Estocástica e Equações Diferenciais Parciais

Equações diferenciais estocásticas (EDEs)

- Uma EDE é uma equação diferencial cujos termos são processos estocásticos, e como resultado, uma solução também é um processo estocástico.

Equações diferenciais estocásticas (EDEs)

- Uma EDE é uma equação diferencial cujos termos são processos estocásticos, e como resultado, uma solução também é um processo estocástico.
- Uma EDE tem a seguinte forma:

$$\underbrace{\dot{X}_t = f(t, X_t)}_{\text{EDO}} + \underbrace{\sigma(t, X_t)\dot{B}_t}_{\text{ruído}}, \qquad X_0 = x.$$

Equações diferenciais estocásticas (EDEs)

- Uma EDE é uma equação diferencial cujos termos são processos estocásticos, e como resultado, uma solução também é um processo estocástico.
- Uma EDE tem a seguinte forma:

$$\underbrace{\dot{X}_t = f(t, X_t)}_{\text{EDO}} + \underbrace{\sigma(t, X_t)\dot{B}_t}_{\text{ruído}}, \qquad X_0 = x.$$

- X_t é uma **solução em** $[0, T]$ se para todo $t \in [0, T]$,

$$X_t = x + \underbrace{\int_0^t f(s, X_s)ds}_{\text{integral de Riemann}} + \underbrace{\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s}_{\text{integral estocástica}}$$

Equações diferenciais estocásticas (EDEs)

- Uma EDE é uma equação diferencial cujos termos são processos estocásticos, e como resultado, uma solução também é um processo estocástico.
- Uma EDE tem a seguinte forma:

$$\underbrace{\dot{X}_t = f(t, X_t)}_{\text{EDO}} + \underbrace{\sigma(t, X_t)\dot{B}_t,}_{\text{ruído}} \qquad X_0 = x.$$

- X_t é uma **solução em** $[0, T]$ se para todo $t \in [0, T]$,

$$X_t = x + \underbrace{\int_0^t f(s, X_s)ds}_{\text{integral de Riemann}} + \underbrace{\int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s}_{\text{integral estocástica}}$$

- Quando $\sigma = 0$, obtemos uma EDO clássica. Então, EDE é um objeto mais geral.

Movimento browniano e EDEs n-dimensionais

- Introduzimos $B_t = (B_t^1, \ldots, B_t^n)$, um movimento browniano n-dimensional, onde B_t^i é um movimento browniano real e $B_t^1, \ldots, B_t^n$ são independentes.
- Seja $\sigma(t, X_t) = (\sigma_1(t, X_t), \ldots, \sigma_n(t, X_t))$.
- Definimos a integral estocástica

$$\int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s = \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i(s, X_s) dB_s^i.$$

- Podemos introduzir um sistema de EDEs para $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^m)$

$$X_t^k = x^k + \int_0^t f^k(s, X_s) ds + \sum_{i=1}^n \int_0^t \sigma_i^k(s, X_s) dB_s^i, \quad k = 1, \ldots, m.$$

- Em forma compacta:

$$X_t = x + \int_0^t f(s, X_s) + \int_0^t \sigma(s, X_s) dB_s.$$

Isometria de Itô

Teorema

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t \Phi_s dB_s\Big)^2 = \int_0^t \big(\mathbb{E}\Phi_s^2\big)\, ds.$$

Isometria de Itô

Teorema

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t \Phi_s dB_s\Big)^2 = \int_0^t \big(\mathbb{E}\Phi_s^2\big)\, ds.$$

Demonstração: Pela fórmula de Itô, aplicada a $X_t = \int_0^t \Phi_s dB_s$ e $g(x) = x^2$ (tomando em consideração que $g'(x) = 2x$ e $g''(x) = 2$), obtemos

$$X_t^2 = \int_0^t 2X_s\Phi_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\Phi_s^2 ds.$$

Isometria de Itô

Teorema

$$\mathbb{E}\Big(\int_0^t \Phi_s dB_s\Big)^2 = \int_0^t \big(\mathbb{E}\Phi_s^2\big)\, ds.$$

Demonstração: Pela fórmula de Itô, aplicada a $X_t = \int_0^t \Phi_s dB_s$ e $g(x) = x^2$ (tomando em consideração que $g'(x) = 2x$ e $g''(x) = 2$), obtemos

$$X_t^2 = \int_0^t 2X_s\Phi_s dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\Phi_s^2 ds.$$

Consequentemente,

$$\mathbb{E}X_t^2 = \int_0^t \mathbb{E}\Phi_s^2 ds.$$

Soluções de EDEs

- Introduzimos a norma em $E = \mathrm{C}([0,T], L_2(\Omega))$:

$$\|\Phi\|_E^2 = \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}|\Phi_t|^2 = \sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega |\Phi_t(\omega)|^2 \, \mathbb{P}(d\omega).$$

Teorema

Sejam $f(t,x)$ e $\sigma(t,x)$ funções com o crescimento linear e Lipschitz em relação ao último argumento, ou seja, existe uma constante $K > 0$ tal que

$$|f(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leqslant K(1+|x|),$$

$$|f(t,x_1) - f(t,x_2)| + |\sigma(t,x_1) - \sigma(t,x_2)| \leqslant K|x_1 - x_2|.$$

Então, existe uma solução da EDE

$$X_t = x + \int_0^t f(s,X_s) + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$$

qual é única em relacão à norma $\|\cdot\|_E$

- Definimos a aplicação $\Gamma : E \to E$ $(E = \mathrm{C}([0,T], L_2(\Omega)))$
- $\Gamma(X_t) =$ "parte direita da EDE"
- Usando a condição de crescemento linear, provamos que se $X \in E$, $\Gamma(X) \in E$
- Sejam $X^1, X^2 \in E$. Temos

$$\mathbb{E}|\Gamma(X^1)_t - \Gamma(X^2)_t|^2 = \mathbb{E}\Big|\int_0^t (f(s,X_s^1) - f(s,X_s^2))ds + \int_0^t (\sigma(s,X_s^1) - \sigma(s,X_s^2))dB_s\Big|^2$$

$$\leqslant K\Big(\int_0^t \mathbb{E}|f(s,X_s^1) - f(s,X_s^2)|^2 ds + \int_0^t \mathbb{E}|\sigma(s,X_s^1) - \sigma(s,X_s^2)|^2 ds\Big)$$

$$\leqslant K\int_0^t \mathbb{E}|X_s^1 - X_s^2|^2 ds \leqslant K\int_0^t \sup_{r\in[0,s]} \mathbb{E}|X_r^1 - X_r^2|^2 ds.$$

Soluções de EDEs

- Assim,

$$\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}|\Gamma(X^1)_s - \Gamma(X^2)_s|^2 \leqslant K \int_0^t \sup_{r\in[0,s]} \mathbb{E}|X_r^1 - X_r^2|^2 ds.$$

- Consequentemente,

$$\sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}|\Gamma^n(X^1)_s - \Gamma^n(X^2)_s|^2 \leqslant K \int_0^t \sup_{r\in[0,s]} \mathbb{E}|\Gamma^{n-1}X_r^1 - \Gamma^{n-1}X_r^2|^2 ds,$$

$$\leqslant K^2 \int_0^t \int_0^s \sup_{r\in[0,s_1]} \mathbb{E}|\Gamma^{n-2}X_r^1 - \Gamma^{n-1}X_r^2|^2 ds_1 ds$$

$$\leqslant K^n \int_0^t \int_0^s \int_0^{s_1} \dots \int_0^{s_{n-2}} \sup_{r\in[0,s_{n-2}]} \mathbb{E}|X_r^1 - X_r^2|^2 ds_{n-1} \dots ds_1 ds$$

$$\leqslant \frac{K^n t^n}{n!} \sup_{s\in[0,t]} \mathbb{E}|X_s^1 - X_s^2|^2.$$

- Isso implica que $\Gamma^n : E \to E$ é uma contração e assim, possui um único ponto fixo X_t, que é também um ponto fixo de $\Gamma : E \to E$.

EDP estocástica

- A solução de uma EDE tem a forma $X_t(\omega)$
- A solução de uma EDP estocástica tem dependencia de x, ou seja $X_t(x, \omega)$.
- Definimos $\mathcal{A}\varphi(t,x) = a(x)\partial^2_{xx}\varphi(t,x) + b(x)\partial_x\varphi(t,x)$, $a(x) > 0$.
- Consideramos a equação

$$X_t(x,\omega) = X_0(x,\omega) + \int_0^t \mathcal{A}X_s(x,\omega)ds + \int_0^t f(s,x,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,x,X_s)dB_s$$

- Outra forma dessa equação é

$$X_t(x,\omega) = e^{t\mathcal{A}}X_0(x,\omega) + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} f(s,x,X_s)ds + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\sigma(s,x,X_s)dB_s$$

onde $e^{t\mathcal{A}}$ é o semigrupo fortemente contínuo gerado por $\mathcal{A}$.

Semigrupos fortemente contínuos

Uma familia de operadores P_t, $t \geqslant 0$ em um espaço de Banach E é chamado um *semigrupo fortemente contínuo* se

- $P_{t+s} = P_t \circ P_s$, para todos $t, s \geqslant 0$;
- $P_0 = I$;
- Para todo $x \in E$, a aplicação $(0, +\infty) \to E$, $t \mapsto P_t x$ é contínua.

Proposição

(i) Para todo semigrupo fortemente contínuo P_t em E, existem constantes $M \geqslant 1$ e $w \in \mathbb{R}$ tais que

$$\|P_t\|_E \leqslant Me^{wt}.$$

(ii) Para todo $x \in E$, a a aplicação $t \mapsto P_t x$ é derivável em $[0, +\infty)$.

Semigrupos fortemente contínuos

Definição

Um gerador $\mathcal{A} : D(A) \to E$*, onde* $D(A) \subset E$*, de um semigrupo fortemente contínuo* P_t *no espaço de Banach* E *é um operador*

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \to 0+} \frac{P_t x - x}{t}$$

definido no domínio dele $D(A) = \{x \in E, P_t(x) \, \textit{é derivavel em} \, t\}$.

Semigrupos fortemente contínuos

Definição

Um gerador $\mathcal{A} : D(A) \to E$*, onde* $D(A) \subset E$*, de um semigrupo fortemente contínuo* P_t *no espaço de Banach* E *é um operador*

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \to 0+} \frac{P_t x - x}{t}$$

definido no domínio dele $D(A) = \{x \in E, P_t(x) \text{ é derivavel em } t\}$.

P_t *é denotado por*

$$P_t = e^{t\mathcal{A}},$$

o semigrupo fortemente contínuo gerado por $\mathcal{A}$

Semigrupos fortemente contínuos

Definição

Um gerador $\mathcal{A} : D(A) \to E$*, onde* $D(A) \subset E$*, de um semigrupo fortemente contínuo* P_t *no espaço de Banach* E *é um operador*

$$\mathcal{A}x = \lim_{t \to 0+} \frac{P_t x - x}{t}$$

definido no domínio dele $D(A) = \{x \in E, P_t(x) \text{ é derivavel em } t\}$.

P_t *é denotado por*

$$P_t = e^{t\mathcal{A}},$$

o semigrupo fortemente contínuo gerado por $\mathcal{A}$

$\mathcal{A}\varphi(x) = a(x)\partial^2_{xx}\varphi(x) + b(x)\partial_x\varphi(x)$, $a(x) > 0$, é um exemplo de gerador, $D(A) = \mathrm{C}^2_b(\mathbb{R})$

Definição

Seja $\mathcal{A}\varphi(t,x) = a(x)\partial^2_{xx}\varphi(t,x) + b(x)\partial_x\varphi(t,x)$, $a(t,x) > 0$.

Uma solução da equação

$$X_t(x,\omega) = e^{t\mathcal{A}}X_0(x,\omega) + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} f(s,x,X_s)ds + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}}\sigma(s,x,X_s)dB_s$$

é chamada uma solução mild da EDP estocástica

$$X_t(x,\omega) = X_0(x,\omega) + \int_0^t \mathcal{A}X_s(x,\omega)ds + \int_0^t f(s,x,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,x,X_s)dB_s$$

Soluções mild de EDPs estocásticas

- Introduzimos a norma em $X = \mathrm{C}([0,T], L_2(\Omega \to \mathrm{C}_b(\mathbb{R})))$:

$$\|\Phi\|_X^2 = \sup_{t\in[0,T]} \mathbb{E}\|\Phi_t\|^2 = \sup_{t\in[0,T]} \int_\Omega \|\Phi_t(\,\cdot\,,\omega)\|^2\,\mathbb{P}(d\omega),$$

$$\|\Phi_t(\omega)\| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |\Phi_t(x,\omega)|.$$

Teorema

Sejam $f(t,x,y)$ e $\sigma(t,x,y)$ funções Lipschitz e com o crescimento linear em relação ao último argumento, ou seja, existe uma constante $K>0$ tal que

$$|f(t,x,y)| + |\sigma(t,x,y)| \leqslant K(1+|y|),$$

$$|f(t,x,y_1) - f(t,x,y_2)| + |\sigma(t,x,y_1) - \sigma(t,x,y_2)| \leqslant K|y_1 - y_2|.$$

Então, existe uma solução da equação

$$X_t(x,\omega) = e^{t\mathcal{A}}X_0(x,\omega) + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} f(s,x,X_s)ds + \int_0^t e^{(t-s)\mathcal{A}} \sigma(s,x,X_s)dB_s$$

qual é única em relacão à norma $\|\cdot\|_X$

- Sejam $X^1, X^2 \in X$. Temos

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\|\Gamma(X^1)_t - \Gamma(X^2)_t\|^2 &= \mathbb{E}\bigg\| \int_0^t e^{t\mathcal{A}}(f(s,\cdot,X_s^1) - f(s,\cdot,X_s^2))ds \\
&\qquad + \int_0^t e^{t\mathcal{A}}(\sigma(s,\cdot,X_s^1) - \sigma(s,\cdot,X_s^2))dB_s \bigg\|^2 \\
&\leqslant 2t \int_0^t \|e^{t\mathcal{A}}\| \, \mathbb{E}\|f(s,\cdot,X_s^1) - f(s,\cdot,X_s^2)\|^2 ds \\
&\qquad + 2 \int_0^t \|e^{t\mathcal{A}}\| \, \mathbb{E}\|\sigma(s,\cdot,X_s^1) - \sigma(s,\cdot,X_s^2)\|^2 dB_s \bigg\|^2 \\
&\leqslant K\Big(\int_0^t \mathbb{E}\|f(s,\cdot,X_s^1) - f(s,X_s^2)\|^2 ds + \int_0^t \mathbb{E}\|\sigma(s,\cdot,X_s^1) - \sigma(s,\cdot,X_s^2)\|^2 ds\Big) \\
&\leqslant K \int_0^t \mathbb{E}\|X_s^1 - X_s^2\|_X^2 ds \leqslant K \int_0^t \sup_{r\in[0,s]} \mathbb{E}\|X_r^1 - X_r^2\|^2 ds
\end{aligned}
$$

EDPs estocásticas com ruído branco espaço-temporal $\xi(t,x)$

- $\partial_t X_t(x,\omega) = \mathcal{A} X_t(x,\omega) + f(t,x,X_t) + \sigma(t,x,X_t)\dot{B}_t$

EDPs estocásticas com ruído branco espaço-temporal $\xi(t,x)$

- $\partial_t X_t(x,\omega) = \mathcal{A}X_t(x,\omega) + f(t,x,X_t) + \sigma(t,x,X_t)\dot{B}_t$
- $\partial_t X_t(x,\omega) = \mathcal{A}X_t(x,\omega) + f(t,x,X_t) + \xi(t,x)$
- $\xi(t,x) = \partial^2_{tx} B(t,x)$, onde $B(t,x)$ é uma folha browniana

EDPs estocásticas com ruído branco espaço-temporal $\xi(t,x)$

- $\partial_t X_t(x,\omega) = \mathcal{A}X_t(x,\omega) + f(t,x,X_t) + \sigma(t,x,X_t)\dot{B}_t$
- $\partial_t X_t(x,\omega) = \mathcal{A}X_t(x,\omega) + f(t,x,X_t) + \xi(t,x)$
- $\xi(t,x) = \partial^2_{tx} B(t,x)$, onde $B(t,x)$ é uma folha browniana
- Exemplo. Equação de reação-difusão:

$$\partial_t u(t,x) = \sigma^2 \partial^2_{xx} u(t,x) + f(u(t,x)) + \xi(t,x)$$