EDEs regressivas e a conexão com EDPs

Gerador de uma difusão de Itô

- Uma difusão de Itô é uma solução da EDE estocástica

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

Gerador de uma difusão de Itô

- Uma difusão de Itô é uma solução da EDE estocástica

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

- Notamos que a solução dessa EDE é um processo estocástico contínuo $X : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $X(t, \omega)$. Ele pode ser considerado como uma variável aleatória

  $\Omega \to \mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$, $\omega \mapsto X(\,\cdot\,, \omega)$,

  porque $X(\,\cdot\,, \omega) : t \mapsto X(t, \omega)$ é uma função contínua com $X(0, \omega) = x$

Gerador de uma difusão de Itô

- Uma difusão de Itô é uma solução da EDE estocástica

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

- Notamos que a solução dessa EDE é um processo estocástico contínuo $X : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $X(t, \omega)$. Ele pode ser considerado como uma variável aleatória

  $\Omega \to \mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$, $\omega \mapsto X(\cdot, \omega)$,

  porque $X(\cdot, \omega) : t \mapsto X(t, \omega)$ é uma função contínua com $X(0, \omega) = x$

- Seja $P^x = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ a distribuição da variavel aleatória $X : \Omega \to \mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$.

Gerador de uma difusão de Itô

- Uma difusão de Itô é uma solução da EDE estocástica

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$$

- Notamos que a solução dessa EDE é um processo estocástico contínuo $X : [0, T] \times \Omega \to \mathbb{R}^n$, $X(t, \omega)$. Ele pode ser considerado como uma variável aleatória

  $\Omega \to \mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$, $\omega \mapsto X(\,\cdot\,, \omega)$,

  porque $X(\,\cdot\,, \omega) : t \mapsto X(t, \omega)$ é uma função contínua com $X(0, \omega) = x$

- Seja $P^x = \mathbb{P} \circ X^{-1}$ a distribuição da variavel aleatória $X : \Omega \to \mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$.

- Notamos que X^{-1} é uma aplicação $\mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n) \to \Omega$. Assim, P^x é uma medida em $\mathrm{C}([0, T], \mathbb{R}^n)$. O índece '$x$' significa que $X(0, \omega) = x$.

Gerador de uma difusão de Itô

- Seja E^x experança em relação a P^x, ou seja

$$E^x[\Phi] = \int_{\mathrm{C}([0,T],\mathbb{R}^n)} \Phi(y) P^x(dy)$$

Gerador de uma difusão de Itô

- Seja E^x experança em relação a P^x, ou seja

$$E^x[\Phi] = \int_{\mathrm{C}([0,T],\mathbb{R}^n)} \Phi(y) P^x(dy)$$

- Definimos

$$(\mathcal{A}f)(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{E^x[f(X_t)] - f(x)}{t}.$$

Gerador de uma difusão de Itô

- Seja E^x experança em relação a P^x, ou seja

$$E^x[\Phi] = \int_{\mathrm{C}([0,T],\mathbb{R}^n)} \Phi(y) P^x(dy)$$

- Definimos

$$(\mathcal{A}f)(x) = \lim_{t \to 0+} \frac{E^x[f(X_t)] - f(x)}{t}.$$

Teorema

Seja X_t uma difusão de Itô, ou seja $X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s$. Seja $f \in \mathrm{C}_b^2(\mathbb{R}^n)$. Então, $f \in D(\mathcal{A})$ e o gerador $\mathcal{A}$ de X_t tem a seguinte representação:

$$(\mathcal{A}f)(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (\sigma\sigma^\top)_{ij}(x) \partial^2_{x_i x_j} f(x) + \sum_{i=1}^{n} b_i(x) \partial_{x_i} f(x).$$

Teorema da representação martingale

- O processo estocástico $X_t = \int_0^t v(s,\omega)dB_s$ é sempre um martingale:

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t v(r,\omega)dB_r|\mathcal{F}_s\Big] = \int_0^s v(r,\omega)dB_r \quad s < t.$$

Teorema da representação martingale

- O processo estocástico $X_t = \int_0^t v(s,\omega)dB_s$ é sempre um martingale:

$$\mathbb{E}\Big[\int_0^t v(r,\omega)dB_r|\mathcal{F}_s\Big] = \int_0^s v(r,\omega)dB_r \quad s < t.$$

Teorema

Seja $B_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^n)$ um movimento browniano n-dimensional. Vamos supor que M_t é um martingale em relação à filtração $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s^i, i = 1, \ldots, n, 0 \leqslant s \leqslant t\}$ (ou seja $\mathbb{E}|M_t| < \infty$ e $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ para todos $s < t$). Então, existe um processo estocástico $v(t,\omega)$ do classe $L_2(\Omega \times [0,t], \mathbb{P} \otimes \lambda)$, adaptado em relação a $\mathcal{F}_t$ e tal que

$$M_t(\omega) = \mathbb{E}[M_0] + \int_0^t v(s,\omega)dB_s.$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Fixamos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e uma filtração $\mathcal{F}_t$ gerado por um movimento browniano d-demensional B_t, ou seja, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$.

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Fixamos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e uma filtração $\mathcal{F}_t$ gerado por um movimento browniano d-demensional B_t, ou seja, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$.
- Consideramos a equação regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad \xi \text{ é } \mathcal{F}_T\text{-mensurável}$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Fixamos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e uma filtração $\mathcal{F}_t$ gerado por um movimento browniano d-demensional B_t, ou seja, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$.
- Consideramos a equação regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad \xi \text{ é } \mathcal{F}_T\text{-mensurável}$$

- A solução é um par (Y_t, Z_t) de processos $\mathcal{F}_t$-adaptados com valores um $\mathbb{R}^Q \times (\mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^d)$.

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Fixamos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e uma filtração $\mathcal{F}_t$ gerado por um movimento browniano d-demensional B_t, ou seja, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$.
- Consideramos a equação regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad \xi \text{ é } \mathcal{F}_T\text{-mensurável}$$

- A solução é um par (Y_t, Z_t) de processos $\mathcal{F}_t$-adaptados com valores um $\mathbb{R}^Q \times (\mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^d)$.
- A versão simplificada: $g = g(s)$.

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Fixamos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e uma filtração $\mathcal{F}_t$ gerado por um movimento browniano d-demensional B_t, ou seja, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$.
- Consideramos a equação regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad \xi \text{ é } \mathcal{F}_T\text{-mensurável}$$

- A solução é um par (Y_t, Z_t) de processos $\mathcal{F}_t$-adaptados com valores um $\mathbb{R}^Q \times (\mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^d)$.
- A versão simplificada: $g = g(s)$.
- Nesse caso, $Y_t = \mathbb{E}[\xi + \int_t^T g(s)ds|\mathcal{F}_t]$ porque $\mathbb{E}\Big[\int_t^T Z_s dB_s|\mathcal{F}_t\Big] = \int_t^t Z_s dB_s = 0$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Fixamos um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, e uma filtração $\mathcal{F}_t$ gerado por um movimento browniano d-demensional B_t, ou seja, $\mathcal{F}_t = \sigma\{B_s, 0 \leqslant s \leqslant t\}$.
- Consideramos a equação regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s, Y_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s, \quad \xi \text{ é } \mathcal{F}_T\text{-mensurável}$$

- A solução é um par (Y_t, Z_t) de processos $\mathcal{F}_t$-adaptados com valores um $\mathbb{R}^Q \times (\mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^d)$.
- A versão simplificada: $g = g(s)$.
- Nesse caso, $Y_t = \mathbb{E}[\xi + \int_t^T g(s)ds | \mathcal{F}_t]$ porque $\mathbb{E}\left[\int_t^T Z_s dB_s | \mathcal{F}_t\right] = \int_t^t Z_s dB_s = 0$
- $Y_t + \int_0^t g(s)ds = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T g(s)ds | \mathcal{F}_t\right]$ é um martingale pela propriedade $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\Phi | \mathcal{F}_t] | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\Phi | \mathcal{F}_s]$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Pelo teorema da representação martingale, existe Z_t tal que $Y_t + \int_0^t g(s)ds = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T g(s)ds|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[Y_0] + \int_0^t Z_s dB_s$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Pelo teorema da representação martingale, existe Z_t tal que $Y_t + \int_0^t g(s)ds = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T g(s)ds|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[Y_0] + \int_0^t Z_s dB_s$
- Avaliando em ponto $t = T$, obtemos $\xi + \int_0^T g(s)ds = \mathbb{E}[Y_0] + \int_0^T Z_s dB_s$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Pelo teorema da representação martingale, existe Z_t tal que $Y_t + \int_0^t g(s)ds = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T g(s)ds|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[Y_0] + \int_0^t Z_s dB_s$
- Avaliando em ponto $t = T$, obtemos $\xi + \int_0^T g(s)ds = \mathbb{E}[Y_0] + \int_0^T Z_s dB_s$
- Essas equações implicam que $Y_t = \xi + \int_t^T g(s)ds - \int_t^T Z_s dB_s$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Pelo teorema da representação martingale, existe Z_t tal que $Y_t + \int_0^t g(s)ds = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T g(s)ds|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[Y_0] + \int_0^t Z_s dB_s$
- Avaliando em ponto $t = T$, obtemos $\xi + \int_0^T g(s)ds = \mathbb{E}[Y_0] + \int_0^T Z_s dB_s$
- Essas equações implicam que $Y_t = \xi + \int_t^T g(s)ds - \int_t^T Z_s dB_s$
- Assim, provamos a existência do único par Y_t e Z_t que satisfaz a EDE regressiva.

EDEs regressivas (Backward SDEs)

- Pelo teorema da representação martingale, existe Z_t tal que $Y_t + \int_0^t g(s)ds = \mathbb{E}\left[\xi + \int_0^T g(s)ds|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}[Y_0] + \int_0^t Z_s dB_s$
- Avaliando em ponto $t = T$, obtemos $\xi + \int_0^T g(s)ds = \mathbb{E}[Y_0] + \int_0^T Z_s dB_s$
- Essas equações implicam que $Y_t = \xi + \int_t^T g(s)ds - \int_t^T Z_s dB_s$
- Assim, provamos a existência do único par Y_t e Z_t que satisfaz a EDE regressiva.
- No caso geral temos um processo iterativo:

$$Y_t^{(i+1)} = \xi + \int_t^T g(s, Y_s^{(i)}, Z_s^{(i)})ds - \int_t^T Z_s^{(i+1)} dB_s$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Teorema

Vamos supor que $g(t,y,z)$ é uma função com as propriedades

$$|g(t,y,z)| \leqslant K(1+|y|+|z|), \quad \textit{crescemento linear}$$

$$|g(t,y_1,z_1) - g(t,y_2,z_2)| \leqslant C(|y_1-y_2|+|z_1-z_2|), \quad \textit{função Lipschitz.}$$

Então, a EDE regressiva

$$Y_t = \xi + \int_t^T g(s,Y_s,Z_s)ds - \int_t^T Z_s dB_s$$

possui uma solução (Y_t, Z_t), que é única em relação à norma

$$\|(Y_t,Z_t)\|^2 = \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|Y_t|^2 + \int_0^T \mathbb{E}|Z_s|^2 ds.$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia da demonstração

- Aplicando a formula de Itô a $|Y_t^1 - Y_t^2|^2$, obtemos

$$|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \int_t^T |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds$$

$$= \int_t^T (g(s, Y_s^1, Z_s^1) - g(t, Y_s^2, Z_s^2), Y_s^1 - Y_s^2) ds - \int_t^T ((Z_s^1 - Z_s^2) dB_s, Y_s^1 - Y_s^2)$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia da demonstração

- Aplicando a formula de Itô a $|Y_t^1 - Y_t^2|^2$, obtemos

$$|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \int_t^T |Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds$$

$$= \int_t^T (g(s, Y_s^1, Z_s^1) - g(t, Y_s^2, Z_s^2), Y_s^1 - Y_s^2) ds - \int_t^T ((Z_s^1 - Z_s^2) dB_s, Y_s^1 - Y_s^2)$$

- Daqui,

$$\mathbb{E}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 + \int_t^T \mathbb{E}|Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds$$

$$\leqslant K_1 E \int_t^T |Y_s^1 - Y_s^2|^2 ds + K_2 \mathbb{E} \int_t^T |Y_s^1 - Y_s^2||Z_s^1 - Z_s^2| ds$$

$$\leqslant K_1 \int_t^T \mathbb{E}|Y_s^1 - Y_s^2|^2 ds + K_2 \int_t^T \mathbb{E}\sqrt{K_2}|Y_s^1 - Y_s^2| \frac{1}{\sqrt{K_2}} |Z_s^1 - Z_s^2| ds$$

$$\leqslant \tilde{K}_1 \int_t^T \mathbb{E}|Y_s^1 - Y_s^2|^2 ds + \frac{1}{2} \int_t^T \mathbb{E}|Z_s^1 - Z_s^2|^2 ds.$$

- Temos

$$\mathbb{E}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 \leqslant K \int_t^T \mathbb{E}|Y_s^1 - Y_s^2|^2 ds$$

- Temos

$$\mathbb{E}|Y_t^1 - Y_t^2|^2 \leqslant K \int_t^T \mathbb{E}|Y_s^1 - Y_s^2|^2 ds$$

- Lembramos que essa desigualdade permita aplicar o mesmo metodo, de ponto fixo, como para EDEs tradicionais; envolvendo a constante

$$\frac{K^n T^n}{n!} < 1.$$

- Vamos supor $\xi = h(B_T)$ e consideramos o seguinte problema do valor final para uma EDP:

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t,x) + \frac{1}{2}\Delta\theta(t,x) + g\big(t, \theta(t,x), \nabla\theta(t,x)\big) = 0 \\ \theta(T,x) = h(x) \end{cases}$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Vamos supor $\xi = h(B_T)$ e consideramos o seguinte problema do valor final para uma EDP:

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t,x) + \frac{1}{2}\Delta\theta(t,x) + g\big(t, \theta(t,x), \nabla\theta(t,x)\big) = 0 \\ \theta(T,x) = h(x) \end{cases}$$

- Vamos supor que o problema acima tem uma solução $\theta(t,x)$.

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Vamos supor $\xi = h(B_T)$ e consideramos o seguinte problema do valor final para uma EDP:

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t,x) + \frac{1}{2}\Delta\theta(t,x) + g\big(t, \theta(t,x), \nabla\theta(t,x)\big) = 0 \\ \theta(T,x) = h(x) \end{cases}$$

- Vamos supor que o problema acima tem uma solução $\theta(t,x)$.
- Aplicando a fórmula de Itô a $\theta(t, B_t)$ obtemos

$$\theta(t, B_t) = h(B_T) - \int_t^T \Big(\partial_s\theta(s, B_s) + \frac{1}{2}\Delta\theta(s, B_s)\Big)\, ds - \int_t^T \nabla\theta(s, B_s)\, dB_s$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Vamos supor $\xi = h(B_T)$ e consideramos o seguinte problema do valor final para uma EDP:

$$\begin{cases} \partial_t \theta(t,x) + \frac{1}{2}\Delta\theta(t,x) + g\big(t, \theta(t,x), \nabla\theta(t,x)\big) = 0 \\ \theta(T,x) = h(x) \end{cases}$$

- Vamos supor que o problema acima tem uma solução $\theta(t,x)$.
- Aplicando a fórmula de Itô a $\theta(t,B_t)$ obtemos

$$\theta(t,B_t) = h(B_T) - \int_t^T \Big(\partial_s\theta(s,B_s) + \frac{1}{2}\Delta\theta(s,B_s)\Big)\,ds - \int_t^T \nabla\theta(s,B_s)\,dB_s$$

- Ou seja,

$$\theta(t,B_t) = h(B_T) - \int_t^T g(s, \theta(s,B_s), \nabla\theta(s,B_s))\,ds - \int_t^T \nabla\theta(s,B_s)\,dB_s$$

- Isso implica que a solução da EDE regressiva toma a forma

$$Y_t = \theta(t, B_t), \qquad Z_t = \nabla\theta(t, B_t)$$

- Isso implica que a solução da EDE regressiva toma a forma

$$Y_t = \theta(t, B_t), \qquad Z_t = \nabla\theta(t, B_t)$$

- Por outro lado, se $(Y_t^{\tau,x}, Z_t^{\tau,x})$ é uma solução da EDE regressiva

$$Y_t^{\tau,x} = h(B_T^{\tau,x}) + \int_t^T g(s, Y_s^{\tau,x}, Z_s^{\tau,x})ds - \int_t^T Z_s^{\tau,x} dB_s^{\tau,x}, \quad t \in [\tau, T]$$
$$\text{com} \quad B_t^{\tau,x} = x + B_t - B_\tau, \quad t \in [\tau, T]$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Isso implica que a solução da EDE regressiva toma a forma

$$Y_t = \theta(t, B_t), \qquad Z_t = \nabla\theta(t, B_t)$$

- Por outro lado, se $(Y_t^{\tau,x}, Z_t^{\tau,x})$ é uma solução da EDE regressiva

$$Y_t^{\tau,x} = h(B_T^{\tau,x}) + \int_t^T g(s, Y_s^{\tau,x}, Z_s^{\tau,x})ds - \int_t^T Z_s^{\tau,x} dB_s^{\tau,x}, \quad t \in [\tau, T]$$
$$\text{com} \quad B_t^{\tau,x} = x + B_t - B_\tau, \quad t \in [\tau, T]$$

- Então, $Y_\tau^{\tau,x}$ é uma função determínistica e $\theta(\tau, x) = Y_\tau^{\tau,x}$ é uma solução do problema de valor final para a EDP

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia de demontração

- $$\begin{aligned}\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau,x) &= Y^{\tau+\delta,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau} = Y^{\tau+\delta,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau+\delta}+Y^{\tau,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau}\\ &= \big(\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau+\delta,B^{\tau,x}_{\tau+\delta})\big)+\big(Y^{\tau,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau}\big).\end{aligned}$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia de demontração

- $$\begin{aligned}\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau,x) &= Y^{\tau+\delta,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau} = Y^{\tau+\delta,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau+\delta}+Y^{\tau,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau}\\ &= \big(\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau+\delta,B^{\tau,x}_{\tau+\delta})\big)+\big(Y^{\tau,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau}\big).\end{aligned}$$

- Aplicamos a fórmula de Itô à primeira diferença e usamos a EDE regrassiva para a segunda diferença.

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia de demontração

- $$\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau,x)=Y^{\tau+\delta,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau}=Y^{\tau+\delta,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau+\delta}+Y^{\tau,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau}$$
$$=\big(\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau+\delta,B^{\tau,x}_{\tau+\delta})\big)+\big(Y^{\tau,x}_{\tau+\delta}-Y^{\tau,x}_{\tau}\big).$$

- Aplicamos a fórmula de Itô à primeira diferença e usamos a EDE regrassiva para a segunda diferença.

- $$\frac{1}{\delta}\left(\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau,x)\right)=-\frac{1}{\delta}\,\mathbb{E}\Big[\int_{\tau}^{\tau+\delta}\Big(\frac{1}{2}\Delta\theta(\tau+\delta,x+B_{r+\delta}-B_{\tau})$$
$$+g(\tau+\delta,\theta(\tau+\delta,x+B_r-B_\tau),\nabla\theta(\tau+\delta,x+B_r-B_\tau))\Big)dr\Big]$$

EDEs regressivas (Backward SDEs)

Ideia de demontração

- $$\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau,x) = Y^{\tau+\delta,x}_{\tau+\delta} - Y^{\tau,x}_{\tau} = Y^{\tau+\delta,x}_{\tau+\delta} - Y^{\tau,x}_{\tau+\delta} + Y^{\tau,x}_{\tau+\delta} - Y^{\tau,x}_{\tau}$$
$$= \big(\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau+\delta,B^{\tau,x}_{\tau+\delta})\big) + \big(Y^{\tau,x}_{\tau+\delta} - Y^{\tau,x}_{\tau}\big).$$

- Aplicamos a fórmula de Itô à primeira diferença e usamos a EDE regrassiva para a segunda diferença.

- $$\frac{1}{\delta}\left(\theta(\tau+\delta,x)-\theta(\tau,x)\right) = -\frac{1}{\delta}\,\mathbb{E}\Big[\int_\tau^{\tau+\delta}\Big(\frac{1}{2}\Delta\theta(\tau+\delta,x+B_{r+\delta}-B_\tau)$$
$$+ g(\tau+\delta,\theta(\tau+\delta,x+B_r-B_\tau),\nabla\theta(\tau+\delta,x+B_r-B_\tau))\Big)\,dr\Big]$$
$$\to -\frac{1}{2}\Delta\theta(\tau,x)+g(\tau,x,\theta(\tau,x),\nabla\theta(\tau,x)), \quad \text{quando } \delta\to 0.$$

EDEs progressivas-regressivas (Forward-Backward SDEs)

Connexão com EDPs

- Consideramos EDEs progressivas-regressivas:

$$\begin{cases} X_t = x + \int_\tau^t f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_\tau^t \sigma(s, X_s, Y_s)\, dB_s \\ Y_t = h(X_T) + \int_t^T g(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dB_s \end{cases}$$

- Consideramos EDEs progressivas-regressivas:

$$\begin{cases} X_t = x + \int_\tau^t f(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds + \int_\tau^t \sigma(s, X_s, Y_s)\, dB_s \\ Y_t = h(X_T) + \int_t^T g(s, X_s, Y_s, Z_s)\, ds - \int_t^T Z_s\, dB_s \end{cases}$$

- A solução é uma tripla de processos estocásticos (X_t, Y_t, Z_t) com valores em $\mathbb{R}^P \times \mathbb{R}^Q \times (\mathbb{R}^Q \times \mathbb{R}^d)$ adaptados em relação à filtração $\mathcal{F}_t$ gerada por B_t.

EDEs progressivas-regressivas (Forward-Backward SDEs)

Four Step Scheme

J. Ma, P. Protter, J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly – a four step scheme, 1994

EDEs progressivas-regressivas (Forward-Backward SDEs)

Four Step Scheme

J. Ma, P. Protter, J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly – a four step scheme, 1994

- Existe uma conexão forte entre EDEs progressivas-regressivas e EDPs parabólicas quasi-lineares

J. Ma, P. Protter, J. Yong, Solving forward-backward stochastic differential equations explicitly – a four step scheme, 1994

- Existe uma conexão forte entre EDEs progressivas-regressivas e EDPs parabólicas quasi-lineares
- Consideramos a problema de valor final para EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{P}(\sigma\sigma^*)_{ij}(t,x,\theta(t,x))\frac{\partial^2\theta}{\partial x_i \partial x_j}(t,x) \\ +\sum_{i=1}^{P} f_i\big(t,x,\theta(t,x),\nabla_x\theta(t,x)\sigma(t,x,\theta(t,x))\big)\frac{\partial\theta}{\partial x_i}(t,x) \\ +g(t,x,\theta(t,x),\nabla_x\theta(t,x)\sigma(t,x,\theta(t,x))) = 0 \\ \theta(T,x) = h(x) \end{cases}$$

$(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^P$, θ toma valores em $\mathbb{R}^Q$.

- Se $\theta(t, x)$ é a solução do problema de valor final acima

- Se $\theta(t,x)$ é a solução do problema de valor final acima
- X_t é a solução da EDE

$$X_t = x + \int_\tau^t \tilde{f}(s,X_s)\,ds + \int_\tau^t \tilde{\sigma}(s,X_s)\,dB_s,$$

onde $\tilde{f}(t,x) = f(t,x,\theta(t,x), \nabla_x\theta(t,x)\sigma(t,x,\theta(t,x))),$
$\tilde{\sigma}(t,x) = \sigma(t,x,\theta(t,x))$

- Se $\theta(t,x)$ é a solução do problema de valor final acima
- X_t é a solução da EDE

$$X_t = x + \int_\tau^t \tilde{f}(s,X_s)\,ds + \int_\tau^t \tilde{\sigma}(s,X_s)\,dB_s,$$

onde $\tilde{f}(t,x) = f(t,x,\theta(t,x), \nabla_x\theta(t,x)\sigma(t,x,\theta(t,x))),$
$\tilde{\sigma}(t,x) = \sigma(t,x,\theta(t,x))$

- $X_t = x + \int_\tau^t f(s,X_s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_\tau^t \sigma(s,X_s,Y_s)\,dB_s$

Forward-backward SDEs

Four Step Scheme

- Se $\theta(t,x)$ é a solução do problema de valor final acima
- X_t é a solução da EDE

$$X_t = x + \int_\tau^t \tilde{f}(s,X_s)\,ds + \int_\tau^t \tilde{\sigma}(s,X_s)\,dB_s,$$

onde $\tilde{f}(t,x) = f(t,x,\theta(t,x), \nabla_x\theta(t,x)\sigma(t,x,\theta(t,x))),$
$\tilde{\sigma}(t,x) = \sigma(t,x,\theta(t,x))$

- $X_t = x + \int_\tau^t f(s,X_s,Y_s,Z_s)\,ds + \int_\tau^t \sigma(s,X_s,Y_s)\,dB_s$
- Então, a solução da EDE progressiva-regressiva toma a forma
$(X_t, Y_t, Z_t) = \big(X_t, \theta(t,X_t), \nabla_x\theta(t,X_t)\sigma(t,X_t,\theta(t,X_t))\big)$

- Por outro lado, se $(X_t^{\tau,x}, Y_t^{\tau,x}, Z_t^{\tau,x})$ a solução de FBSDEs, então

- Por outro lado, se $(X_t^{\tau,x}, Y_t^{\tau,x}, Z_t^{\tau,x})$ a solução de FBSDEs, então
- $Y_\tau^{\tau,x}$ é determinístico

Forward-backward SDEs (FBSDEs)

Four Step Scheme

- Por outro lado, se $(X_t^{\tau,x}, Y_t^{\tau,x}, Z_t^{\tau,x})$ a solução de FBSDEs, então
- $Y_\tau^{\tau,x}$ é determinístico
- e $\theta(\tau, x) = Y_\tau^{\tau,x}$ a solução do problema de valor final para a EDP

- Por outro lado, se $(X_t^{\tau,x}, Y_t^{\tau,x}, Z_t^{\tau,x})$ a solução de FBSDEs, então
- $Y_\tau^{\tau,x}$ é determinístico
- e $\theta(\tau, x) = Y_\tau^{\tau,x}$ a solução do problema de valor final para a EDP
- A ideia de demonstração é a mesma do que para a EDP

$$\theta(t, B_t) = h(B_T) - \int_t^T g(s, \theta(s, B_s), \nabla\theta(s, B_s))\, ds - \int_t^T \nabla\theta(s, B_s)\, dB_s$$