou, caso contrário, existe $I_3 \in \mathcal{F}$ tal que $I_1 \subset I_2 \subset I_3$. Proceguindo assim e pela hipótese, $\mathcal{F}$ contém um elemento maximal, digamos $M = I_k$.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Seja I um ideal de R. Seja

$$\mathcal{F} = \{J : J \text{ é um ideal finitamente gerado de } R \text{ e } J \subseteq I\}.$$

Como $\{0\} \in \mathcal{F}$ temos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Logo, pela hipótese, $\mathcal{F}$ contém um elemento maximal M.

Afirmação: $M = I$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que $M \subsetneq I$. Então, existe $x \in I$ e $x \notin M$. Se $L = M + \langle x \rangle \subseteq I$, então $L \in \mathcal{F}$, com $M \subsetneq L$, o que é uma contradição. ■

Exemplo 1.2 *Todo domínio de ideais principais é um domínio Noetheriano.*

Proposição 1.6 *Sejam R um anel Noetheriano e A é um sistema multiplicativo de R. Então $A^{-1}R$ é um anel Noetheriano.*

Prova. Seja J um ideal de $A^{-1}R$. Então é fácil verificar que

$$I_i = \{x \in R : \frac{x}{a} \in J \text{ para algum } a \in A\}$$

para $i = 1, 2$ são ideais de R. Agora, sejam J_1 e J_2 dois ideais de $A^{-1}R$, com $J_1 \subset J_2$.

Afirmação: $I_1 \subsetneq I_2$

De fato, suponhamos, por absurdo, que $I_1 = I_2$ e escolhendo $\frac{x}{a} \in J_2$, com $\frac{x}{a} \notin J_1$. Então $x \in I_2 = I_1$. Assim, existe $a_1 \in A$ tal que $\frac{x}{a_1} \in J_1$. Logo,

$$\frac{x}{a} = \frac{a_1}{a}\frac{x}{a_1} \in J_1,$$

o que é uma contradição. Assim, qualquer cadeia crescente de ideais de $A^{-1}R$ dar origem a uma cadeia crescente de ideais de R. Portanto, $A^{-1}R$ é um anel Noetheriano. ■

1.3 Anéis de Valorizações

Nesta seção estudaremos os anéis de valorizações e os domínios de Krull e algumas de suas propriedades que serão necessários para à compreensão deste trabalho.

Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Dizemos que R é um *anel de valorização* de K se para cada $x \in K^*$, então $x \in R$ ou $x^{-1} \in R$ (ou ambos).

Exemplo 1.3 *$\mathbb{Z}$ não é anel de valorização de $\mathbb{Q}$, pois $\frac{2}{3} \in \mathbb{Q}$, com $\frac{2}{3} \notin \mathbb{Z}$ e $\frac{3}{2} \notin \mathbb{Z}$.*

Sejam K um corpo e ∞ um símbolo. Por convenção temos que

$$\infty + \infty = \infty, \alpha + \infty = \infty \text{ e } \alpha < \infty, \forall \alpha \in \mathbb{Z}.$$

Uma *valorização discreta* de K é uma função $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ sobrejetora tal que as seguintes propriedades valem:

1. $v(x) = \infty \Leftrightarrow x = 0$;
2. $v(xy) = v(x) + v(y)$;
3. $v(x + y) \geq \min\{v(x), v(y)\}$.

Seja

$$R_v = \{x \in K : v(x) \geq 0\}.$$

Então R_v é um anel de valorização v de K. De fato, dado $x \in K^* - R_v$, temos que $v(x) < 0$. Como $v(1) = 0$, pois

$$v(1) = v(1.1) = v(1) + v(1) \Rightarrow v(1) = 0,$$

temos que

$$0 = v(1) = v(x.x^{-1}) = v(x) + v(x^{-1}) \Rightarrow v(x^{-1}) = -v(x) > 0.$$

Logo, $x^{-1} \in R_v$ e R_v é o anel de valorização v de K.

Exemplo 1.4 *Sejam R um domínio de ideais principais, K seu corpo quociente e*

$$\Lambda = \{p \in R : p \text{ é um elemento primo}\}.$$

Para cada $p \in \Lambda$ fixado, definimos

$$v_p : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\} \text{ por } v_p(x) = n,$$

onde

$$x = \frac{a}{b} = p^n \frac{c}{d}, p \nmid c \text{ e } p \nmid d.$$

Então v_p é uma valorização discreta de K. De fato, dados

$$x = p^m \frac{c}{d}, p \nmid c \text{ e } p \nmid d \text{ e } y = p^n \frac{c'}{d'}, p \nmid c' \text{ e } p \nmid d',$$

obtemos que:

1. $v_p(xy) = v_p(p^{m+n}\frac{cc'}{dd'}) = m + n = v_p(x) + v_p(y)$, *pois* $p \nmid cc'$ *e* $p \nmid dd'$.

2. $v_p(x + y) = v_p(p^m(\frac{cd'p^{n-m}+c'd}{dd'})) = m = v_p(x)$, *pois* $p \nmid cd'p^{n-m} + c'd$ *e* $p \nmid dd'$ *e* $v_p(x + y) = v_p(p^n(\frac{cd'+c'dp^{m-n}}{dd'})) = n = v_p(y)$, *pois* $p \nmid cd' + c'dp^{m-n}$ *e* $p \nmid dd'$. *Logo,*

$$v_p(x + y) \geq \min\{m, n\} = \min\{v_p(x), v_p(y)\}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned} R_p &= \{\frac{a}{b} \in K : v_p(x) \geq 0\} \\ &= \{\frac{a}{b} \in K : \mathrm{mdc}(p, b) = 1\}. \end{aligned}$$

Além disso,

$$R = \bigcap_{p \in \Lambda} R_p.$$

De fato, como $R \subseteq R_p$ para todo $p \in \Lambda$ temos que

$$R \subseteq \bigcap_{p \in \Lambda} R_p.$$

Reciprocamente, se $x = \frac{a}{b} \in R_p$, para todo $p \in \Lambda$, então $b = \pm 1$, pois, para $b \neq \pm 1$ existe $p' \in \Lambda$ tal que $p' \mid b$ e $\mathrm{mdc}(p', b) = p'$, o que é uma contradição. Logo, $x \in R$. Finalmente, $x \in U(R_p)$ se, e somente se, $v_p(x) = 0$.

Proposição 1.7 *Sejam R um domínio de valorização e K seu corpo quociente. Então as seguintes condições são equivalentes*:

1. *R é um anel de valorização discreta*;

2. R é um domínio de ideais principais;

3. R é um anel Noetheriano.

Prova (1. $\Rightarrow$ 2.) Sejam $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ a valorização discreta associada a R e M o ideal maximal de R. Como $1 \in \mathbb{Z}$ temos que existe $t \in M$ tal que $v(t) = 1$. Para $0 \neq x \in M$ temos que $v(x) = n > 0$. Assim,

$$\begin{aligned} v(\frac{x}{t^n}) &= v(x \cdot \frac{1}{t^n}) \\ &= v(x) + v(\frac{1}{t^n}) \\ &= v(x) - nv(t) = 0. \end{aligned}$$

Agora, tomando $x = t^n u$, obtemos que $u \in U(R)$. Seja $\{0\} \neq I \subseteq R$ um ideal qualquer de R. Então o conjunto

$$J = \{v(a) : 0 \neq a \in I\} \subseteq \mathbb{N}$$

é não vazio. Logo, pelo Princípio da Boa Ordenação, J contém um menor elemento, digamos n. Se $n = 0$, então existe $0 \neq a \in I$ tal que $v(a) = 0$ e $I = R$. Se $n > 0$, então existe $0 \neq a \in I$ tal que $v(a) = n$. Então $I = \langle a \rangle = \langle t^n \rangle$. Portanto, R é um domínio de ideais principais. Neste caso, todo ideal não nulo de R é uma potência do ideal $M = \langle t \rangle$.

(2. $\Rightarrow$ 1.) Como R é um domínio de ideais principais temos que existe $x \in R$ tal que $M = \langle x \rangle$. Se

$$I = \bigcap_{n=1}^{\infty} \langle x^n \rangle,$$

então existe $y \in R$ tal que $I = \langle y \rangle$. Se $y \in M$, então existe $z \in R$ tal que $y = xz$. Como $y \in \langle x^n \rangle$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos que $z \in \langle x^{n-1} \rangle$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Logo, existe $u \in U(R)$ tal que $z = yu$. Assim,

$$y = xz = xyu \Rightarrow y = 0,$$

pois se $y \neq 0$, então $1 = xu \in M$, isto é, $I = 0$. Portanto, para todo $a \in R^*$, existe $n \in \mathbb{Z}_+$ tal que $a \in \langle x^n \rangle$ com $a \notin \langle x^{n+1} \rangle$. Logo, a função $\mu : R^* \to \mathbb{Z}_+$ definida por $\mu(a) = n$. É fácil verificar que

$$\mu(a) - \mu(b) = \mu(c) - \mu(d),$$

para todos $a, b, c, d \in R^*$, com

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}.$$

Assim, $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ definida por $v(x) = \mu(a) - \mu(b)$, para todo $x = \frac{a}{b} \in K^*$, e $v(0) = \infty$ é uma valorização discreta, de modo que, R é um anel de valorização discreta.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Nada há a provar.

(3. $\Rightarrow$ 2.) Seja I um ideal de R. Então, por hipótese, existem $a_1, \ldots, a_k \in R$ tais que

$$I = \langle a_1, \ldots, a_k \rangle.$$

Entre os ideais principais $\langle a_i \rangle$ existe um maximal, digamos $\langle a_1 \rangle$. Assim, $I \subseteq \langle a_1 \rangle \subseteq I$. Portanto, $I = \langle a_1 \rangle$. ■

Sejam R domínio e K seu corpo quociente. Dizemos que R é um domínio de *Krull* se existir uma família $(v_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de valorizações de K, onde Λ é um conjunto de índices, tal que as seguintes condições são satisfeitas:

1. As valorizações v_λ são discretas;

2. $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda = R$, onde
$$R_\lambda = \{x \in K : v_\lambda(x) \geq 0\};$$

3. Para cada $x \in K^*$, o conjunto dos índices $\lambda \in \Lambda$ tais que $v_\lambda(x) \neq 0$ é finito;

4. Para cada $\lambda \in \Lambda$, existe um ideal primo P_λ de R tal que $R_\lambda = R_{P_\lambda}$.

Exemplo 1.5 *Todo domínio de ideais principais é um domínio de Krull.*

1.4 Séries de Potências

Nesta seção definimos o conjunto das séries de potências formais em seguida apresentaremos algumas propriedades que serão necessárias para à compreensão dos capítulos subsequentes. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [3].

Sejam R um anel e

$$R^{seq} = \{f = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}_+} : a_i \in R\}$$

o conjunto das *séries de potências formais* sobre R. Dados $f = (a_i)_{i \in \mathbb{Z}_+}, g = (b_i)_{i \in \mathbb{Z}_+} \in R^{seq}$, dizemos que

$$f = g \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall i \in \mathbb{Z}_+.$$

Definimos em R^{seq} duas operações binárias adição e multiplicação por

$$f + g = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, \ldots) \text{ e } fg = (c_0, c_1, \ldots),$$

onde

$$c_k = \sum_{i+j=k} a_i b_j.$$

Note que, somente um número finito de termos aparece nesta soma, pois se $i + j = k$, então $0 \leq i, j \leq k$. Com estas operações R^{seq} é um anel comutativo com identidade.

Seja

$$S = \{(a, 0, 0, \ldots) : a \in R\}.$$

Então, S é um subanel de R^{seq} isomorfo a R. Assim, podemos identificar $(a, 0, 0, \ldots)$ com a. Vamos denotar ax por

$$(0, a, 0, \ldots).$$

Mais geralmente, o símbolo ax^n denotaremos por

$$(0, 0, \ldots, 0, a, 0, \ldots),$$

onde a está na $(n+1)$-ésima posição. Usando esta notação cada série de potência

$$f = (a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots)$$

pode ser escrita de modo único na forma

$$\begin{aligned} f &= (a_0, 0, 0, \ldots) + (0, a_1, 0, \ldots) + \cdots + (0, \ldots, 0, a_n, 0, \ldots) + \cdots \\ &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \cdots \\ &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i. \end{aligned}$$

Para identificar a indeterminada x vamos denotar R^{seq} por $R[[x]]$. Seja $R[x]$ o conjunto de todos os elementos $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i$ tais que $a_i \neq 0$ somente para um número finito de índices. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, onde $a_n \neq 0$. É fácil verificar que $R[x]$ é um subanel de $R[[x]]$ chamado de *anel dos polinômios* na variável x.

Se $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]^*$, então a *ordem* de f, em símbolo $o(f)$, é o menor inteiro n tal que $a_n \neq 0$. Assim, se R é um domínio, então $R[[x]]$ também o é. Logo, o corpo de frações associado a $R[[x]]$ é o conjunto dos elementos da forma $\frac{f}{g}$ com $f, g \in R[[x]]$ e $g \neq 0$. Em particular, f e g podem ser constantes, assim, o corpo das frações de $R[[x]]$ contém o corpo quociente de R. Se K é um corpo, então o corpo das frações de $K[[x]]$ será denotado por

$$K((x)) = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in K[[x]] \text{ e } g \neq 0 \right\}.$$

Proposição 1.8 $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in U(R[[x]])$ *se, e somente se,* $a_0 \in U(R)$.

Prova. Se $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in U(R[[x]])$, então existe $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$ tal que $fg = 1$. Em particular, $a_0 b_0 = 1$. Logo, $a_0 \in U(R)$.

Reciprocamente, se $a_0 \in U(R)$, então aplicando o Algoritmo da Divisão a 1 e f obtemos

$$g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in R[[x]]$$

tal que $b_0 = a_0^{-1}$ e

$$b_i = -a_0^{-1}(a_1 b_{i-1} + \cdots + a_i b_0), \forall i \geq 1.$$

Portanto, $fg = 1$, isto é, $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in U(R[[x]])$. ∎

Corolário 1.1 *Se* K *é um corpo, então*

$$L = \left\{ f = \sum_{i \geq k}^{\infty} a_i x^i : a_i \in K \;\; e \;\; k \leq o(f) \right\}$$

é corpo. ∎

Note que, se I é um ideal de R, então $I + \langle x \rangle$ denotará o ideal de $R[[x]]$ consistindo de todas as séries de potências cujo termo constante pertence a I. Assim,

$$I + \langle x \rangle = \{ f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]] : a_0 \in I \}.$$

Proposição 1.9 *Todo ideal maximal de* $R[[x]]$ *é da forma* $M + \langle x \rangle$*, onde* M *é um ideal maximal de* R.

Prova. Seja $\phi : R[[x]] \to R$ definida por $\phi(f) = a_0 = f(0)$. Então é fácil verificar que ϕ é um homomorfismo de anéis sobrejetor. Se M é um ideal maximal de R, então

$$\phi^{-1}(M) = M + \langle x \rangle$$

é um ideal maximal de $R[[x]]$. Por outro lado, se N um ideal maximal de $R[[x]]$, então

$$M' = \{ f(0) : f \in N \}$$

é um ideal de R e $M' \neq R$ pois, caso contrário, pela Proposição 1.8, N contém uma unidade. Além disso, se $r \in R - M'$, então $\langle N, r \rangle = R[[x]]$. Assim, existem $f \in N$ e $g \in R[[x]]$ tais que

$$1 = gr + f.$$

Logo, $1 = g(0)r + f(0) \in \langle M', r\rangle$, isto é, M' é maximal de R. Como $N \subseteq M' + \langle x\rangle$ temos que $N = M' + \langle x\rangle$. ■

Se I é um ideal de R, então

$$I[[x]] = \{\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i : a_i \in I\}$$

é um ideal de $R[[x]]$. Seja

$$\sigma : R \to \frac{R}{I}$$

o homomorfismo canônico. Então

$$\widehat{\sigma} : R[[x]] \to \frac{R}{I}[[x]]$$

definida por

$$\widehat{\sigma}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \sigma(a_i) x^i$$

é um homomorfismo sobrejetor tal que

$$\ker \widehat{\sigma} = I[[x]].$$

Note que, $I[[x]]$ é diferente do ideal $IR[[x]]$ de $R[[x]]$ gerado pelo conjunto I, isto é,

$$IR[[x]] = \{\sum_{j=1}^{k} a_j f_j : a_j \in I, f_j \in R[[x]] \text{ e } k \in \mathbb{N}\}.$$

Pois temos sempre que $IR[[x]] \subseteq I[[x]]$.

Proposição 1.10 *Seja P um ideal primo de R. Então $P[[x]]$ é um ideal primo de $R[[x]]$.* ■

Proposição 1.11 *Seja K qualquer corpo. Então $K[[x]]$ é um domínio de ideais principais. Neste caso, os ideais não nulos de $K[[x]]$ são da forma $\langle x^n\rangle$, onde $n \in \mathbb{Z}_+$.*

Prova. Seja I um ideal de $K[[x]]$. Se $I = \{0\}$ nada há a provar. Suponhamos que $I \neq \{0\}$. Então o conjunto

$$S = \{n \in \mathbb{Z}_+ : n = o(f) \text{ e } f \in I\}$$

é não vazio. Assim, pelo Princípio da Boa Ordenação, S contém um menor elemento, digamos $k \in S$. Seja

$$\begin{aligned} f &= a_k x^k + a_{k+1}x^{k+1} + a_{k+2}x^{k+2} + \cdots \\ &= x^k(a_k + a_{k+1}x + a_{k+2}x^2 + \cdots) \in I. \end{aligned}$$

Como $a_k \neq 0$ temos, pela Proposição 1.8, que existe $g \in U(K[[x]])$ tal que

$$f = x^k g \Rightarrow x^k = fg^{-1} \in I.$$

Assim, $\langle x^k \rangle \subseteq I$. Por outro lado, se $0 \neq h \in I$ com ordem $n \geq k$, então

$$h = x^k(a_n x^{n-k} + a_{n+1}x^{n-k+1} + a_{n+2}x^{n-k+2} + \cdots),$$

isto é, $h \in \langle x^k \rangle$. Portanto $\langle x^k \rangle = I$. ■

Corolário 1.2 *O domínio $K[[x]]$ é local com $\langle x \rangle$ como seu ideal maximal.* ■

Dado $f \in K((x))$, existem $g = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i, h = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \in K[[x]]$ com $h \neq 0$ tal que $f = \frac{g}{h}$. Como $h \neq 0$ temos que existe um primeiro inteiro positico $n \in \mathbb{N}$ tal que $c_n \neq 0$. Assim, $c_n + c_{n+1}x + \cdots \in U(K[[x]])$. Logo, existe $k \in K[[x]]$ tal que $(c_n + c_{n+1}x + \cdots)k = 1$. Portanto,

$$\begin{aligned} f &= \frac{g}{h} \\ &= \frac{g}{x^n(c_n + c_{n+1}x + \cdots)} \\ &= \frac{gk}{x^n(c_n + c_{n+1}x + \cdots)k} \\ &= \frac{gk}{x^n}, \end{aligned}$$

isto é,

$$K((x)) = \left\{ f = \sum_{i \geq n}^{\infty} a_i x^i : a_i \in K \text{ e } n \leq o(f) \right\}.$$

Além disso,

$$K((x)) = K[[x]][\frac{1}{x}],$$

pois $x^{-n} \in K((x))$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Corolário 1.3 *Qualquer $f(x) \in K[[x]]^*$ pode ser escrito na forma $f(x) = g(x)x^n$, onde $g(x) \in U(K[[x]])$ e $n \in \mathbb{Z}_+$.* ■

Teorema 1.1 *Se R é um anel Noetheriano, então $R[[x]]$ é um anel Noetheriano.*

Prova. Sejam J um ideal não nulo de $R[[x]]$ e

$$I_k = \{a \in R : ax^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots \in J \text{ para algum } k \in \mathbb{Z}_+\} \cup \{0\}.$$

Então é fácil verificar que I é um ideal de R e $I_k \subseteq I_{k+1}$. Logo,

$$I = \bigcup_{k=0}^{\infty} I_k$$

é um ideal de R. Como R é um anel Noetheriano temos que

$$I = \langle b_1, b_2, \ldots, b_m \rangle.$$

Para cada $i \in \{1, \ldots, m\}$, obtemos que

$$b_i x^{k_i} + a_{k_i+1}x^{k_i+1} + \cdots \in J,$$

assim, tomando

$$k = \min\{k_i : i = 1, 2, \ldots, m\}$$

temos que

$$f_i = b_i x^k + a_{k+1}x^{k+1} + \cdots \in J, \forall i = 1, 2, \ldots, m.$$

Seja

$$L = \langle f_1, f_2, \ldots, f_m \rangle \subseteq J$$

e considerando $R[[x]]$ como R-módulo temos que J e L são R-submódulo de $R[[x]]$. Definindo N como R-submódulo de $R[[x]]$ constituído de todas as seqüências de ordem no máximo $k - 1$.

Afirmação:

$$J = (J \cap N) + L.$$

De fato, é claro que $(J \cap N) + L \subseteq J$, pois $J \cap N, L \subseteq J$. Seja

$$g = c_t x^t + c_{t+1}x^{t+1} + c_{t+2}x^{t+2} + \cdots \in J.$$

Então $c_t \in I$ e, assim,

$$c_t = r_1 b_1 + \cdots + r_m b_m,$$

onde $r_1, \ldots, r_m \in R$. Se $t < k$, então

$$g \in J \cap N \subset (J \cap N) + L.$$

Se $t \geq k$, então

$$g - g_1' = g_1 \in I,$$

onde $g_1' = r_1 x^{t-k} f_1 + \cdots + r_m x^{t-k} f_m \in L$. Logo, por aplicação sucessiva deste argumento, obtemos $g_s \in I$ e $g_s' \in L$ tal que $g_{s-1} = g_s + g_s'$ com $s \leq k-1$. Assim, $g_s \in J \cap N$ e $g_s' \in L$. Portanto, $g \in (J \cap N) + L$.

Finalmente, como N é finitamente gerado temos que $J \cap N$ é finitamente gerado e, assim, $J = (J \cap N) + L$ é finitamente gerado. ■

Proposição 1.12 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Se R é um anel de valorização discreta (de posto um), então*

$$S = R[[x]][\frac{1}{x}]$$

é um domínio Euclidiano.

Prova. Seja $v : K \to \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ a valorização discreta associada a R. Note que, cada elemento não nulo de S pode ser escrito de modo único na forma $x^n(a_0 + a_1 x + \cdots)$, para algum $n \in \mathbb{Z}$, onde $a_0 \neq 0$. Seja $\varphi : S - \{0\} \to \mathbb{N}$ definida por $\varphi(f) = v(a_0)$.

Afirmação: φ é um algoritmo Euclidiano em S.

De fato, sejam $f = x^n(a_0 + a_1 x + \cdots)$ e $g = x^m(b_0 + b_1 x + \cdots)$ elementos não nulos de S, então

$$\varphi(fg) = v(a_0 b_0) = v(a_0) + v(b_0) \geq v(a_0) = \varphi(f).$$

Para produzir elementos s, t em S tais que

$$f = sg + t, \text{ onde } t = 0 \text{ ou } \varphi(t) < \varphi(g),$$

podemos supor, sem perda de generalidade, que $\varphi(t) \geq \varphi(g)$. Assim, $\frac{a_0}{b_0} \in S$ e $f - (\frac{a_0}{b_0})x^{n-m}g = 0$ ou é da forma $x^r(c_0 + c_1 x + \cdots)$, onde $r > n$ e $c_0 \neq 0$. Se $f - (\frac{a_0}{b_0})x^{n-m}g = 0$ ou $v(c_0) < v(b_0)$, então podemos tomar $s = (\frac{a_0}{b_0})x^{n-m}$ e $t = f - (\frac{a_0}{b_0})x^{n-m}g$. Se $v(c_0) \geq v(b_0)$, então podemos repetir o processo acima subtraindo $(\frac{c_0}{b_0})x^{n_1-m}g$ de $f - (\frac{a_0}{b_0})x^{n-m}g$ e obtemos

$$f - \left[(\frac{a_0}{b_0})x^{n-m} + (\frac{c_0}{b_0})x^{n_1-m} \right] g.$$

Por indução concluímos que existe um inteiro i para o qual obtemos

$$s = (\frac{a_0}{b_0})x^{n-m} + (\frac{c_0}{b_0})x^{n_1-m} + \cdots + (\frac{d_0}{b_0})x^{n_i-m}$$

e $t = f - sg$ ou g divide f em S. Assim, $s = \frac{f}{g}$ e $t = 0$. ■

Teorema 1.2 *Se R é um domínio de Krull, então $R[[x]]$ é um domínio de Krull.*

Prova. Sejam K o corpo quociente de R e $(V_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ uma família de anéis de valorização discreta de K para R.

Afirmação: $R[[x]] = K[[x]] \bigcap \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda((x))\right)$.

De fato. Como $R \subseteq V_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, temos que

$$R[[x]] \subseteq K[[x]] \bigcap \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda((x))\right).$$

Por outro lado, seja $f \in K[[x]] \bigcap \left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} V_\lambda((x))\right)$. Então $f \in K[[x]]$ e $f \in V_\lambda((x))$, para todo $\lambda \in \Lambda$. Logo, $f = \sum_{i\geq k}^{\infty} a_i x^i$, com $a_i \in V_\lambda$ e $k \leq o(f)$, e $f = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{r_i}{s_i} x^i$, com $r_i, s_i \in R$ e $s_i \neq 0$. Como $\frac{r_i}{s_i} \in V_\lambda$ ou $\frac{s_i}{r_i} \in V_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda$, temos que $k = 0$. Logo, $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_i}{b_i} x^i = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{c_i x^i}{x^n}$ $\forall i$ e $n \in \mathbb{N}$. Assim, $\frac{a_i}{b_i} = c_{i+n} \in R$ $\forall i$ e $n \in \mathbb{N}$. Portanto, $f = \sum_{i=0}^{\infty} c_{i+n} x^i \in R[[x]]$.

Como $K[[x]]$ é um domínio de valorização discreta de (posto um) e $V_\lambda((x))$ é um domínio Euclidiano temos que $R[[x]]$ é um domínio de Krull.. ■

1.5 Dependência Inteira

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades de fecho inteiro e fecho completo inteiro que serão necessárias para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Dizemos que $\alpha \in K$ é *inteiro* sobre R, se existir um polinômio mônico $f(x) \in R[x]$ tal que $f(\alpha) = 0$.

Exemplo 1.6 *Se $R = \mathbb{Q}$ e $K = \mathbb{R}$, então $\sqrt{2}$ é inteiro sobre R.*

Proposição 1.13 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$\alpha \in K$ é inteiro sobre R;*

2. *$R[\alpha]$ é um R-módulo finitamente gerado de K;*

3. Existe um subdomínio Q de K tal que Q é R-módulo finitamente gerado e $\alpha \in Q$.

4. Existe um R-módulo finitamente gerado M tal que $\alpha M \subseteq M$ e $M \neq \{0\}$.

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Seja $\alpha \in K$ inteiro sobre R. Então existem $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1} \in R$, não todos nulos, tais que

$$\alpha^n + r_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + r_1\alpha + r_0 = 0.$$

Afirmação: Se $S = \langle 1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1} \rangle$, então $R[\alpha] = S$.
De fato, é claro que $S \subseteq R[\alpha]$. Como

$$\alpha^n = -(r_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + r_1\alpha + r_0)$$

temos que $\alpha^n \in S$. Suponhamos que $k > n$ e que o resultado seja válido para $k-1$, isto é,

$$\alpha^{k-1} = -(r_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + r_1\alpha + r_0) \in S.$$

Então

$$\begin{aligned}
\alpha^k &= \alpha\alpha^{k-1} \\
&= -\alpha(r_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + r_1\alpha + r_0) \\
&= -(r_{n-1}\alpha^n + r_{n-2}\alpha^{n-1} + \cdots + r_1\alpha^2 + r_0\alpha)
\end{aligned}$$

Assim, $\alpha^k \in S$, para todo $k \in \mathbb{Z}_+$. Portanto, $R[\alpha] \subseteq S$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Basta tomar $Q = R[\alpha]$.

(3. $\Rightarrow$ 4.) Fazendo $M = Q$, obtemos que $\alpha M \subseteq M$ e $M \neq \{0\}$, pois $\beta = \beta \cdot 1 \in \beta M$, para todo $\beta \in R[\alpha] - \{0\}$.

(4. $\Rightarrow$ 1.) Seja $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ um sistema de geradores de M, isto é, $M = \langle \alpha_1, \ldots, \alpha_n \rangle$. Como $\alpha M \subseteq M$ temos que existemm $a_{ij} \in R$ tais que

$$\alpha\alpha_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\alpha_i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Assim, podemos ver $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ como a solução do sistema homogêneo em K nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} (\delta_{ij}\alpha - a_{ij})x_i = 0, j = 1, \ldots, n.$$

Portanto,

$$\det(\delta_{ij}\alpha - a_{ij}) = 0.$$

Logo, este determinante é exatamente um polinômio mônico em α com coeficientes em R, isto é, α é inteiro sobre R. $\blacksquare$

Dizemos que S é uma *extensão inteira* de R se cada elemento de S é inteiro sobre R. O conjunto

$$\overline{R} = \{\alpha \in K : \alpha \text{ é inteiro sobre } R\}$$

é chamado de *fecho inteiro* de R, onde K é o corpo quociente de R. É fácil ver que $\overline{R}$ é um subanel de K que contém R. Se $\overline{R} = R$, então dizemos que R é *integralmente fechado.*

Proposição 1.14 *Sejam $R \subseteq S$ dois anéis e*

$$C = \{s \in S : s \textit{ é inteiro sobre } R\}.$$

Se A é um sistema multiplicativo de R, então $A^{-1}C = \overline{A^{-1}R}$, onde

$$\overline{A^{-1}R} = \{\alpha \in A^{-1}S : \alpha \textit{ é inteiro sobre } A^{-1}R\}.$$

Prova. Dado $\frac{\alpha}{a} \in A^{-1}C$. Como $\alpha \in C$ temos que existem $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1} \in R$, não todos nulos, tais que

$$\alpha^n + r_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + r_1\alpha + r_0 = 0.$$

Assim, multiplicanto esta equação por a^{-n}, obtemos que

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^n + \frac{r_{n-1}}{a}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{r_1}{a^{n-1}}\left(\frac{\alpha}{a}\right) + \frac{r_0}{a^n} = 0,$$

onde $\frac{r_{n-i-1}}{a^{i+1}} \in A^{-1}S$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Portanto, $\frac{\alpha}{a} \in \overline{A^{-1}R}$.

Reciprocamente, seja $\frac{\alpha}{a} \in \overline{A^{-1}R}$. Então existem $\frac{r_0}{a_0}, \frac{r_1}{a_1}, \ldots, \frac{r_{n-1}}{a_{n-1}} \in A^{-1}R$, não todos nulos, tais que

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right)^n + \frac{r_{n-1}}{a_{n-1}}\left(\frac{\alpha}{a}\right)^{n-1} + \cdots + \frac{r_1}{a_1}\left(\frac{\alpha}{a}\right) + \frac{r_0}{a_0} = 0.$$

Tomando $b = a_0a_1\cdots a_{n-1} \in A$ e multiplicando a equação por $(ab)^n$, obtemos que

$$(b\alpha)^n + b_{n-1}(b\alpha)^{n-1} + \cdots + b_1(b\alpha) + b_0 = 0,$$

onde $b_i \in R$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$. Logo, $b\alpha \in C$. Portanto,

$$\frac{\alpha}{a} = \frac{b\alpha}{ba} \in A^{-1}C.$$

$\blacksquare$

Corolário 1.4 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Então as seguintes condições são equivalentes*:

1. *R é integralmente fechado*;

2. *R_P é integralmente fechado, para cada ideal primo P de R*;

3. *R_M é integralmente fechado para cada ideal maximal M de R.*

Prova Seja $f : R \to \overline{R}$ a aplicação inclusão. Então, R é integralmente fechado se, e somente se, f sobrejetiva. Como f é sobrejetiva se, e somente se, $f_P : R_P \to \overline{R}_P$, para todo ideal primo P de R e f é sobrejetiva se, e somente se, $f_M : R_M \to \overline{R}_M$ é sobrejetiva para todo ideal maximal M de R. Como $\overline{R}_P$ respectivamente $\overline{R}_M$ é o fecho inteiro de R_P respectivamente de R_M em K. ∎

Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Um elemento $\alpha \in K$ é dito *quase-inteiro* sobre R se existir $r \in R^*$ tal que $\alpha^n r \in R$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Proposição 1.15 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Então $\alpha \in K$ é quase-inteiro sobre R se, e somente se, $R[\alpha]$ é um ideal fracionário de R.* ∎

O conjunto

$$R^- = \{\alpha \in K : \alpha \text{ é quase-inteiro sobre } R\}$$

é chamado de *fecho completo inteiro* de R. Se $R = R^-$, então dizemos que R é *completamente integralmente fechado.* É claro que um elemento de K inteiro sobre R é quase inteiro sobre R, mas a recíproca é, em geral, falsa. A recíproca vale, porém, se R é um domínio Noetheriano. Pois, seja $\alpha \in K$ quase inteiro sobre R. Então $R[\alpha]$ está contido em um R-submódulo V finitamente gerado de K. Como R é Noetheriano temos que V é Noetheriano e, portanto, $R[\alpha]$ é um R-submódulo finitamente gerado de K, isto é, α é inteiro sobre R.

Exemplo 1.7 *Se $R = \mathbb{Z} + x\mathbb{Q}[x]$, então $R = \overline{R}$ e $R^- = \mathbb{Q}[x]$. De fato, seja $w \in \mathbb{Q}(x)$ quase inteiro sobre R. Então, existe $f \in R^*$ tal que $w^n f \in R$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Como em $\mathbb{Q}(x)$ podemos escrever $w = \frac{g}{h}$ com $\mathrm{mdc}(g, h) = 1$, temos que*

$$\frac{g^n f}{h^n} \in R \Longleftrightarrow h^n \mid g^n f \text{ em } \mathbb{Q}[x] \Longleftrightarrow h^n \mid f.$$

Em particular, se p é um fator irredutível de h, então $p^n \mid f$, para todo $n \in \mathbb{N}$, isto é, $p \in U(\mathbb{Q}[x])$ e $h \in \mathbb{Q}$. Portanto, $R^- \subseteq \mathbb{Q}[x]$. Reciprocamente, seja $g \in \mathbb{Q}[x]$. Então $g^n x \in R$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $x \in R^*$ temos que $\mathbb{Q}[x] \subseteq R^-$. Agora, seja $u \in \mathbb{Q}(x)$ inteiro sobre R. Então

$$u^m + a_1 u^{m-1} + \cdots + a_m = 0, \ a_i \in R$$

Como $u \in R^- = \mathbb{Q}[x]$ temos que

$$u = b_0 + b_1 x + \cdots + b_m x^m, b_j \in \mathbb{Q}.$$

Tomando, $a_i = c_i + x f_i$ com $c_i \in \mathbb{Z}$ e $f_i \in \mathbb{Q}[x]$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= u^m + (c_1 + x f_1) u^{m-1} + \cdots + (c_m + x f_m) \\ &= b_0^m + c_1 b_0^{m-1} + \cdots + c_{m-1} b_0 + c_m + \cdots \\ &\Leftrightarrow b_0^m + c_1 b_0^{m-1} + \cdots + c_{m-1} b_0 + c_m = 0, \ldots. \end{aligned}$$

Portanto, $b_0 \in \mathbb{Q}$ é inteiro sobre $\mathbb{Z}$, isto é, $b_0 \in \overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z}$. Assim, $u \in R$.

Proposição 1.16 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Se R é um domínio de Krull, então R é completamente integralmente fechado..* ■

1.6 Operações com Ideais

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades de ideais: fracionário, invertível e divisorial que serão necessárias para o desenvolvimento dos capítulos subsequentes.

Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Um subconjunto não vazio I de K é um *ideal fracionário* de R se I é um R-submódulo de K tal que $xI \subseteq R$ para algum $x \in R^*$, isto é, o conjunto $J = xI$ é um ideal de R e $I = x^{-1}J$, assim, os ideais fracionários de R são subconjuntos de K da forma $x^{-1}J$, onde J é um ideal de R e $x \in R^*$. Quando $x = 1$, dizemos que I é um *ideal integral* de R. Denotaremos por $\mathcal{F}(R)$ o conjunto de todos os ideais fracionários não nulos de R. Note que, se $I, J \in \mathcal{F}(R)$, então $I + J$, IJ, $I \cap J \in \mathcal{F}(R)$.

Exemplos 1.1 *1. Sejam R um domínio de ideais principais e K seu corpo quociente. Então todo ideal de $\mathcal{F}(R)$ é principal. De fato, como R um domínio de ideais principais temos que qualquer ideal de R é da forma $J = \langle m \rangle$. Assim, dado $n \in R^*$, $I = n^{-1}J$ é um ideal fracionário de R, isto é, $I = \langle x \rangle$, onde $x = \frac{m}{n} \in K$.*

2. *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Então, todo R-submódulo I de K finitamente gerado é um elemento de $\mathcal{F}(R)$. De fato, como I é um R-submódulo finitamente gerado de K temos que existem $x_1, \ldots, x_n \in K$ tal que*

$$I = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle.$$

Sabemos que $x_i = \frac{a_i}{b_i}$, com $a_i, b_i \in R$ e $b_i \neq 0$, para todo $i = 1, \ldots, n$, assim, tomando

$$b = b_1 \cdots b_n \in R^*,$$

obtemos $bI \subseteq R$.

3. *Se R é um domínio Noetheriano, então todo ideal de $\mathcal{F}(R)$ é um R-módulo finitamente gerado de K.*

Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Se $I, J \in \mathcal{F}(R)$, então definimos o *quociente* de J por I como sendo o conjunto

$$(J : I) = \{x \in K : xI \subseteq J\}.$$

Vamos mostrar que $(J : I) \in \mathcal{F}(R)$. De fato, se $x, y \in (J : I)$, então $z(x-y) = zx-zy \in J$, para todo $z \in I$, isto é, $x - y \in (J : I)$. Se $r \in R$ e $x \in (J : I)$, então $(rx)z = x(rz) \in J$, para todo $z \in I$, isto é, $rx \in (J : I)$. Logo, $(J : I)$ é um R-submódulo de K. Finalmente, como $I \in \mathcal{F}(R)$ temos que existe $r \in R^*$ tal que $rz \in R$, para todo $z \in I$. Seja $w \in J^* \cap R$. Então $rw \in R$ e $(rw)x \in R$, para todo $x \in (J : I)$, pois se $x \in (J : I)$, então $xI \subseteq J$ e $(rw)x = r(wx) \in rJ \subseteq R$. Em particular, $(I : I)$ é a maior extensão de R na qual I é um ideal.

Note que $R \subseteq (R : R)$ e quando I e J são ideais integrais de R, seu quociente $(J : I)$, não necessita ser um ideal integral. Além disso, se $r \in K^*$ com $r \in I$, então $r \in R^*$.

Proposição 1.17 *Se $J \in \mathcal{F}(R)$, então existe um ideal I de R tal que*

$$J = (I : \langle r \rangle)$$

para algum $r \in R^*$.

Prova. Se $J \in \mathcal{F}(R)$, então existe $r \in R^*$ tal que $rx \in R$, para todo $x \in J$ ou, equivalentemente, $I = \langle r \rangle J$ é um ideal integral de R.

Afirmação:

$$J = (I : \langle r \rangle).$$

De fato, dado $x \in J$, temos que $\langle r \rangle x \subseteq I$. Logo,

$$J \subseteq (I : \langle r \rangle).$$

Reciprocamente, dado

$$x \in (I : \langle r \rangle),$$

temos que $rx \in I$, isto é, $rx = srz$ para algum $s \in R$ e $z \in J$. Como R é um domínio integral e $r \neq 0$ temos que $x = sz \in J$. Logo,

$$(I : \langle r \rangle) \subseteq J.$$

■

Corolário 1.5 *Se R é um domínio de ideais principais, então cada ideal de $\mathcal{F}(R)$ é principal*

Prova. Pela Proposição 1.17, cada elemento $\mathcal{F}(R)$ tem a forma $J = (\langle r \rangle : \langle s \rangle)$, onde $r, s \in R$, com $s \neq 0$. Agora, basta mostrar que

$$(\langle r \rangle : \langle s \rangle) = \langle rs^{-1} \rangle.$$

De fato, dado $x \in \langle rs^{-1} \rangle$ temos que $x = rs^{-1}y$, para algum $y \in R$. Logo, $xs = ry \in \langle r \rangle$. Portanto, $x\langle s \rangle \subseteq \langle r \rangle$, isto é, $x \in (\langle r \rangle : \langle s \rangle)$. A recíproca prova-se de modo análogo. ■

Exemplo 1.8 *Sejam $R = \mathbb{Z}$, $K = \mathbb{Q}$ e $I, J \in \mathcal{F}(R)$ tais que $J = \langle \frac{1}{2} \rangle$ e $I = \langle \frac{2}{3} \rangle$. Então*

$$(J : I) = \langle \frac{3}{4} \rangle.$$

Proposição 1.18 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Sejam $I, J, L \in \mathcal{F}(R)$. Então*:

1. $I \subseteq J \Rightarrow (L : J) \subseteq (L : I)$;

2. $(J : I)I \subseteq J$;

3. $(\bigcap_{i=1}^{n} J_i : I) = \bigcap_{i=1}^{n} (J_i : I)$;

4. $((J:I):L)=(J:IL)=((J:L):I)$*;*

5. $(J:\sum_{i=1}^{n}I_i)=\bigcap_{i=1}^{n}(J:I_i)$*;*

6. $R\subseteq(J:I)\Leftrightarrow I\subseteq J$*.*

Prova. Vamos provar apenas os itens 4 e 5.

$$\begin{aligned}((J:I):L) &= \{x\in K : xL\subseteq (J:I)\}\\ &= \{x\in K : xLI\subseteq J\}\\ &= (J:IL).\end{aligned}$$

Como

$$I_i\subseteq\sum_{i=1}^{n}I_i$$

temos que

$$(J:\sum_{i=1}^{n}I_i)\subseteq(J:I_i),\forall i=1,\ldots,n.$$

Portanto, $(J:\sum_{i=1}^{n}I_i)\subseteq\bigcap_{i=1}^{n}(J:I_i)$. Reciprocamente, dado $x\in\bigcap_{i=1}^{n}(J:I_i)$, temos que $x\in(J:I_i)$ para cada $i=1,\ldots,n$. Logo,

$$xI_i\subseteq J,\forall i=1,\ldots,n.$$

Assim,

$$x\sum_{i=1}^{n}I_i\subseteq J,$$

isto é, $x\in(J:\sum_{i=1}^{n}I_i)$. Portanto, $\bigcap_{i=1}^{n}(J:I_i)\subseteq(J:\sum_{i=1}^{n}I_i)$. ■

Proposição 1.19 *Sejam* R *um domínio,* K *o seu corpo quociente e* $I,J\in\mathcal{F}(R)$*. Então*:

1. $I\subseteq(J:(J:I))$*;*

2. $I=(J:(J:I))$ *se, e somente se, existe* $L\in\mathcal{F}(R)$ *tal que* $I=(J:L)$*.*

Prova. 1. Seja $x\in I$ temos que $x(J:I)\subseteq J$, pois $xy\in J$, $\forall y\in(J:I)$. Portanto,

$$I\subseteq(J:(J:I)).$$

2. Suponhamos que $I=(J:(J:I))$. Então, tomando $L=(J:I)\in\mathcal{F}(R)$, obtemos

$$I=(J:L).$$

Reciprocamente, dado $x \in (J : (J : I))$, temos que $x(J : I) \subseteq J$, isto é, $xy \in J$, para todo $y \in (J : I)$. Logo,

$$xyI \subseteq xJ \subseteq J.$$

Assim, tomando $L = yI \in \mathcal{F}(R)$, obtemos que $x \in (J : L) = I$. Portanto, $(J : (J : I)) \subseteq I$. ■

Proposição 1.20 *Se $I \in \mathcal{F}(R)$, então*

$$(R : (R : I)) = \bigcap_{I \subseteq \langle x \rangle} \langle x \rangle.$$

Prova. Seja

$$\mathcal{F} = \{\langle x \rangle \in \mathcal{F}(R) : I \subseteq \langle x \rangle\}.$$

Se $y \in (R : (R : I))$ e $\langle x \rangle \in \mathcal{F}$, então

$$I \subseteq \langle x \rangle \Rightarrow x^{-1}I \subseteq R \Rightarrow x^{-1} \in (R : I).$$

Logo, $yx^{-1} \in R$, isto é, $y \in \langle x \rangle$. Portanto,

$$(R : (R : I)) \subseteq \bigcap_{I \subseteq \langle x \rangle} \langle x \rangle.$$

Reciprocamente, suponhamos que $y \notin (R : (R : I))$. Então $y(R : I) \nsubseteq R$. Logo, $xy \notin R$, para algum $x \in (R : I)$. Assim, $y \notin \langle x^{-1} \rangle$. Agora, note que

$$x \in (R : I) \Rightarrow xI \subseteq R \Rightarrow I \subseteq \langle x^{-1} \rangle.$$

Portanto,

$$y \notin \bigcap_{I \subseteq \langle x \rangle} \langle x \rangle.$$

Consequentemente,

$$\bigcap_{I \subseteq \langle x \rangle} \langle x \rangle \subseteq (R : (R : I)).$$

■

Um elemento $I \in \mathcal{F}(R)$ é *invertível* se existir $J \in \mathcal{F}(R)$ tal que

$$IJ = \langle 1 \rangle = R.$$

Proposição 1.21 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Então:*

1. *Se $I \in \mathcal{F}(R)$ é invertível, então I é finitamente gerado. Além disso, se R é local, então I é principal;*

2. *Se $I, J \in \mathcal{F}(R)$, com $I \subseteq J$ e J invertível, então existe um ideal L de R tal que $I = JL$;*

3. *Se $I \in \mathcal{F}(R)$ é finitamente gerado, então $(R : I)A^{-1}R = (A^{-1}R : IA^{-1}R)$ e*

$$(A^{-1}R : (A^{-1}R : (R : (R : I))A^{-1}R)) = (A^{-1}R : (A^{-1}R : IA^{-1}R)),$$

onde A é um sistema multiplicativo de R.

Prova. 1. Se $I \in \mathcal{F}(R)$ é invertível, então existe $J \in \mathcal{F}(R)$ tal que

$$IJ = R.$$

Como $1 \in R = IJ$ temos que existem $a_1, \ldots, a_n \in I$ e $b_1, \ldots, b_n \in J$ tais que

$$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i.$$

Se $x \in I$, então $xb_i \in R$, $i = 1, \ldots, n$, pois $xb_i \in IJ$. Logo,

$$x = x1 = \sum_{i=1}^{n} (xb_i)a_i,$$

isto é,

$$I \subseteq \langle a_1, \ldots, a_n \rangle.$$

Portanto, I é um ideal finitamente gerado.

Finalmente, seja M o ideal maximal de R. Como $IM \subsetneq I$ temos que existe $x \in I$ tal que $x \notin IM$. É fácil verificar que existe $J \in \mathcal{F}(R)$ tal que $IJ = \langle x \rangle$. Note que, $J = I^{-1}\langle x \rangle$ é um ideal integral, pois

$$J = I^{-1}\langle x \rangle \subseteq \langle x^{-1}x \rangle = R.$$

Suponhamos, por absurdo, que $J \subseteq M$. Então, $I^{-1}\langle x \rangle \subseteq M$ e, assim, $\langle x \rangle \subseteq IM$, donde $x \in IM$, o que é uma contradição. Assim, $M \subset J$ e $J = R$. Portanto, $I = \langle x \rangle$.

2. Sejam $J' \in \mathcal{F}(R)$ tal que $JJ' = R$ e $L = J'I$. Então $L \subseteq R$ e

$$JL = JJ'I = I,$$

pois $I \subseteq J$.

3. Por hipótese existem $x_1, \ldots, x_n \in R$ tal que $I = \langle x_1, \ldots, x_n \rangle$. Assim,

$$\begin{aligned}
(R:I) &= (R : \sum_{i=1}^{n} x_i R) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} (R : x_i R) \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} x_i^{-1} R.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
(R:I)A^{-1}R &= \left[\bigcap_{i=1}^{n} x_i^{-1} R\right] A^{-1}R \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} x_i^{-1} A^{-1} R \\
&= \bigcap_{i=1}^{n} (A^{-1}R : x_i A^{-1} R) \\
&= (A^{-1}R : \sum_{i=1i}^{n} x_i A^{-1} R) \\
&= (A^{-1}R : IA^{-1}R).
\end{aligned}$$

É claro que $I \subseteq (R : (R : I))$ e daí, temos que $IA^{-1}R \subseteq (R : (R : I))A^{-1}R$. Logo,

$$(A^{-1}R : (A^{-1}R : IA^{-1}R)) \subseteq (A^{-1}R : (A^{-1}R : (R : R : I)A^{-1}R)).$$

Reciprocamente, como I é finitamente gerado, temos que $(R : I)A^{-1}R = (A^{-1}R : IA^{-1}R)$ Assim,

$$\begin{aligned}
(A^{-1}R : IA^{-1}R) &= (A^{-1}R : (R : I)A^{-1}R) \\
&\supseteq (A^{-1}R : (A^{-1}R : (R : (R : I))A^{-1}R)).
\end{aligned}$$

Portanto, $(A^{-1}R : (A^{-1}R : (R : (R : I))A^{-1}R)) = (A^{-1}R : (A^{-1}R : IA^{-1}R))$. ■

Proposição 1.22 *Sejam $I \in \mathcal{F}(R)$ invertível e $J \in \mathcal{F}(R)$ tal que $IJ = R$. Então $J = (R : I)$.*

Prova. Seja $I \in \mathcal{F}(R)$ invertível. Então existe $J \in \mathcal{F}(R)$ tal que $IJ = R$. Como $IJ = R$ temos que $J \subseteq (R : I)$, pois $\langle x \rangle I \subseteq R$, para todo $x \in J$. Reciprocamente, como $(R : I)$ e J são R-submódulos de K temos que

$$(R : I) = R(R : I) = (JI)(R : I) = J(I(R : I)) \subseteq JR \subseteq J.$$

Portanto, $(R : I) = J = I^{-1}$. ■

Note que, todo ideal fracionário não nulo e principal $I = \langle x \rangle$ é invertível e $\langle x \rangle^{-1} = \langle x^{-1} \rangle$. Também, é fácil verificar que, se $I, J \in \mathcal{F}(R)$ são invertíveis, então IJ é invertível e $(IJ)^{-1} = I^{-1}J^{-1}$.

Proposição 1.23 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Sejam $I, J \in \mathcal{F}(R)$. Então*

$$(J : I) = \bigcap \left\{ J\langle x^{-1} \rangle : x \in I \neq \{0\} \right\}.$$

Prova. Seja $y \in (J : I)$. Então $yI \subseteq J$ e $xy \in J, \forall x \in I \neq \{0\}$. Logo, $y \in J\langle x^{-1} \rangle, \forall x \in I \neq \{0\}$. Assim,

$$y \in \bigcap \left\{ J\langle x^{-1} \rangle : x \in I \neq \{0\} \right\}.$$

Portanto,

$$(J : I) \subseteq \bigcap \left\{ J\langle x^{-1} \rangle : x \in I \neq \{0\} \right\}.$$

Reciprocamente, se

$$y \in \bigcap \left\{ J\langle x^{-1} \rangle : x \in I \neq \{0\} \right\},$$

então $y \in J\langle x^{-1} \rangle, \forall x \in I \neq \{0\}$, isto é, $xy \in J, \forall x \in I \neq \{0\}$. Logo, $y \in (J : I)$. Portanto,

$$\bigcap \left\{ J\langle x^{-1} \rangle : x \in I \neq \{0\} \right\} \subseteq (J : I).$$

■

Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Dizemos que um ideal $I \in \mathcal{F}(R)$ é *divisorial* de R se

$$I = (R : (R : I)).$$

Exemplo 1.9 *Sejam R um domínio de ideais principais e K seu corpo quociente. Então todo $I \in \mathcal{F}(R)$ é divisorial. De fato, sabemos que*

$$I = \langle \frac{m}{n} \rangle \text{ onde } m, n \in R^*.$$

Como I é invertível temos que

$$(R : (R : I)) = (R : I^{-1}) = (R : \langle \frac{n}{m} \rangle) = \langle \frac{n}{m} \rangle^{-1} = I.$$

Mais geralmente, se R um domínio, então todo ideal invertível de $\mathcal{F}(R)$ é divisorial.

Proposição 1.24 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *$I \in \mathcal{F}(R)$ é divisorial;*

2. *Existe $L \in \mathcal{F}(R)$ tal que $I = (R : L)$;*

3. *$I = \bigcap_{I \subseteq \langle x \rangle} \langle x \rangle$, com $x \in K$.* ■

Proposição 1.25 *Sejam R um domínio, K seu corpo quociente e $I, J \in \mathcal{F}(R)$, com J divisorial. Então $(J : I)$ é divisorial.*

Prova. Suponhamos que $I, J \in \mathcal{F}(R)$, com J divisorial. Então existe $L \in \mathcal{F}(R)$ tal que $J = (R : L)$. Logo,

$$(J : I) = ((R : L) : I).$$

Assim, pela Proposição 1.18, temos que

$$((R : L) : I) = (R : LI).$$

Logo, existe $N = LI \in \mathcal{F}(R)$ tal que $(J : I) = (R : N)$. Portanto, $(J : I)$ é divisorial. ■

Proposição 1.26 *Seja $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subdomínios de S tal que $R = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$. Então*

$$(R : I) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda : IR_\lambda), \forall I \in \mathcal{F}(R).$$

Em particular,

$$(R : (R : I)) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda : (R : I)R_\lambda).$$

Prova. Sejam K_λ, K e L os corpos quocientes de $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$, S e R, respectivamente. Então

$$L \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda \subseteq K.$$

Seja $x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda : IR_\lambda)$. Então

$$xIR_\lambda \subseteq R_\lambda, \text{ onde } x \in K_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Assim,

$$I \subseteq IR_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda.$$

Portanto,

$$xI \subseteq xIR_\lambda \subseteq R_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda \Rightarrow xI \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda = R, \text{ onde } x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda.$$

Resta provar que $x \in L$. Seja $0 \neq y \in I$. Então $y \in K^*$ e $xy \in Ry \subseteq R$. Logo, existe $r \in R$ tal que $x = ry^{-1} \in K$. Portanto,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda : IR_\lambda) \subseteq (R : I).$$

Por outro lado, dado $x \in (R : I)$, temos que $xIR_\lambda \subseteq R_\lambda, \forall \lambda \in \Lambda$ e $x \in L \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_\lambda$. Portanto,

$$x \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} (R_\lambda : IR_\lambda).$$

■

1.7 Anéis com os mesmos Ideais Primos

Nesta seção estamos interessados em domínios R e S com um ideal comum I e $R \subseteq S$. O conjunto dos ideais primos de R será denotado por

$$\mathrm{Spec}(R)$$

e o conjunto de todos os ideais maximais de R será denotado por

$$\mathrm{Max}(R).$$

O *radical de Jacobson* de um anel R, será denotado por $J(R)$, e dado por

$$J(R) = \bigcap_{M \in \mathrm{Max}(R)} M.$$

Dizemos que dois ideais I e J de um anel R são *relativamente primos* se $I + J = R$.

Lema 1.1 *Sejam R e S domínios, com $R \subseteq S$. Se $x \in R^*$ e $x \in I$, então $S \subseteq K$ e $S \subseteq (I : I)$, onde K é o corpo quociente de R.*

Prova. Se $x \in R^*$ e $x \in I$, então $y = sx \in I$, para todo $s \in S$, pois I é um ideal de S. Logo, $s = yx^{-1} \in K$. Portanto, $S \subseteq K$.

Finalmente, como $sx \in I$ temos que $sI \subseteq I$. Portanto, $S \subseteq (I : I)$. ■

Lema 1.2 *Sejam R e S domínios, com $R \subseteq S$. Se $R \neq S$, então R e S têm no máximo um ideal maximal em comum.*

Prova. Suponhamos, por absurdo que M e N são dois ideais maximais comuns a R e S com $M \neq N$. Como $M \neq N$ temos que $M + N = R$ e $M + N = S$. Portanto, $R = S$, o que é uma contradição. ■

Proposição 1.27 *Sejam R e S domínios, com $R \subseteq S$. Se* $\text{Spec}(R) = \text{Spec}(S)$ *e* $R \subsetneq S$, *então R e S são locais. Além disto, se R é um domínio que não é corpo, então $S \subseteq (M : M)$ onde, M é um ideal maximal de R e S.*

Prova. Como $\text{Spec}(R) = \text{Spec}(S)$ e $R \subsetneq S$ pelo Lema 1.2, temos que R é local. Finalmente, se M é um ideal maximal de R, então, pelo Lema 1.1, temos que $S \subseteq (M : M)$. ■

Lema 1.3 *Sejam R e S domínios, com $R \subseteq S$. Se $J(R)$ é um ideal de S, então $J(R) \subseteq J(S)$.*

Prova. Basta mostrar que $J(R) \subseteq M$, para cada $M \in \text{Max}(S)$. Suponhamos, por absurdo, que $J(R) \nsubseteq M$, para algum $M \in \text{Max}(S)$. Logo, $J(R) + M = S$. Como $1 \in S$ temos que existem $r \in J(R)$ e $m \in M$. Assim, $m = 1 - r \in 1 + J(R)$, isto é, $m \in U(R) \subseteq U(S)$, o que é uma contradição. ■

Corolário 1.6 *Sejam R e S domínios, com $R \subseteq S$, R local e M seu ideal maximal contido S. Então $M \subseteq J(S)$.* ■

Proposição 1.28 *Sejam R e S domínios, com $R \subseteq S$, R local e M seu ideal maximal. Então* $\text{Spec}(R) = \text{Spec}(S)$ *se, e somente se,* $M \in \text{Max}(S)$.

Prova. Se $\text{Spec}(R) = \text{Spec}(S)$, então é claro que $M \in \text{Max}(S)$. Reciprocamente, suponhamos que $M \in \text{Max}(S)$. Então, pelo Corolário 1.6, $M \subseteq J(S)$. Assim, M é o único ideal maximal de S. Logo, $\text{Spec}(S) \subseteq \text{Spec}(R)$. Por outro lado, se $P \in \text{Spec}(R)$, então, para todo $s \in S$ e $p \in P$, temos que

$$(sp)^2 = ps^2p \in MSP = MP \subseteq P,$$

pois $sp \in SM = M \subseteq R$. Como P é um ideal primo de R temos que $sp \in P$ e assim, P é um ideal de S. Finalmente, dados $s, t \in S$, com $st \in P$. Se $s, t \in M$, então $s, t \in R$ e, assim, $s \in P$ ou $t \in P$, pois $P \in \text{Spec}(R)$. Logo, sem perda de generalidade, podemos supor que $s \in S - M$. Então $s \in U(S)$. Logo, existe $u \in S$ tal que $su = us = 1$. Portanto, $t = t1 = (ts)u \in PS \subseteq P$. ■

Proposição 1.29 *Sejam R e S domínios, com $R \subseteq S$. Então as seguintes condições são equivalentes*:

1. $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(S)$;
2. $J(R) = J(S)$;
3. $\operatorname{Max}(R) = \operatorname{Max}(S)$;
4. $\operatorname{Max}(R) \subseteq \operatorname{Max}(S)$;
5. $\operatorname{Max}(S) \subseteq \operatorname{Max}(R)$.

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Como todo ideal maximal M de R é primo temos que $J(R) = J(S)$.

(2. $\Rightarrow$ 3.) $M \in \operatorname{Max}(R)$ se, e somente se, $J(S) = J(R) \subseteq M$ se, e somente se, $M \in \operatorname{Max}(S)$.

(3. $\Rightarrow$ 4.) Nada há a provar. (4. $\Rightarrow$ 1.) Suponhamos que $R \neq S$. Então, pelo Lema 1.2, R e S têm um único ideal maximal M e, por hipótese, R é local. Logo, pela Proposição 1.28, temos que $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(S)$.

Finalmente, vamos mostrar que (3. $\Leftrightarrow$ 5.). Neste caso, basta mostrar que (5. $\Rightarrow$ 3.). Suponhamos que $R \neq S$. Então, pelo Lema 1.2, R e S têm um único ideal maximal M e, por hipótese, S é local. Suponhamos, por absurdo, que exista um ideal maximal N de R tal que $N \neq M$. Seja $x \in M - N$ e $y \in N - M$. Como $y \in S - M$ temos que $y \in U(S)$ e $xy^{-1} \in MS = M$. Portanto,

$$x = (xy^{-1})y \in MN \subset N,$$

o que é uma contradição. ■

Exemplo 1.10 *Sejam L um corpo, $K = L(x)$ e $T = K[[y]] = K + M$, onde $M = \langle y \rangle = yT$. Então $R = L + M$ e $S = L[x] + M$ são domínios, onde $R \subseteq S$ e R local com ideal maximal M. Neste caso, $M \in \operatorname{Spec}(S)$ e $\operatorname{Spec}(R) \neq \operatorname{Spec}(S)$.*

É claro que $\operatorname{Spec}(R) \subset \operatorname{Spec}(S)$. Como, $\operatorname{Max}(S) \not\subseteq \operatorname{Max}(R)$ pela Proposição1.29, temos que $\operatorname{Spec}(R) \neq \operatorname{Spec}(S)$.

Corolário 1.7 *Se qualquer uma das condições da Proposição 1.29, valem e $R \neq S$, então R é local.*

$\blacksquare$

Sejam R um domínio local e K seu corpo quociente. Sejam M o ideal maximal de R, $A = (M : M)$, $L = \frac{R}{M}$, $B = \frac{A}{M}$ e $\pi : A \to B$ o homomorfismo canônico.

Sejam

$$\mathcal{F} = \{S : S \subseteq R \text{ ou } R \subseteq S \text{ e } \operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(S)\},$$

onde $S \subseteq K$ é um domínio e

$$\mathcal{F}^* = \{F : F \subseteq L \text{ ou } L \subseteq F \text{ e } F \subseteq B\},$$

onde F é um corpo. Então temos a seguinte proposição.

Proposição 1.30 *A função $\varphi : \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}$ dada por $\varphi(F) = \pi^{-1}(F)$ é bijetiva. Além disto, $\pi^{-1}(F) \subseteq R$ se, e somente se, $F \subseteq L$.*

Prova. Para mostrar que φ está bem definida. Seja $F \in \mathcal{F}^*$ qualquer. Então $S = \pi^{-1}(F) \in \mathcal{F}$. De fato, é claro que $S \subseteq K$, $S \subseteq R$ ou $R \subseteq S$. Como $\sigma : S \to F$ definida por $\sigma(s) = \pi(s)$ é um homomorfismo sobrejetivo temos que

$$\frac{S}{M} \simeq F.$$

Logo, $M \in \operatorname{Max}(S)$. Portanto, pela Proposição 1.29, $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(S)$.

Para provar que φ é sobrejetiva. Seja $S \in \mathcal{F}$ com $R \subseteq S$. Como $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(S)$ pela Proposição 1.29, temos que M é um ideal maximal de S e $S \subseteq A$. Logo, $\pi(S) = \frac{S}{M}$. Assim, existe $F = \frac{S}{M} \in \mathcal{F}^*$ tal que $\varphi(F) = S$, pois é claro que $\pi^{-1}(F) = S$, $F \subseteq B$ e $L \subseteq F$.

Finalmente, φ é injetiva, pois dados $F_1, F_2 \in \mathcal{F}^*$, se $\varphi(F_1) = \varphi(F_2)$, então

$$F_1 = \pi(\pi^{-1}(F_1)) = \pi(\pi^{-1}(F_2)) = F_2.$$

Portanto, φ é bijetiva. $\blacksquare$

Capítulo 2

Domínios de Mori

Neste capítulo os dois resultados principais sobre domínios de Mori são: Primeiro, dados $R \subseteq S$ domínios locais com $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$ e K seu corpo quociente. Então R é um domínio de Mori se, e somente se, S é de Mori. Segundo, neste caso é fundamental que os anéis tenham os mesmos ideais primos, a importância deste fato é dado pelo diagrama

$$\begin{array}{ccc} R = S \times D & \longrightarrow & D \\ \downarrow & & \downarrow \phi \\ S & \xrightarrow{\varphi} & k(S), \end{array}$$

onde S é um domínio local, $k(S) = \frac{S}{M}$ o corpo residual, $\varphi : S \to k(S)$ o homomorfismo canônico, $\phi : D \to k(S)$ um homomorfismo de anéis, R é o pull-back de D e S sobre $k(S)$, isto é, $R = \{(d, s) \in D \times S : \phi(d) = \varphi(s)\} = \varphi^{-1}(D)$ e D é um subcorpo de $k(S)$. Então R é de Mori se, e somente se, S é um de Mori e D é um corpo.

2.1 Ideais Divisoriais

Nosso objetivo nesta seção é estudar pares de domínios R e S com os mesmos ideais primos e $R \subseteq S$. Assim, pela Proposição 1.27, temos que se $R \neq S$, então R e S são locais. Agora, enuciaremos e provaremos alguns resutados que serão necessários para à compreensão deste trabalho.

Lema 2.1 *Sejam R um domínio local, $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal e K seu corpo quociente. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. $(M : M) = (R : M)$;

2. $(R : M)$ *é um anel*;

3. M *não é principal.*

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Nada há a provar.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Suponhamos por absurdo que M seja principal isto é, $M = \langle r \rangle$, para algum $r \in R$. Então

$$\begin{aligned} (R &: M) = \{x \in K : xM \subseteq R\} \\ &= \{x \in K : xr \in R\} \\ &= \{x \in K : x \in Rr^{-1}\} = \langle r^{-1} \rangle \end{aligned}$$

não é um anel o que é uma contradição.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Suponhamos, por absurdo, que $(M : M) \subset (R : M)$. Assim, tomando $x \in (R : M)$ e $x \notin (M : M)$, obtemos que $xM \subseteq R$ e $xM \nsubseteq M$. Logo, $xM = R$, isto é, $M = \langle x^{-1} \rangle$, o que é uma contradição. Portanto, $(M : M) = (R : M)$. ■

Lema 2.2 *Sejam R um domínio local, $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal e K seu corpo quociente. Então M é divisorial se, e somente se, $R \subset (R : M)$.*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $R = (R : M)$. Então,

$$M \subset R = (R : R) = (R : (R : M)).$$

o que é uma contradição.

Reciprocamente, pela Proposição 1.18, temos que

$$M \subseteq (R : (R : M)) \subset (R : R) = R.$$

Portanto, $(R : (R : M)) = M$, pois M é maximal. ■

Proposição 2.1 *Sejam R um domínio local, $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal e K seu corpo quociente. Então M é um ideal divisorial não principal de R se, e somente se, $R \subset (M : M)$.*

Prova. Suponhamos que M seja um ideal divisorial não principal de R, pelo Lema 2.1, temos que $(M : M) = (R : M)$. Portanto, pelo Lema 2.2, temos que $R \subset (M : M)$.

Reciprocamente, se $R \subset (M : M)$ então, M é não principal. Como, em geral $(M : M) \subseteq (R : M)$. Portanto, $R \subset (R : M)$ e pelo Lema 2.2, temos que M é um ideal divisorial de R. ■

Proposição 2.2 *Sejam R e S domínios locais com $R \subset S$, $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal e* $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$. *Então*:

1. *R, S e $T = (M : M)$ possuem o mesmo corpo quociente*;

2. *M é divisorial não principal de R e $T = (R : M)$*;

3. *$(R : S) = (R : T) = M$.*

Prova. 1. Pela Proposição 1.27, temos que $S \subseteq T$ e pelo Lema 1.2, S e T têm o mesmo ideal maximal M. Assim, se K é o corpo quociente de R, então T é um subanel de K. Portanto, K é o corpo quociente de R , S e T.

2. Como, $R \subset S \subseteq T$ pela Proposição 1.27, temos que $R \subset (M : M)$. Portanto, pela Proposição 2.1, temos que M é um ideal divisorial não principal de R. Pelo Lema 2.1, temos que

$$(R : M) = (M : M) = T.$$

3. Se $M = (R : (R : M))$ e $T = (R : M)$ então, $M = (R : T)$. Além disto, como $R \subset S \subseteq T$ temos que

$$M = (R : T) \subseteq (R : S) \subset R$$

Portanto, $M = (R : S)$. ■

Proposição 2.3 *Sejam $R \subseteq S$ domínios locais com* $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$, *$M \neq \{0\}$ é o ideal maximal de R e K o corpo quociente de R. Então cada ideal divisorial não principal de S é um ideal divisorial de R.*

Prova. Se $M = \{0\}$ nada há a provar. Suponhamos que $M \neq \{0\}$. Seja I um ideal divisorial não principal de S. Assim, pela Proposição 1.24, temos que

$$I = \bigcap_{I \subseteq \langle x \rangle} \langle x \rangle,$$

onde $\langle x \rangle$ é um ideal de S. Como I é um ideal não principal de S temos que $I \subset \langle x \rangle$.

Afirmação: Se $I \subseteq \langle x \rangle$ para todo $x \in S$, então $I \subseteq xM$.

De fato, suponhamos, por absurdo, que $I \nsubseteq xM$. Assim, existe $a \in I$ tal que $a \notin xM$. Logo, $x^{-1}a \notin M \subseteq S$, isto é, $a \notin \langle x \rangle$, o que é uma contradição. Portanto,

$$I = \bigcap \{xM : x \in K, I \subseteq xM\}.$$

Pela Proposição 2.2, temos que M é um ideal divisorial de R. Assim, xM é um ideal divisorial de R. Portanto, I é um ideal divisorial de R. ■

Corolário 2.1 *Sejam $R \subseteq S$ domínios locais com* $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$*, $M \neq \{0\}$ é o ideal maximal de R e K o corpo quociente de R. Então um ideal principal de S é divisorial de R se, e somente se, $S = (M : M)$.*

Prova. Seja I um ideal divisorial principal de S, digamos $I = \langle x \rangle$, $x \in S^*$. Então

$$xS = (R : (R : xS)) = x(R : (R : S)) = x(R : M) = x(M : M) = xT.$$

Portanto, $S = T$. A recíproca prova-se de modo análogo. ■

Proposição 2.4 *Sejam $R \subseteq S$ domínios locais com* $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$*, $M \neq \{0\}$ é o ideal maximal de R , S e K o corpo quociente de R e S. Então cada ideal divisorial não principal de R é um ideal fracionário de S pelo menos um dos seguintes tipos:*

1. *xM, com $x \in K^*$;*

2. *Divisorial como ideal de S.*

Prova. Suponhamos que $M \neq \{0\}$ e $R \neq S$. Seja I um ideal divisorial não principal de R.

Afirmação: $I = IS$.

De fato, basta provar que $IS \subseteq I = (R : (R : I))$, isto é, $IS(R : I) \subseteq R$. Dado $y \in (R : I)$, temos que $yI \subseteq R$. Assim, $yI \subseteq M$, pois I é um ideal não principal de R. Portanto, para cada $y \in (R : I)$ temos que

$$ISy \subseteq MS \subset R.$$

Suponhamos que I seja um ideal divisorial não principal de R e $I \neq xM$, onde $x \in K^*$.

Afirmação: $I = (S : (S : I))$.

De fato, como $I \subseteq (S : (S : I))$ basta mostrar que $(S : (S : I)) \subseteq I$. Dado

$$z \in (S : (S : I))$$

Como $R \subseteq S$ e $(R : I) \subseteq (S : I)$ temos que

$$z(R : I) \subseteq z(S : I) \subseteq S.$$

Além disto,

$$I = (R : (R : I)) \neq zM = z(R : S) = (R : z^{-1}S)$$

Logo, pela Proposição 2.2, temos que $(R : I) \neq z^{-1}S$. Portanto,

$$z(R : I) \subset S.$$

Por hipótese, $(R : I)$ e $z(R : I)$ são ideais divisoriais não principais de R. Como $z(R : I) \subseteq S$ temos que $z(R : I)$ é um ideal fracionário de S. Assim,

$$z(R : I) = z(R : I)S \subseteq M.$$

Portanto, $z(R : I) \subseteq R$. ■

Corolário 2.2 *Sejam $R \subseteq S$ domínios locais com $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$, $M \neq \{0\}$ é o ideal maximal de R , S e K o corpo quociente de R e S. Os ideais divisoriais da forma xM de R, onde $x \in K^*$ são divisoriais como ideais de S se, e somente se, M é divisorial como ideal de S. Além disto, pela Proposição 2.1, temos que:*

1. *Se $S \subset T$, então M e cada ideal da forma xM, onde $x \in K^*$, é um ideal divisorial não principal de S;*

2. *Se $S = T$, então M e cada ideal da forma xM, onde $x \in K^*$, é divisorial como ideal de S se, e somente se, é principal como ideal de S.*

Prova. Seja $I = xM$, $x \in K^*$ divisorial de S. Então

$$\begin{aligned} xM &= (S : (S : xM)) \\ &= x(S : (S : M)). \end{aligned}$$

Logo, $M = (S : (S : M))$, isto é, M é um ideal divisorial de S. A recíproca, prova-se de modo análogo. ■

2.2 Domínios de Mori

Nesta seção definimos domínios de Mori, em seguida apresentaremos algumas caracterizações serão necessárias para compreenção deste trabalho.

Um domínio R é de *Mori* se toda seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de R é estacionária.

Exemplo 2.1 *Todo domínio Noetheriano é de Mori.*

Proposição 2.5 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *R é de Mori;*

2. *Para toda seqüência estritamente decrescente $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ideais divisoriais de R temos que*
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{0\};$$

3. *Toda família não vazia de ideais divisoriais de R contendo um ideal integral não nulo de R admite um elemento minimal;*

4. *Toda família não vazia de ideais divisoriais integrais de R admite um elemento maximal;*

5. *Para todo ideal integral I (fracionário) de R, existe um ideal integral J (fracionário) finitamente gerado de R tal que $J \subseteq I$ e $(R : I) = (R : J)$.*

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Suponhamos, por absurdo, que
$$\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \{0\}.$$
Assim, existe $x \in K^*$ tal que $x \in I_n, \forall n \in \mathbb{N}$. Logo,
$$\langle x \rangle \subseteq I_n, \forall n \in \mathbb{N},$$
isto é,
$$R \subseteq x^{-1} I_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$
Logo,
$$R \subseteq x^{-1} I_n \Rightarrow J_n = (R : x^{-1} I_n) \subseteq R, \forall n \in \mathbb{N}.$$
Assim, é fácil verificar que a seqüência de ideais divisoriais integrais $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente. Logo, por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $J_n = J_{n_0}$, para todo $n \geq n_0$. Assim,
$$x^{-1} I_{n_0} = (R : J_{n_0}) = (R : J_{n_0+1})) = x^{-1} I_{n_0+1}.$$
Portanto,
$$I_{n_0} = x^{-1}(x I_{n_0}) = x^{-1} I_{n_0} = x^{-1} I_{n_0+1} = x^{-1}(x I_{n_0+1}) = I_{n_0+1},$$

o que é uma contradição.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Sejam I um ideal integral não nulo de R e

$$\mathcal{F} = \{J : J \text{ é um ideal divisorial de } R, I \subseteq J\}.$$

Como $I \in \mathcal{F}$ temos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Seja $I_1 \in \mathcal{F}$. Então, se I_1 é um elemento minimal acabou, caso contrário, existe $I_2 \in \mathcal{F}$ tal que $I_2 \subset I_1$. Se I_2 é um elemento minimal acabou, caso contrário, existe $I_3 \in \mathcal{F}$ tal que $I_3 \subset I_2 \subset I_1$. Proceguindo assim e pela hipótese, $\mathcal{F}$ contém um elemento minimal, digamos $N = I_k$.

(3. $\Rightarrow$ 4.) Seja

$$\mathcal{F} = \{J : J \text{ é um ideal divisorial integral de } R\}.$$

Como $R \in \mathcal{F}$ temos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Assim, existe $I \in \mathcal{F}$ tal que $I \neq \{0\}$. Portanto,

$$\mathcal{F}' = \{J : J \text{ é um ideal divisorial de } R, I \subseteq J\}$$

é não vazio. Logo, por hipótese, $\mathcal{F}'$ contém um elemento minimal, digamos $N \in \mathcal{F}'$. É claro que

$$M = (R : N)$$

é um elemento maximal de $\mathcal{F}$.

(4. $\Rightarrow$ 5.) Sejam I um ideal integral de R e

$$\mathcal{F} = \{J : J \text{ é um ideal finitamente gerado de } R \text{ e } J \subseteq I\}.$$

Como $\{0\} \in \mathcal{F}$ temos que $\mathcal{F} \neq \emptyset$. Logo, pela hipótese, $\mathcal{F}$ contém um elemento maximal, digamos $M \in \mathcal{F}$.

Afirmação:

$$(R : M) = (R : I).$$

De fato, é claro que

$$(R : I) \subseteq (R : M).$$

Por outro lado, suponhamos, por absurdo, que

$$(R : I) \subset (R : M).$$

Então, existe $x \in (R : M)$ e $x \notin (R : I)$. Se $L = M + \langle x \rangle \subseteq I$, então $L \in \mathcal{F}$, com $M \subset L$, o que é uma contradição.

(5. $\Rightarrow$ 1.) Seja $I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots \subseteq I_n \subseteq \cdots$ uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais. Então

$$I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n,$$

é um ideal integral de R. Logo, por hipótese, existe um ideal integral

$$J = \langle b_1, \ldots, b_k \rangle$$

de R tal que $J \subseteq I$ e

$$(R : I) = (R : J).$$

Como $J \subseteq I$ temos que $b_j \in I_{n_j}$, para todo $j \in \{1, \ldots, k\}$. Tomando $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$, obtemos que $J \subseteq I_m$ e

$$I \subseteq (R : (R : I)) \subseteq (R : (R : I_m)) = I_m,$$

pois

$$(R : I) = (R : J).$$

Logo, $I_n = I_m, \forall n \geq m$. Portanto, R é de Mori. ■

Sejam S um domínio, $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subanéis de S, $R = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$ e K o corpo quociente de R. A famíla $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é dita de *caráter finito* se para todo $x \in R^*$, o conjunto

$$\{\lambda \in \Lambda : x \notin U(R_\lambda)\}$$

é finito.

Proposição 2.6 *Sejam S um domínio e K o seu corpo quociente. Seja $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de caráter finito de subdomínios de S tal que R_λ é de Mori. Então*

$$R = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$$

é de Mori. Em particular, se $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma família finita de domínios de Mori, então

$$R = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda$$

é um domínio de Mori.

Prova. Seja $I \in \mathcal{F}(R)$. Então, pela Proposição 1.26, temos que

$$(R:(R:I)) = \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(R_\lambda:(R:I)R_\lambda).$$

Considerando agora I como um ideal integral de R. Se $x \in I$, então, por hipótese, existe um subconjunto finito Λ' de Λ tal que $xR_\lambda = R_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda - \Lambda'$. É claro que

$$(R_\lambda:(R:I)R_\lambda) = R_\lambda, \forall\lambda \in \Lambda - \Lambda'.$$

Seja $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de R. Então

$$((R_\lambda:(R:I_r)R_\lambda))_{r\in\mathbb{N}}, \forall\lambda \in \Lambda - \Lambda'$$

é uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de R_λ. Além disto, $(R_\lambda : (R : I_k)R_\lambda) = R_\lambda$, para todo $\lambda \in \Lambda - \Lambda'$. Portanto,

$$(R_\lambda:(R:I_m)R_\lambda) = R_\lambda, \forall m \geq k.$$

Como R_λ é de Mori temos que existe $n_\lambda \in \mathbb{N}$, para todo $\lambda \in \Lambda'$, tal que

$$(R_\lambda:(R:I_{n_\lambda})R_\lambda) = (R_\lambda:(R:I_m)R_\lambda), \forall m \geq n_\lambda.$$

Tomando $n = \max\{n_\lambda : \lambda \in \Lambda'\}$, obtemos que

$$(R_\lambda:(R:I_n)R_\lambda) = (R_\lambda:(R:I_m)R_\lambda), \forall m \geq n.$$

Assim,

$$(R_\lambda:(R:I_n)R_\lambda) = (R_\lambda:(R:I_m)R_\lambda), \forall m \geq n.$$

e para todo $m \geq n$

$$\begin{aligned} I_n &= (R:(R:I_n)) \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(R_\lambda:(R:I_n)R_\lambda) \\ &= \bigcap_{\lambda\in\Lambda}(R_\lambda:(R:I_m)R_\lambda) \\ &= (R:(R:I_m)) = I_m. \end{aligned}$$

Portanto, a seqüência $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária. ■

Exemplo 2.2 *Todo domínio de Krull é de Mori. De fato, se R é um domínio de Krull, então*

$$R = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda,$$

onde

$$R_\lambda = \{x \in K : v_\lambda(x) \geq 0\}.$$

Como para cada $x \in K^*$, $v_\lambda(x) \neq 0$, somente para um número finito de índices, temos que

$$(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$$

é uma família de caráter finito. Assim, pela Proposição 2.6, cada R_λ é um domínio de Mori. Portanto, R é um domínio de Mori.

Proposição 2.7 *Sejam R um domínio de Mori e I um ideal integral de R. Então $r^{-1} \in (I : I)$ se, e somente se, $r^{-1} \in U(R)$, para todo $r \in R$.*

Prova. Suponhamos $r^{-1} \in (I : I)$. Então $r^{-n} \in (I : I)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Tomando $t \in I^*$, obtemos que $(\langle r^{-n}t \rangle)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de R. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\langle r^{-n}t \rangle = \langle r^{-n_0}t \rangle$, para todo $n \geq n_0$. Como $r^{-n_0}t \in \langle r^{-n}t \rangle$ temos que existe $x \in R$ tal que $r^{-n_0}t = r^{-n}tx$. Logo, $r^{n_0-n}x = 1$, para todo $n \geq n_0$. Em particular, escolhendo $n = n_0 + 1$ temos que $r^{-1}x = 1$. Portanto, $r^{-1} \in U(R)$. A recíproca é trivial. ■

Corolário 2.3 *Sejam R domínio, K o seu corpo quociente e $R \subseteq S \subseteq K$. Se R e S têm um ideal integral em comum $I \neq \{0\}$ e R é um domínio de Mori, então $U(S) \cap R = U(R)$.*

Prova. Dado $r \in U(S) \cap R$ temos que $r \in R$ e $r \in U(S)$. Como $r^{-1} \in U(S)$ temos, pela Proposição 2.7, que $r^{-1} \in (I : I)$. Logo, $r \in U(R)$. A recíproca é trivial. ■

Teorema 2.1 *Sejam $R \subseteq S$ domínios locais com $\mathrm{Spec}(R) = \mathrm{Spec}(S)$ e K seu corpo quociente. Então R é um domínio de Mori se, e somente se, S é um domínio de Mori.*

Prova. Suponhamos que R seja um domínio de Mori com $M \neq \{0\}$ ideal integral maximal de R e $R \neq S$. Então, pela Proposição 2.3, basta tomar seqüência crescente de ideais divisoriais integrais principais de S. Seja $(x_nS)_{n \in \mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de S, onde $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n = x_{n+1}a_n$, com $a_n \in S$ e $T = (M :$

M). Como $T = (R : M)$ temos, pela Proposição 2.2, que $T = (R : (R : T))$, isto é, T é um ideal divisorial de R. Assim, $x_nT \subseteq MT = M \subset R$ e $(x_nT)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de R. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_nT = x_{n_0}T$, para todo $n \geq n_0$. Como $x_n \in x_{n+1}T$ temos que existe $t \in T$ tal que $x_n = x_{n+1}t$. Logo, $a_n = x_{n+1}^{-1}x_n \in T$, para todo $n \geq n_0$. Pela Proposição 2.7, $a_n = x_{n+1}^{-1}x_n \in U(T)$. Assim,

$$a_n \in U(T) \cap S = (T - M) \cap S = S - M = U(S).$$

Portanto, $(x_nS)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência estacionária.

Reciprocamente, suponhamos que S seja um domínio de Mori. Então, pela Proposição 2.4, basta tomar seqüência crescente de ideais divisoriais integrais principais de R da forma xM, onde $x \in K^*$. Seja $(x_nR)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de R, onde $x_n \in M$, $\forall n \in \mathbb{N}$ e $x_n = x_{n+1}a_n$, com $a_n \in R$. Então, $(x_nS)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de S. Por hipótese, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_nS = x_{n_0}S$, para todo $n \geq n_0$. Logo,

$$a_n = x_{n+1}^{-1}x_n \in U(S) \cap R = (S - M) \cap R = R - M = U(R).$$

Portanto, $(x_nR)_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária. Seja $(x_nM)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de R, onde $x_n \in K^*$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $S = T$, pois se $S \neq T$, então, pelo Corolário 2.2, cada ideal divisorial x_nM é um ideal de S. Além disto, podemos supor que $0 \neq x_n \in M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, pois podemos assumir que x_nM é um ideal integral distinto de M.

Afirmação: Se $x_nM \subset x_{n+1}M$, com $0 \neq x_n, x_{n+1} \in M$ então, $x_nS \subset x_{n+1}S$.
De fato, suponhamos que $x_nm_1 = x_{n+1}m_2$, com $0 \neq m_1, m_2 \in M$. Tomando $h = m_2m_1^{-1}$, obtemos $x_n = x_{n+1}h$. Note que $h \in S$, pois se $h \in K - S$, onde $S = T = (M : M)$, então existe $m \in M$ tal que $hm \notin M$. Logo, $x_nm = x_{n+1}hm \notin x_{n+1}M$, o que é uma contradição. Assim, $x_nM \neq x_{n+1}M$ e $h \notin U(S)$. Portanto, $h \in S - U(S)$ e $x_nS \subset x_{n+1}S$.

■

Corolário 2.4 *Sejam S um domínio de Mori local com corpo quociente K e $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal. Sejam $T = (M : M)$, $k(S) = \frac{S}{M}$ e $B = \frac{T}{M}$. Se $\varphi : T \to B$ é o homomorfismo canônico, então para cada corpo L que é comparável com $k(S)$ e está contido em B, o anel $R = \varphi^{-1}(L)$ é um domínio de Mori.*

Prova. Sejam

$$\mathcal{F} = \{R : S \subseteq R \text{ ou } R \subseteq S \text{ e } \operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(S)\},$$

onde $R \subseteq K$ é um domínio e

$$\mathcal{F}^* = \{L : L \subseteq k(S) \text{ ou } k(S) \subseteq L \text{ e } L \subseteq B\},$$

onde L é um corpo. Pela Proposição 1.30, a função $\theta : \mathcal{F}^* \to \mathcal{F}$ dada por $\theta(L) = \pi^{-1}(L)$ é bijetiva. Além disto, $\varphi^{-1}(L) \subseteq S$ se, e somente se, $L \subseteq k(S)$. Como, $R = \varphi^{-1}(L)$ temos que $\omega : R \to L$ dada por $\omega(r) = \varphi(r)$ é um homomorfismo sobrejetivo. Assim,

$$\frac{R}{M} \simeq L.$$

Como L é corpo temos que $M \in \operatorname{Max}(R)$. Portanto, pela Proposição 1.29, $\operatorname{Spec}(R) = \operatorname{Spec}(S)$. Assim, R e S têm os mesmos ideais primos e $R = \varphi^{-1}(L) \subseteq S$, onde S é um domínio de Mori. Logo, pelo Teorema 2.1, R é um domínio de Mori. ∎

Proposição 2.8 *Sejam S um domínio local com corpo quociente K e $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal. Sejam $k(S) = \frac{S}{M}$, $\varphi : S \to k(S)$ o homomorfismo canônico, D é um subanel de $k(S)$ e $R = \varphi^{-1}(D)$. Então R é um domínio de Mori se, e somente se, S é um domínio de Mori e D um corpo.*

Prova. Suponhamos que R seja de Mori. Como R e S são domínios com um ideal comum $M \neq \{0\}$ e o mesmo corpo quociente K temos, pelo Corolário 2.3, temos que $U(R) = U(S) \cap R$. Não obstante,

$$U(R) = U(S) \cap R = (S - M) \cap R = R - M,$$

de modo que, R é um domínio local com ideal maximal $M \neq \{0\}$ e $D \simeq \frac{R}{M}$ é corpo. Resta provar que S é um domínio de Mori. Pela Proposição 1.28, R e S têm os mesmos ideais primos. Como

$$R = \varphi^{-1}(D) \subseteq S,$$

pelo Teorema 2.1, S é um domínio de Mori.

Reciprocamente, seja S um domínio de Mori e D um subcorpo de $k(S)$. Então $\operatorname{Max}(R) \subseteq \operatorname{Max}(S)$. Logo, pela Proposição 1.29, R e S têm os mesmos ideais primos. Assim, pelo Teorema 2.1, R é um domínio de Mori. ∎

Corolário 2.5 *Seja V um domínio de valorização com ideal maximal $M \neq \{0\}$. Sejam $k(V) = \frac{V}{M}$, $\varphi : V \to k(V)$ o homomorfismo canônico, D é um subanel $k(V)$ e $R = \varphi^{-1}(D)$. Então R é um domínio de Mori se, e somente se, V é um domínio de valorização discreta e D um corpo.*

Prova. Suponhamos que V seja um domínio de valorização discreta e D um corpo. Então, pela Proposição 1.7, temos que V é um domínio de Mori. Logo, pela Proposição 2.8, R é um domínio de Mori.

Reciprocamente, suponhamos que R seja um domínio de Mori. Então pela Proposição 2.3, basta tomar seqüência crescente de ideais divisoriais integrais principais de V. Seja $(x_nV)_{n\in\mathbb{N}}$ uma seqüência crescente de ideais divisoriais integrais de V. Como, R é de Mori, temos que $(x_nV)_{n\in\mathbb{N}}$ é estacionária. Assim, pela Proposição 1.7, V é um anel de valorização discreta. Pelo Corolário 2.3, temos que $D \subset \cup(V) \cap R = \cup(R)$. Portanto, D é um corpo. ■

Teorema 2.2 [4] *Sejam S um anel local com corpo quociente K e $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal. Sejam $k(S) = \frac{S}{M}$, $\varphi : S \to k(S)$ o homomorfismo canônico, D é um subanel de $k(S)$ e $R = \varphi^{-1}(D)$. Então R é um anel Noetheriano se, e somente se, S é um anel Noetheriano e D é um corpo com $[k(S) : D] < \infty$.* ■

Teorema 2.3 [6] *Sejam S um anel local com corpo quociente K e $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal. Sejam $k(S) = \frac{S}{M}$, $\varphi : S \to k(S)$ o homomorfismo canônico, D é um subanel de $k(S)$ e $R = \varphi^{-1}(D)$. Se $\overline{D}$ é o fecho inteiro de D em $k(S)$, então $\overline{R} = \overline{D} \times S$ é o fecho inteiro de R em S.* ■

Exemplos 2.1 *Sejam S um domínio de Mori local com corpo quociente K e $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal. Sejam $k(S) = \frac{S}{M}$, $\varphi : S \to k(S)$ o homomorfismo canônico, k um subcorpo próprio de $k(S)$ e $R = \varphi^{-1}(k)$. Então:*

1. *R é um domínio de Mori não completamente integralmente fechado. Em particular, R é um domínio de Mori que não é de Krull. Com efeito, pela Proposição 2.2, temos que R e S têm o mesmo corpo quociente K. Assim, o fecho completo inteiro de R é o mesmo de S, isto é, $R^- = S^-$.*

   ***Afirmação**: R é um domínio não completamente integralmente. De fato, suponhamos, por absurdo, que $R = R^-$. Assim, $R = S$, o que é uma contradição.*

Portanto, pela Proposição 2.8*, temos que* R *é um domínio de Mori não completamente integralmente fechado. Em particular, pela Proposição* 1.16*, temos que* R *é um domínio de Mori que não é de Krull.*

2. *Se* S *é integralmente fechado e* $\overline{k}$ *é fecho inteiro de* k *em* $k(S)$ *tal que* $k \subset \overline{k} \subset k(S)$*, então* S *não é Noetheriano e pela Proposição* 2.8 *e os Teoremas* 2.2 *e* 2.3*, temos que* R *é um domínio de Mori, não Noetheriano e.não integralmente fechado. Além disso, como* S *é integralmente fechado, temos que* $\overline{R} = \overline{k} \times \overline{S} = \varphi^{-1}(\overline{k})$ *é o fecho inteiro de* R*. Assim, pela Proposição* 2.8 *e os Teoremas* 2.2 *e* 2.3 *temos que* $\overline{R}$ *é um domínio de Mori, não Noetheriano e integralmente fechado. Mas, por* 1.*,* $\overline{R}$ *não é completamente integralmente fechado. Consequentemente,* $\overline{R}$ *não é um domínio de Krull. Por exemplos, sejam* $S = \mathbb{C}[[x_1, x_2, \ldots, x_n]]$ *e* $M = \langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$*. Então:*

   (a) $R = \mathbb{Q}+M$ *é um domínio de Mori, não Noetheriano e não integralmente fechado;*

   (b) $\overline{R} = \overline{\mathbb{Q}} + M$ *é um domínio de Mori, não Noetheriano, integralmente fechado e não de Krull, onde* $\overline{\mathbb{Q}}$ *é fecho inteiro de* $\mathbb{Q}$ *em* $\mathbb{C}$.

Capítulo 3

Séries de Potências sobre Domínios de Mori

Neste capítulo apresentaremos a classe $\mathcal{C}$ de domínio de Mori S tal que $S[[x]]$ também o é, e provaremos a seguinte proposição: sejam R e S domínios locais com $R \subset S$ e $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal. Se $S \in \mathcal{C}$, então $R \in \mathcal{C}$. Finalmente, mostraremos exemplos de domínios de Mori R tal que $R[[x]]$ também o é.

3.1 Anéis de Frações

Nesta seção apresentaremos mais alguns resultados sobre domínios de Mori, que serão necessários para à compreensão deste trabalho.

Proposição 3.1 *Sejam R um domínio de Mori e A um sistema multiplicativo de R. Então $A^{-1}R$ é um domínio de Mori. Se I é um ideal divisorial de R. Então $I(A^{-1}R)$ é um ideal divisorial de $A^{-1}R$. Em particular, se M é um ideal divisorial integral maximal de R, então R_M também é um domínio de Mori.*

Prova. Seja J um ideal divisorial integral de $A^{-1}R$. Então é fácil verificar que

$$\begin{aligned} I &= \{x \in R : \frac{x}{a} \in J \text{ para algum } a \in A\} \\ &= J \cap R \end{aligned}$$

é um ideal integral de R. Como R é de Mori temos que existe um ideal $L \in \mathcal{F}(R)$ finitamente gerado tal que $L \subseteq I$ e $(R : I) = (R : L)$. Logo, pelas Proposições 1.18 e 1.21, temos que

$$\begin{aligned}
(R:(R:I)) &\subseteq (R:I)(A^{-1}R)\cap R\\
&= (R:L)(A^{-1}R)\cap R\\
&= (A^{-1}R:LA^{-1}R)\cap R\\
&= (A^{-1}R:(A^{-1}R:L))\cap R\\
&\subseteq (A^{-1}R:(A^{-1}R:J)\cap R\\
&= J\cap R\\
&= I.
\end{aligned}$$

Logo, I é um ideal divisorial de $A^{-1}R$. Agora, sejam J_1 e J_2 dois ideais divisoriais de $A^{-1}R$, com $J_1 \subset J_2$. Então $I_1 \subset I_2$. De fato. Suponhamos, por absurdo, que $I_1 = I_2$ e escolhendo $\frac{x}{a} \in J_2$, com $\frac{x}{a} \notin J_1$. Então $x \in I_2 = I_1$. Assim, existe $a_1 \in A$ tal que $\frac{x}{a_1} \in J_1$. Logo,

$$\frac{x}{a} = \frac{a_1}{a}\frac{x}{a_1} \in J_1,$$

o que é uma contradição. Assim, qualquer cadeia crescente de ideais divisoriais integral de $A^{-1}R$ dar origem a uma cadeia crescente de ideais divisoriais integral de R. Portanto, $A^{-1}R$ é Mori.

Finalmente, se I é um ideal divisorial de R, então $L = (R:I) \in \mathcal{F}(R)$. Logo, pela Proposição 2.5, temos que existe um ideal J finitamente gerado de R tal que $J \subseteq L$ e $(R:L) = (R:J)$. Logo, pela Proposição 1.21, temos que

$$\begin{aligned}
I(A^{-1}R) &= (R:J)A^{-1}R\\
&= (A^{-1}R:J(A^{-1}R))\\
&\supseteq (A^{-1}R:L(A^{-1}R))\\
&= (A^{-1}R:(R:I)A^{-1}R)\\
&\supseteq (A^{-1}R:(A^{-1}R:(R:(R:I))A^{-1}R))\\
&= (A^{-1}R:(A^{-1}R:I(A^{-1}R))).
\end{aligned}$$

Assim, $(A^{-1}R:(A^{-1}R:I(A^{-1}R))) \subseteq I(A^{-1}R)$. Portanto, $I(A^{-1}R)$ é um ideal divisorial de $A^{-1}R$. ■

Proposição 3.2 *Sejam R um domínio e K seu corpo quociente. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1. *R é um domínio de Mori;*

2. *A família*

$$\mathcal{F} = (R_M)_{M\in \mathrm{Max}(R)},$$

tem caráter finito, cada R_M *é um domínio de Mori e*

$$R = \bigcap_{M\in \mathcal{F}} R_M;$$

3. *Existe uma família* $(R_P)_{P\in \mathrm{Spec}(R)}$ *de caráter finito tal que* R_P *é um domínio de Mori e*

$$R = \bigcap_{P\in \mathrm{Spec}(R)} R_P.$$

Prova. (1. $\Rightarrow$ 2.) Suponhamos que R seja um domínio de Mori e $M \in \mathcal{F}$. Pela Proposição 3.1, R_M é um domínio de Mori.

Afirmação: $R = \bigcap R_M$

De fato, seja $x \in \bigcap R_M$ com $x \neq 0$. Então, por hipótese, como

$$M = \bigcap_{M\subseteq \langle x\rangle} \langle x\rangle = R \cap \langle x^{-1}\rangle.$$

Assim, $I_x = R \cap \langle x^{-1}\rangle$ é um ideal divisorial de R. Se $I_x \subset R$, então existe $M_0 \in \mathcal{F}$ tal que $I_x \subseteq M_0$. Como $x \in R_M$, para todo $M \in \mathcal{F}$ temos que $xR_{M_0} \subseteq R_{M_0}$, isto é, $R_{M_0} \subseteq x^{-1}R_{M_0}$. Logo,

$$R_{M_0} \subseteq R_{M_0} \cap x^{-1}R_{M_0} = (R \cap \langle x^{-1}\rangle)R_{M_0} = I_xR_{M_0}.$$

Assim,

$$R_{M_0} \subseteq I_xR_{M_0} \subseteq M_0R_{M_0} \subset R_{M_0}$$

o que é uma contradição. Logo, $I_x = R$, isto é, $R \cap \langle x^{-1}\rangle = R$. Assim, $1 \in \langle x^{-1}\rangle$. Portanto, $x \in R$.

Provaremos agora que $\mathcal{F}$ tem caráter finito. Seja $x \in R^*$, Então

$$X = \{M \in \mathcal{F} : x \in M\}$$

é finito. De fato, suponhamos, por absurdo, que X seja infinito. Então

$$x \in \cdots \subseteq (M_k \cap \cdots \cap M_1) \subseteq \cdots \subseteq (M_2 \cap M_1) \subseteq M_1$$

para cada $M_i \in \mathcal{F}$. Como R é um domínio de Mori temos que

$$\cdots \subseteq (M_k \cap \cdots \cap M_1) \subseteq \cdots \subseteq (M_2 \cap M_1) \subseteq M_1$$

é uma sequência estacionária, pois

$$x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \Rightarrow \bigcap_{k=1}^{\infty} I_k \neq \{0\},$$

onde $I_k = \bigcap_{i=1}^{k} M_i$. Logo, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$M_1 \cap \cdots \cap M_n = M_1 \cap \cdots \cap M_{n_0}, \forall n \geq n_0.$$

Note que,

$$M_1 \cdots M_n \subseteq M_1 \cap \cdots \cap M_n = M_1 \cap \cdots \cap M_{n+1}.$$

Assim, $M_1 \cdots M_n \subseteq M_{n+1}$. Como M_i são ideais primos temos que existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $M_i \subset M_{n+1}$, o que é uma contradição.

(2. $\Rightarrow$ 3.) Nada há a provar.

(3. $\Rightarrow$ 1.) Segue-se da Proposição 2.6. ■

3.2 Quando $S[[x]]$ é um Domínio de Mori

Nesta seção denotaremos por $\mathcal{C}$ a classe de domínio de Mori S tal que $S[[x]]$ também é um domínio de Mori.

Afirmação:$\mathcal{C} \neq \emptyset$

De fato, se R é Noetheriano então $R[[x]]$ é Noetheriano.

Proposição 3.3 *Sejam T um domínio de Mori e $(R_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma família de subanéis de T. Se esta família possui caráter finito e cada $R_\lambda \in \mathcal{C}$, então $R = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda \in \mathcal{C}$.*

Prova. Seja K o corpo quociente de R. Sabemos, pela Proposição 2.6, temos que R é um domínio de Mori. Assim, resta mostrar que $R[[x]]$ é um domínio de Mori. Por hipótese, cada domínio $R_\lambda[[x]]$ é um domínio de Mori. Como $P = \langle x \rangle$ é um ideal primo de $R_\lambda[[x]]$ temos que

$$R_\lambda[[x]]_P = R_\lambda[[x]][\frac{1}{x}]$$

e pela Proposição 3.1, $R_\lambda[[x]]_P$ é um domínio de Mori. Além disto,

$$R[[x]]_P = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} R_\lambda[[x]]_P.$$

Afirmação: A família $(R_\lambda[[x]]_P)_{\lambda \in \Lambda}$ tem caráter finito.

De fato, seja $f \in R[[x]]_P^*$, digamos $f = x^{-m}g$ com $m \geq 0$, $g = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in R[[x]]$ e $a_0 \neq 0$. Se $f \notin U(R_\lambda[[x]]_P)$, então $g \notin U(\ R_\lambda[[x]])$. Assim, $a_0 \notin U(R_\lambda)$. Portanto,

$$\lambda \in \{\lambda' \in \Lambda : a_0 \notin U(R_{\lambda'})\}$$

é finito, pois $(R_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ tem caráter finito. Logo, pela Proposição 2.6, temos que $R[[x]]_P$ é um domínio de Mori. Assim, pela Proposição 1.11 $K[[x]]$ é um domínio Noetheriano, temos que $K[[x]]$ é um domínio de Mori. Portanto,

$$R[[x]] = K[[x]] \cap R[[x]]_P$$

é um domínio de Mori. ■

Corolário 3.1 *Se existe um domínio de Mori não pertencente à classe $\mathcal{C}$. Então existe um domínio de Mori local $R \notin \mathcal{C}$ tal que o ideal maximal de R é divisorial.*

Prova. Seja R um domínio de Mori tal que $R \notin \mathcal{C}$ e

$$\mathcal{M} = \{M \text{ é um ideal divisorial integral maximal de } R\}.$$

É claro que $\mathcal{M} \neq \emptyset$. Logo, pela Proposição 3.2, temos que R_M é um domínio de Mori, a família $(R_M)_{M\in\mathcal{M}}$ tem caráter finito e

$$R = \bigcap_{M\in\mathcal{M}} R_M.$$

Se cada $R_M \in \mathcal{C}$, então, pela Proposição 3.3, $R \in \mathcal{C}$, o que é uma contradição. Assim, existe $M \in \mathcal{M}$ tal que $R_M \notin \mathcal{C}$. Note que,

$$\begin{aligned} R_M M &= \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j y_j : y_j \in M \text{ e } x_j \in R_M\right\} \\ &= \left\{\sum_{j=1}^{n} x_j y_j : y_j \in M \text{ e } x_j = \frac{r_j}{s_j},\ r_j, s_j \in R\ , s_j \notin M\right\} \\ &= \left\{\frac{r}{s} : r \in M \text{ e } s \notin M\right\} \\ &= M_M \end{aligned}$$

é um único ideal maximal de R_M. Logo, pela Proposição 3.1, M_M é um ideal divisorial de R_M. ■

Corolário 3.2 *Sejam $R_1, \dots, R_n$ subdomínios de um domínio S. Se $R_i \in \mathcal{C}$, para cada $i = 1, \dots, n$, então*

$$R = R_1 \cap \cdots \cap R_n \in \mathcal{C}.$$

$\blacksquare$

Proposição 3.4 *Sejam R e S domínios locais com $R \subset S$ e $M \neq \{0\}$ seu ideal maximal. Se $S \in \mathcal{C}$, então $R \in \mathcal{C}$.*

Prova. Como S é um domínio de Mori, pelo Teorema 2.1, temos que R também o é. Assim, basta mostrar que $R[[x]]$ é de Mori. É claro que $M[[x]]$ é um ideal primo de $R[[x]]$ e $S[[x]]$. Então $R[[x]]_{M[[x]]}$ tem um único ideal maximal

$$\begin{aligned}
\widehat{M} &= R[[x]]_{M[[x]]}\, M[[x]] \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j g_j : f_j \in M[[x]] \text{ e } g_j \in R[[x]]_{M[[x]]} \right\} \\
&= \left\{ \sum_{j=1}^{n} f_j g_j : f_j \in M[[x]] \text{ e } g_j = \frac{h_i}{r_i}, h_i, r_i \in R[[x]], r_i \notin M[[x]] \right\} \\
&= \left\{ \frac{f}{g} : f \in M[[x]] \text{ e } g \notin M[[x]] \right\} \\
&= M[[x]]_{M[[x]]}.
\end{aligned}$$

Além disso, $R[[x]]_{M[[x]]}$ é um subdomínio de $S[[x]]_{M[[x]]}$ e $\widehat{M}$ é um ideal de $S[[x]]_{M[[x]]}$.

Afirmação: $\widehat{M}$ é um ideal maximal de $S[[x]]_{M[[x]]}$.

De fato. Seja Q é um ideal primo de $S[[x]]_{M[[x]]}$ tal que $\widehat{M} \subseteq Q$. Então $Q = P_{M[[x]]}$, onde P é um ideal primo de $S[[x]]$ com $P \cap (R[[x]] - M[[x]]) = \emptyset$ e $M[[x]] \subseteq P$. Se $M[[x]] \subset P$, então existe $f \in P$ tal que $f \notin M[[x]]$. Assim, $f = g + x^n h$, com $n \geq 0$, $g \in M[x] \subseteq M[[x]]$, $\partial g < n$, $h = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \in S[[x]]$ e $a_0 \notin M$. Então $h \in U(S[[x]])$, isto é, $h^{-1} \in S[[x]]$. Logo,

$$x^n = h^{-1} f - h^{-1} g \in S[[x]]P + S[[x]]M[[x]] \subseteq P.$$

Como $x^n \in R[[x]] - M[[x]]$ temos que $x^n \in P \cap (R[[x]] - M[[x]]) = \emptyset$, o que é uma contradição. Portanto, $P = M[[x]]$ e $Q = \widehat{M}$ é um ideal maximal de $S[[x]]_{M[[x]]}$. Logo, pela Proposição 1.27, temos que $R[[x]]_{M[[x]]}$ e $S[[x]]_{M[[x]]}$ são domínios locais. Como $S[[x]]_{M[[x]]}$ é um domínio de Mori, pelo Teorema 2.1, temos que $R[[x]]_{M[[x]]}$ é um domínio de Mori.

Afirmação: $S[[x]] \cap R[[x]]_{M[[x]]} = R[[x]]$.

De fato, seja $f \in S[[x]] \cap R[[x]]_{M[[x]]}$. Então $f \in S[[x]]$ e $f = \frac{g}{h}$, com $g,\ h \in R[[x]]$ e $h \notin M[[x]]$. Suponhamos, por absurdo, que $f \notin R[[x]]$. Então $f = q + x^m t$, com $q \in R[x]$, $m \geq 0$, $t = \sum_{i=0}^{\infty} b_i x^i \in S[[x]]$ e $b_0 \notin R$. Assim, $hx^m t = g - hq \in R[[x]]$ e $b_0 \notin R$. Seja $h = h_1 + x^n s$, com $n \geq 0$, $h_1 \in M[x] \subseteq M[[x]]$, $\partial h_1 < n$, $s = \sum_{i=0}^{\infty} c_i x^i \in R[[x]]$ e $c_0 \notin M$. Como $hx^m t \in R[[x]]$ e $h_1 \in M[[x]]$ temos que

$$\begin{aligned} x^{m+n} ts &= (x^n s)(x^m t) \\ &= (h - h_1)(x^m t) \\ &= hx^m t - h_1 x^m t \in R[[x]]. \end{aligned}$$

Assim, $b_0 c_0 \in R$. Como, $c_0 \in U(R)$ temos que $b_0 \in R$, o que é uma contradição. Portanto, $R[[x]]$ é um domínio de Mori. ■

Exemplo 3.1 *Sejam K um corpo e D um subcorpo de K. Então, pela Proposição* 1.11, *$S = D[[z]]$ é domínio de ideais principais e, pelo Corolário* 1.2, *S é um local com ideal maximal $M = zS = \langle z \rangle$. Sejam $K = \frac{S}{M}$, $\varphi : S \rightarrow K$ o homomorfismo canônico e $R = \varphi^{-1}(D) = K+\ M$. Como R é um domínio local com ideal maximal M temos, pela Proposição* 2.8, *que R é um domínio de Mori. É claro que $S[[x]]$ é um domínio de Mori. Assim, pela Proposição* 3.4, *$R[[x]]$ é um domínio de Mori. Mais geralmente, temos o seguinte corolário.*

Corolário 3.3 *Se $R = \varphi^{-1}(D)$ e $S \in \mathcal{C}$, então $R \in \mathcal{C}$.*

Prova. Seja $\varphi : S \longrightarrow k(S) = \dfrac{S}{M}$, onde M é o único ideal maximal de S. Seja D um subcorpo de $k(S)$. Portanto, pela Proposição 2.8, $R = \varphi^{-1}(D)$ é um domínio de Mori e M o único ideal maximal. Como $S \in \mathcal{C}$, pela Proposição 3.4, $R \in \mathcal{C}$. ■

Referências Bibliográficas

[1] Atiyah, M. F. and MacDonald, I. G., *Introduction to Commutative Algebra*, Addison Wesley, 1969.

[2] Barucci, V., "On a Class of Mori Domains," Comm. Alg. 11 (1983), 1989-2001.

[3] Brewer, J. W., *Power Series over Commutative Rings,* Marcel Dekker, Inc., New York, 1981.

[4] Brewer, J. W. and Rutter, E. A., "$D + M$ constructions with general overrings," Michigan Math. *J.* 23, (1976), 33-42.

[5] Dessagnes, N., "Intersections d'anneaux de Mori-Exemples," C.R. Math. Rep. Acad. Sci.Canada 7 (1985), 355-360.

[6] Fontana, M., "Topologically defined classes of commutative rings," Ann. Math. Pura Appl.123, (1980), 331-355.

[7] Garcia, A. e Lequain, Y., *Álgebra: Um curso de introdução*, Projeto Euclides-IMPA. Rio de Janeiro, 1988.

[8] Gilmer, R., *Multiplicative Ideal Theory*, Marcel Dekker, Inc., New York, 1972.

[9] Houston, E. G., Lucas, T. G. and Viswanathan, T. M., "Primary Decomposition of Divisorial Ideals in Mori Domains," J. Alg. 117, (1988), 327-342.

[10] Inglessis, H., "Exemples d'anneaux de Mori," C.R. Acad. Sc. Paris, 290, série A, (1980), 585-586.

[11] Larsen, M. D. and McCarthy, P. J., *Multiplicative Theory of Ideals*, Academic Press, New York, 1971.

[12] Querré, J., *Cours d'Algèbre,* Masson Paris 1976.

[13] Raillard, N., "Sur les anneaux de Mori," C. R. Acad. Sc. Paris 280, série A, (1985), 1571-1573.

[14] Ribenboim, P., "Power serie over Mori domains," Comm. Alg. 16, (1988), 1017-1026.