Estocástica e Equações Diferenciais Parciais

Movimento browniano

Movimento Browniano B_t , $t \geqslant 0$, é um processo estocástico contínuo com as seguintes propriedades:

- $B_0 = 0$
- Os incrementos $B_{t_1} - B_{t_2}$, $B_{t_3} - B_{t_4}$, $\ldots$ $B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$ são independentes para todos $t_1 < t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$.
- Para todos $0 \leqslant s < t$, o incremento $B_t - B_s$ é uma variável aleatória Gaussiana com média zero, i.e., $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$, e variância $t - s$, i.e., $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$.

Movimento browniano

Movimento Browniano B_t , $t \geqslant 0$, é um processo estocástico contínuo com as seguintes propriedades:

- $B_0 = 0$
- Os incrementos $B_{t_1} - B_{t_2}$, $B_{t_3} - B_{t_4}$, ... $B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$ são independentes para todos $t_1 < t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$.
- Para todos $0 \leqslant s < t$, o incremento $B_t - B_s$ é uma variável aleatória Gaussiana com média zero, i.e., $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$, e variância $t - s$, i.e., $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$.

Variaveis aleatórias são independentes se as σ-algebras geradas por elas são independentes.

Movimento browniano

Movimento Browniano B_t , $t \geqslant 0$, é um processo estocástico contínuo com as seguintes propriedades:

- $B_0 = 0$
- Os incrementos $B_{t_1} - B_{t_2}$, $B_{t_3} - B_{t_4}$, ... $B_{t_{n-1}} - B_{t_n}$ são independentes para todos $t_1 < t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n$.
- Para todos $0 \leqslant s < t$, o incremento $B_t - B_s$ é uma variável aleatória Gaussiana com média zero, i.e., $\mathbb{E}[B_t - B_s] = 0$, e variância $t - s$, i.e., $\mathbb{E}[(B_t - B_s)^2] = t - s$.

Variaveis aleatórias são independentes se as σ-algebras geradas por elas são independentes.

σ-algebras $\mathcal{F}_1, \ldots, \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ são independentes se para todos conjuntos $A_1 \in \mathcal{F}_1, \ldots, A_n \in \mathcal{F}_n$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1)\mathbb{P}(A_2)\ldots\mathbb{P}(A_n).$$

- **Hölder continuidade:** Para quase todos $\omega \in \Omega$, a função $t \mapsto B_t$ é localmente α-Hölder continua para todos $0 < \alpha < \frac{1}{2}$; ou seja,

$$|B_t(\omega) - B_s(\omega)| \leqslant C_{T,\alpha}(\omega)\,|t-s|^{\alpha}$$

  Para todos $T > 0$, $s, t \in [0, T)$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$, e quase todos $\omega \in \Omega$.

- **Não diferenciabilidade em nenhum ponto:** As trajetórias de um movimento browniano não são localmente α-Hölder contínuas se $\alpha > \frac{1}{2}$. Particularmente, as trajetórias de um movimento brownianon não são diferenciaveis em nenhum ponto.

- **Variação infinita:** As trajetórias de um movimento browniano tem a variação infinita em quelquer intervalo $[s, t]$, i.e.,

$$\sup \sum_{i=1}^{n} |B_{t_i} - B_{t_{i-1}}| = \infty \quad \text{ou} \quad V_s^t[B_r] = \infty.$$

Formula de Itô

Theorem

Seja X_t um processo estocástico de tipo Itô

$$X_t = \int_0^t u_s ds + \int_0^t v_s dB_s$$

e seja $g(t,x) \in \mathrm{C}^2([0,+\infty) \times \mathbb{R})$. Definimos,

$$Y_t = g(t, X_t).$$

Então,

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t \left(\partial_s g(s, X_s) + u_s\, \partial_x g(s, X_s) + \frac{1}{2}\partial_x^2 g(s, X_s) v_s^2\right) ds \\ + \int_0^t \partial_x g(s, X_s) u_s dB_s.$$

Para simplificar, vamos supor que as derivadas de g são limitadas. Aplicando a fórmula de Taylor, obtemos,

$$
\begin{aligned}
g(t, X_t) = g(0, X_0) + \sum_i \left(g(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}) - g(t_i, X_{t_i}) \right) \\
= g(0, X_0) + \sum_i \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_i + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_i \\
+ \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} \Delta t_i \Delta X_i + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_i)^2 \\
+ \sum_i o((\Delta t_i)^2 + (\Delta X_i)^2), \quad \text{onde } \Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \; \Delta X_i = X_{t_{i+1}} - X_{t_i}.
\end{aligned}
$$

Para simplificar, vamos supor que as derivadas de g são limitadas. Aplicando a fórmula de Taylor, obtemos,

$$
\begin{aligned}
g(t, X_t) = g(0, X_0) + \sum_i \left(g(t_{i+1}, X_{t_{i+1}}) - g(t_i, X_{t_i}) \right) \\
= g(0, X_0) + \sum_i \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_i + \sum_i \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_i \\
+ \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} \Delta t_i \Delta X_i + \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_i)^2 \\
+ \sum_i o((\Delta t_i)^2 + (\Delta X_i)^2), \quad \text{onde } \Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \;\; \Delta X_i = X_{t_{i+1}} - X_{t_i}.
\end{aligned}
$$

$$
\sum_i \frac{\partial g}{\partial t} \Delta t_i \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial s} ds, \qquad \sum_i \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_i \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} dX_s.
$$

Como $dX_s = u_s ds + v_s dB_s$,

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_i \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} dX_s = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} u_s ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} v_s dB_s.$$

Formula de Itô

Ideia de demonstração

Como $dX_s = u_s ds + v_s dB_s$,

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_i \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} dX_s = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} u_s ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} v_s dB_s.$$

$$\left| \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_i)^2 \right| \leqslant K \sum_i (\Delta t_i)^2 \leqslant K\, max_i \Delta t_i \sum_i \Delta t_i = Kt\, max_i \Delta t_i \to 0.$$

Formula de Itô

Ideia de demonstração

Como $dX_s = u_s ds + v_s dB_s$,

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_i \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} dX_s = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} u_s ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} v_s dB_s.$$

$$\left| \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_i)^2 \right| \leqslant K \sum_i (\Delta t_i)^2 \leqslant K\, max_i \Delta t_i \sum_i \Delta t_i = Kt\, max_i \Delta t_i \to 0.$$

Pulamos a demonstração que

$$\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} \Delta t_i \Delta X_i \to 0 \quad \text{e} \quad \sum_i o((\Delta t_i)^2 + (\Delta X_i)^2) \to 0.$$

Como $dX_s = u_s ds + v_s dB_s$,

$$\sum_i \frac{\partial g}{\partial x} \Delta X_i \to \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} dX_s = \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} u_s ds + \int_0^t \frac{\partial g}{\partial x} v_s dB_s.$$

$$\left| \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} (\Delta t_i)^2 \right| \leqslant K \sum_i (\Delta t_i)^2 \leqslant K\, max_i \Delta t_i \sum_i \Delta t_i = Kt\, max_i \Delta t_i \to 0.$$

Pulamos a demonstração que

$$\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial t \partial x} \Delta t_i \Delta X_i \to 0 \quad \text{e} \quad \sum_i o((\Delta t_i)^2 + (\Delta X_i)^2) \to 0.$$

$$\frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} (\Delta X_i)^2 \approx \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \left(u_{t_i}^2 (\Delta t_i)^2 + 2 u_{t_i} v_{t_i} \Delta t_i \Delta B_i + u_{t_i}^2 (\Delta B_i)^2 \right)$$

$$\approx \frac{1}{2} \sum_i \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_{t_i}^2 (\Delta B_i)^2 \to \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} u_s^2 ds$$

Formula de Feynman-Kac

Caso particular

- Definimos $(Av)(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial^2_{xx}v(t,x) + \partial_x v(t,x)b(x)$

Formula de Feynman-Kac

Caso particular

- Definimos $(Av)(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial^2_{xx}v(t,x) + \partial_x v(t,x)b(x)$
- Seja X_t a solução da EDE (equação diferencial estocástica)

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$

Consideramos $X(t,\omega)$ como uma função $\Omega \to \mathrm{C}[0,T]$, $\omega \mapsto X(\cdot,\omega)$ e definimos $\mathbb{E}^x[\Phi] = \int_{\mathrm{C}[0,T]} \Phi(g)\,(\mathbb{P}\circ X^{-1})(dg)$.

Formula de Feynman-Kac

Caso particular

- Definimos $(Av)(t,x) = \frac{1}{2}\sigma^2(x)\partial^2_{xx} v(t,x) + \partial_x v(t,x) b(x)$
- Seja X_t a solução da EDE (equação diferencial estocástica)

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dB_s.$$

Consideramos $X(t,\omega)$ como uma função $\Omega \to \mathrm{C}[0,T]$, $\omega \mapsto X(\cdot,\omega)$ e definimos $\mathbb{E}^x[\Phi] = \int_{\mathrm{C}[0,T]} \Phi(g)\,(\mathbb{P} \circ X^{-1})(dg)$.

Theorem

Seja $f \in \mathrm{C}^2_0(\mathbb{R})$. Então,

$$v(t,x) = \mathbb{E}^x[f(X_t)] \quad (t,x) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$$

é uma solução do problema

$$\frac{\partial v}{\partial t} = Av, \qquad v(0,x) = f(x).$$

Formula de Feynman-Kac

Ideia de demonstração

- Pela formula de Itô,

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t \left(f'(X_s)b(X_s) + + \frac{1}{2} f''(X_s)\sigma(X_s)^2\right) ds$$
$$+ \int_0^t f'(X_s)\sigma(X_s) dB_s$$

- Tomando a esperança dos dois lados dessa identidade, obtemos

$$v(x,t) := \mathbb{E}^x f(X_t) = f(x)$$
$$+ \int_0^t \mathbb{E}^x \left[\left(f'(X_s)b(X_s) + \frac{1}{2} f''(X_s)\sigma(X_s)^2\right)\right] ds = f(x) + \int_0^t \mathbb{E}^x (Af)(X_s).$$

- Derivando em relação a t, $\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \mathbb{E}^x Af(X_t) = A\,\mathbb{E}^x f(X_t) = Av(x,t)$