Vetores

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

(Notas - 10/8/2023)

Sérgio de Albuquerque Souza

Sumário

Capítulo 1

Vetores

1.1 Introdução

1.1.1 Situando a Temática

Nesta unidade estudaremos e definiremos vetores, bem como as operações com esses vetores, obtendo resultados geométricos e analíticos, utilizando como base os conceitos básicos da trigonometria, como triângulos retângulos e suas relações.

O tratamento vetorial de vários problemas matemáticos e físicos simplifica a compreensão e o estudo destes problemas, possibilitando a ampliação, generalização e confirmação dos conceitos e definições existentes.

1.1.2 Problematizando a Temática

Trataremos vários problemas geométricos, como por exemplo, área de um triângulo qualquer, projeções, volume de um paralelogramo, perpendicularismo, paralelismo e ângulos, utilizando as facilidades dadas pelas propriedades encontradas nos vetores e suas operações.

1.1.3 Conhecendo a Temática

O estudo de vetores iniciou-se no final do século XIX. Eles constituem os instrumentos ideais para o desenvolvimento de muitos conceitos importantes nas várias áreas do conhecimento, como em Física e em Matemática.

Existem basicamente três modos de se introduzir o estudo de vetores:

Geometricamente:
Os vetores são representados por segmentos de reta orientados (setas) e as operações com eles são definidas geometricamente;

Analiticamente:
Os vetores e correspondentes operações são descritos em termos de números, chamados componentes dos vetores. A descrição analítica resulta naturalmente da descrição geométrica, desde que seja introduzido um sistema de coordenadas;

Axiomaticamente:

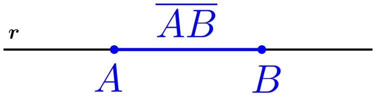
Não se faz qualquer tentativa para se descrever um vetor ou as operações algébricas com vetores. Neste caso, vetores e operações vetoriais são considerados conceitos não definidos, relativamente aos quais se sabe apenas que eles satisfazem certo conjunto de axiomas. Tal sistema algébrico, com axiomas apropriados, chama-se **espaço vetorial**. Em todos os ramos da Matemática se encontram espaços vetoriais e eles são apresentados em cursos de álgebra Linear.

Nesta unidade, inicialmente introduzimos vetores geometricamente de modo construtivo e já apelando para a visualização do mesmo, dentro de um espaço tridimensional. Depois, utilizamos o método analítico e geométrico para introduzir outros conceitos e operações entre os vetores.

1.2 Segmentos Orientados

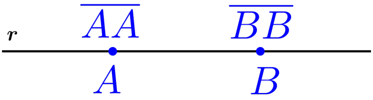
Definição 1.1 (Segmento)
Dados dois pontos distintos A e B quaisquer, que determinam uma única reta r, chamaremos de ***segmento*** $\overline{AB}$*, ao conjunto formado pelos pontos extremos A e B e por todos os pontos da reta r entre esses dois pontos (Figura 1.1).*

Figura 1.1: *Representação gráfica do segmento $\overline{AB}$.*



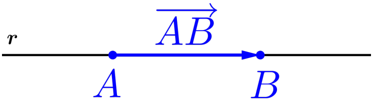
Definição 1.2 (Segmento Nulo)
Um ***segmento nulo*** $\overline{AA}$ *será o conjunto unitário formado apenas pelo ponto* A *(Figura 1.2).*

Figura 1.2: *Representações gráficas dos segmentos nulos* $\overline{AA}$ *e* $\overline{BB}$.



Definição 1.3 (Segmento Orientado)
Um ***segmento orientado*** $\overrightarrow{AB}$ *é definido por um segmento* $\overline{AB}$ *e uma escolha de um dos seus extremos como ponto inicial* A *e o outro como ponto final* B*, ou seja, daremos uma orientação de como deve ser olhado esse segmento (Figura 1.3).*

Figura 1.3: *Representação gráfica do segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$*.*

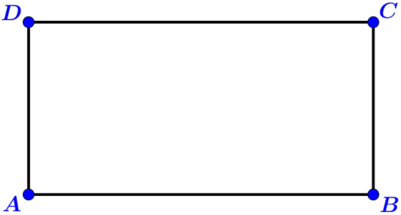


Observação 1.1 *Em relação aos segmentos e segmentos orientados temos:*

- *O segmento* $\overline{AB} = \overline{BA}$,
- *O segmento* $\overline{AA}$ *é chamado de segmento nulo.*
- *O segmento orientado* $\overrightarrow{AB} \neq \overrightarrow{BA}$ *e*
- *O segmento orientado* $\overrightarrow{AA}$ *é chamado de segmento orientado nulo.*

Exemplo 1.1 *No paralelogramo dado pelos pontos* $ABCD$ *conforme a Figura 1.4, considere os* 4 *lados, os* 4 *pontos e as diagonais, então teremos:*

Figura 1.4: *Representação do paralelogramo* $ABCD$.



- 10 *Segmentos:*

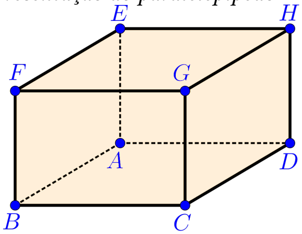
$$\left\{ \begin{array}{c} \overline{AA}, \overline{BB}, \overline{CC}, \overline{DD}, \\ \overline{AB} = \overline{BA}, \overline{BC} = \overline{CB}, \overline{CD} = \overline{DC}, \\ \overline{DA} = \overline{AD}, \overline{AC} = \overline{CA}, \overline{BD} = \overline{DB} \end{array} \right\}$$

- 16 *Segmentos orientados:*

$$\left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{AA}, \overrightarrow{BB}, \overrightarrow{CC}, \overrightarrow{DD}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CB}, \\ \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BD}, \overrightarrow{DB} \end{array} \right\}$$

Exercício 1.1 *No paralelepípedo definido pelos pontos $ABCDEFGH$ da Figura 1.5, verifique que existem 36 segmentos que podem ser definidos pelos 8 pontos, 12 arestas e todas as diagonais. São 64 os segmentos orientados?*

Figura 1.5: *Representação do paralelepípedo $ABCDEFGH$.*



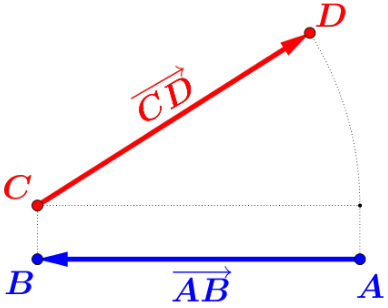
1.3 Norma, Direção e Sentido

Para efeito da definição e estudo dos vetores, precisamos comparar segmentos orientados, por exemplo um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ a um outro $\overrightarrow{CD}$, observando as três seguintes características geométricas:

Norma:

A norma ou comprimento de um segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é denotado por $\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}$. Portanto dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ terão **mesma norma** se $\boxed{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \left\|\overrightarrow{CD}\right\|}$.

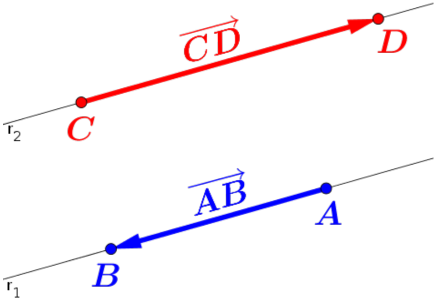
Figura 1.6: *Segmentos* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$*: mesma norma.*



Direção:

Dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ terão **mesma direção** se, as retas que os contém, são coincidentes ou paralelas.

Figura 1.7: *Segmentos* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$*: mesma direção.*



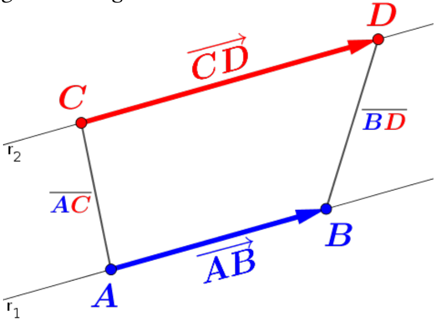
Sentido:

Dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ que tenham a mesma direção e não forem colineares, terão o **mesmo sentido** quando a interseção dos segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$ for vazio, isto é:

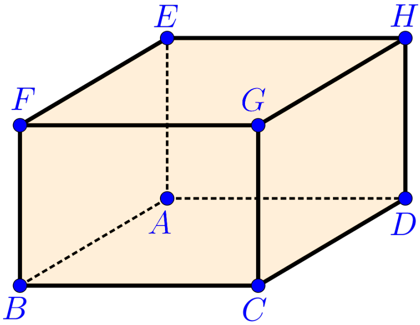
$$\boxed{\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{ \} = \emptyset}$$

caso contrário têm sentidos opostos. Os segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$ colineares têm o mesmo sentido, quando um outro segmento auxiliar $\overline{A'B'}$ não colinear com $\overrightarrow{CD}$ e no mesmo sentido de $\overrightarrow{AB}$, satisfaz $\overline{A'C} \cap \overline{B'D} = \{ \} = \emptyset$

Figura 1.8: *Segmentos* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{CD}$*: mesmo sentido.*



Exemplo 1.2 *Considerando o paralelepípedo dado pelos pontos* $ABCDEFGH$, *temos:*



a) 8 *segmentos orientados com a mesma norma do segmento orientado* $\overrightarrow{BG}$:

$$\boxed{\left\{\overrightarrow{BG}, \overrightarrow{GB}, \overrightarrow{FC}, \overrightarrow{CF}, \overrightarrow{AH}, \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{ED}, \overrightarrow{DE}\right\}}$$

b) 4 *segmentos orientados com o mesmo sentido do segmento orientado* $\overrightarrow{AE}$:

$$\boxed{\left\{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{DH}\right\}}$$

c) 8 segmentos orientados com a mesma direção do segmento orientado $\overrightarrow{AB}$*:*

$$\boxed{\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BA}, \overrightarrow{EF}, \overrightarrow{FE}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{GH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{CD}\right\}}$$

Definição 1.4 (Segmentos Equipolentes) *Diremos que dois segmentos orientados $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{CD}$, não nulos, são* ***segmentos equipolentes*** *(equivalentes) se esses segmentos orientados possuem:*

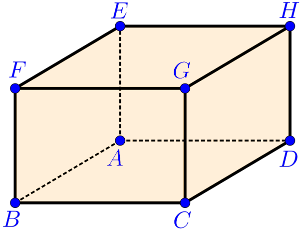
mesma norma | *mesma direção* | *mesmo sentido*

e representaremos essa relação por:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD}} \tag{1.1}$$

Observação 1.2 *Todos os segmentos orientados nulos são considerados equipolentes entre si, ou seja, são equivalentes $\overrightarrow{AA} \sim \overrightarrow{BB}$, pois neste caso, a norma é nula e o sentido e a direção são indefinidos.*

Exemplo 1.3 *Considerando o paralelepípedo dado pelos pontos $ABCDEFGH$, temos que:*



a) $\overrightarrow{AB}$ *é equipolente aos segmentos:* $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{EF}$ e $\overrightarrow{HG}$

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{DC} \sim \overrightarrow{EF} \sim \overrightarrow{HG}}$$

b) $\overrightarrow{AE}$ *é equipolente aos segmentos:* $\overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{CG}$ e $\overrightarrow{DH}$

$$\boxed{\overrightarrow{AE} \sim \overrightarrow{BF} \sim \overrightarrow{CG} \sim \overrightarrow{DH}}$$

c) $\overrightarrow{AD}$ *é equipolente aos segmentos:* $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EH}$ e $\overrightarrow{FG}$

$$\boxed{\overrightarrow{AD} \sim \overrightarrow{BC} \sim \overrightarrow{EH} \sim \overrightarrow{FG}}$$

d) $\overrightarrow{AF}$ *é equipolente ao segmento* $\overrightarrow{DG}$

$$\boxed{\overrightarrow{AF} \sim \overrightarrow{DG}}$$

e) $\overrightarrow{AH}$ *é equipolente ao segmento* $\overrightarrow{BG}$

$$\boxed{\overrightarrow{AH} \sim \overrightarrow{BG}}$$

f) $\overrightarrow{AC}$ *é equipolente ao segmento* $\overrightarrow{EG}$

$$\boxed{\overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{EG}}$$

g) $\overrightarrow{AG}$ *é equipolente apenas a ele, pois não é equipolente a nenhum dos outros segmentos formado por esses pontos.*

Exercício 1.2 *Encontrar todos os segmentos orientados equipolentes, que podem ser formados com os pontos do paralelepípedo* $ABCDEFGH$ *da Figura 1.5 (página 13).*

Propiedade 1.1 *Dados três segmentos orientados quaisquer* $\overrightarrow{AB}$*,* $\overrightarrow{CD}$ *e* $\overrightarrow{EF}$*, temos em relação à equipolência as seguintes propriedades:*

E1 – Reflexiva:

Todos os segmentos orientados são equipolentes a si mesmos, ou seja:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{AB}}$$

E2 – Simétrica:

O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é equipolente à $\overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $\overrightarrow{CD}$ é equipolente à $\overrightarrow{AB}$, ou seja:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{AB}}$$

E3 – Transitiva:

Se o segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é equipolente à $\overrightarrow{CD}$ e $\overrightarrow{CD}$ é equipolente à $\overrightarrow{EF}$ então $\overrightarrow{AB}$ é equipolente à $\overrightarrow{EF}$, ou seja:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \text{ e } \overrightarrow{CD} \sim \overrightarrow{EF} \Longrightarrow \overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{EF}}$$

E4 – Paralelogramo:

O segmento orientado $\overrightarrow{AB}$ é equipolente à $\overrightarrow{CD}$ se, e somente se, $\overrightarrow{AC}$ é equipolente à $\overrightarrow{BD}$, ou seja:

$$\boxed{\overrightarrow{AB} \sim \overrightarrow{CD} \Longleftrightarrow \overrightarrow{AC} \sim \overrightarrow{BD}}$$

E5 – Segmento Genérico:

Dado um ponto P qualquer é possível determinar outro ponto Q, de tal forma que $\overrightarrow{PQ} \sim \overrightarrow{AB}$, ou seja, podemos construir em qualquer local do espaço n-dimensional, um segmento equipolente a um outro segmento orientado.

Observação 1.3 *Toda relação definida em um conjunto que é **reflexiva**, **simétrica** e **transitiva** é chamada na matemática de **relação de equivalência**, portanto a equipolência $(\sim)$ entre segmentos orientados é uma relação de equivalência.*

1.4 Vetores

Definição 1.5 (Vetor)
Chamaremos de ***vetor*** $\overrightarrow{AB}$ *como sendo um representante do conjunto formado por todos os segmentos orientados* $\overrightarrow{XY}$ *equipolentes ao segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$*, ou seja,*

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \left\{ \overrightarrow{XY} \text{segmento orientado} \;/\; \overrightarrow{XY} \sim \overrightarrow{AB} \right\}}$$

Observação 1.4 *O vetor* $\overrightarrow{AB}$ *não é o segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$ *como conjunto de pontos, mas um representante do conjunto formado por todos os segmentos orientados que tem a mesma norma, mesma direção e mesmo sentido do um segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$*.*

Observação 1.5 *O vetor determinado pelo segmento orientado* $\overrightarrow{AB}$ *será representado por* $\overrightarrow{AB}$*, ou por uma letra minúscula* $\overrightarrow{u}$*, isto é:*

$$\boxed{\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}}$$

Definição 1.6 (Vetor Nulo)
O vetor determinado por todos os segmentos orientados nulos, será chamado de ***vetor nulo****, denotado por:*

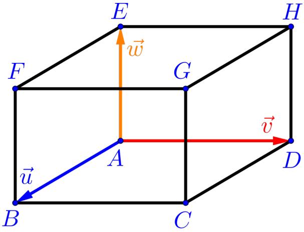
$$\boxed{\overrightarrow{0} = \overrightarrow{AA}}$$

Definição 1.7 (Vetor Unitário)
Um vetor $\overrightarrow{u}$ qualquer é chamado de ***vetor unitário****, se a sua norma for igual a um, isto é:*

$$\boxed{\|\overrightarrow{u}\| = 1}$$

Exemplo 1.4 *Considerando o paralelepípedo dado pelos pontos $ABCDEFGH$ da Figura 1.9 e os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ como sendo os representantes da classe dos segmentos orientados equipolentes à $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ respectivamente.*

Figura 1.9: *Vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ no paralelepípedo $ABCDEFGH$.*



a) O vetor $\overrightarrow{u}$ pode ser representado por um dos elementos do conjunto:

$$\left\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{HG}, \overrightarrow{EF}\right\}$$

b) O vetor $\overrightarrow{v}$ pode ser representado por um dos elemen-

tos do conjunto:

$$\left\{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{FG}, \overrightarrow{EH}\right\}$$

c) *O vetor $\vec{w}$ pode ser representado por um dos elementos do conjunto:*

$$\left\{\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{BF}, \overrightarrow{CG}, \overrightarrow{DH}\right\}$$

ou seja, como representantes dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ temos as seguintes igualdades:

$$\boxed{\vec{u} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{FG} = \overrightarrow{EH}}$$

$$\boxed{\vec{w} = \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{DH}}$$

Desafio:

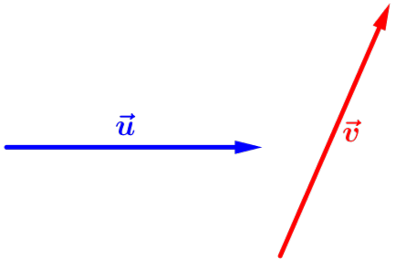
Quantos e quais são os vetores que podem ser representados pelos pontos na Figura (1.9)?

1.5 Operações Elementares com Vetores

1.5.1 Soma

A soma de dois vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ quaisquer (ver Figura 1.10, é obtida graficamente, da seguinte maneira (ver Figura 1.11):

Figura 1.10: *Representação dos vetores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$.



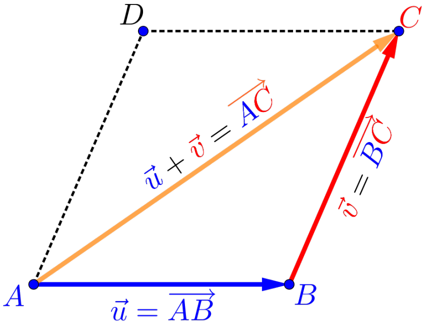
a) Escolha um ponto qualquer A;

b) Em um ponto A qualquer, construa um outro representante para o vetor $\overrightarrow{u}$, ou seja, $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB}$;

c) No ponto ponto final B, construa um outro representante para o vetor $\vec{v}$, ou seja, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$;

d) O vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$ será representado pelo vetor $\overrightarrow{AC}$, com ponto inicial A e ponto final C.

Figura 1.11: *Representação dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ e do vetor soma $\vec{u} + \vec{v}$.*



Propiedade 1.2 *Dados três vetores quaisquer $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ temos em relação a soma dos vetores as seguintes propriedades:*

S1 – Comutatividade da Soma:

Propriedade comutativa da soma entre vetores:

$$\boxed{\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}}$$

Da Figura 1.11, temos que:

$$\vec{u} + \vec{v} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$$
$$\vec{v} + \vec{u} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC}$$

S2 – Elemento Neutro da Soma:

Propriedade da soma do elemento neutro por um vetor:

$$\boxed{\vec{u} = \vec{u} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{u}}$$

Da Figura 1.11, temos que:

$$\vec{u} + \vec{0} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB} = \overrightarrow{AB}$$
$$\vec{0} + \vec{u} = \overrightarrow{AA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AB}$$

S3 – Inverso da Soma:

Propriedade do elemento inverso da soma de um vetor:

$$\boxed{\vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{0} = -\vec{u} + \vec{u}}$$

Da Figura 1.11, temos que:

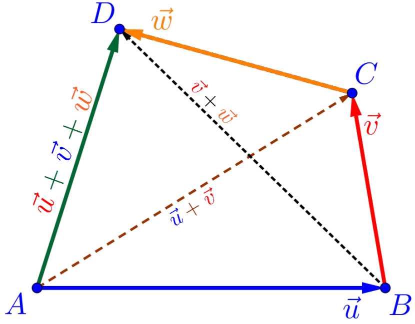
$$\vec{u} + (-\vec{u}) = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$$
$$(-\vec{u}) + \vec{u} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BB} = \vec{0}$$

S_4 – Associatividade da Soma:

Propriedade associativa da soma entre vetores:

$$\boxed{(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})}$$

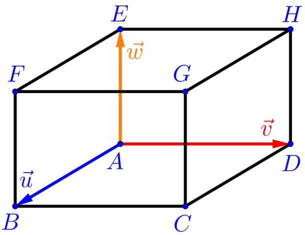
Figura 1.12: *Representação dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ e do vetor soma $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$.*



Da Figura 1.12, temos que:

$$
\begin{aligned}
(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} &= \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\right) + \overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} \\
&= \overrightarrow{AD} \\
\vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}) &= \overrightarrow{AB} + \left(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}\right) \\
&= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BD} \\
&= \overrightarrow{AD}
\end{aligned}
$$

Exemplo 1.5 *Considerando o paralelepípedo dado pelos pontos* $ABCDEFGH$ *e os vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$, *verifique os seguintes resultados:*



a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{HG} + \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{AC}$

c) $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{AG}$

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{HB}$

1.5.2 *Multiplicação por Escalar*

Definição 1.8 (Multiplicação por Escalar) *A multiplicação de um vetor $\overrightarrow{v}$, não nulo, por um escalar $\kappa \in \mathbb{R}$, é o vetor, representado por $\boxed{\kappa\overrightarrow{v}}$, com as seguintes características:*

- *mesma direção do vetor $\overrightarrow{v}$,*
- *norma igual a $\|\kappa\overrightarrow{v}\| = |\kappa| \cdot \|\overrightarrow{v}\|$,*
- *mesmo sentido do vetor $\overrightarrow{v}$, se $\kappa > 0$ e sentido oposto ao vetor $\overrightarrow{v}$ se $\kappa < 0$.*

Observação 1.6 *Qualquer vetor multiplicado por $\kappa = 0$ será o vetor nulo, ou seja,*

$$\boxed{0\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}}$$

e qualquer valor $\kappa \in \mathbb{R}$ multiplicado pelo vetor nulo será o vetor nulo, isto é

$$\boxed{\kappa\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0}}$$

As operações aritméticas comuns também são idênticas com as operações de multiplicação de escalar por vetores, que seguem nas propriedades exibidas a seguir.

Propiedade 1.3 *Dados os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ quaisquer e os números $\kappa, \kappa_1, \kappa_2 \in \mathbb{R}$, temos que:*

ME1 – Distributividade do Escalar

Propriedade distributiva do escalar em relação à soma de vetores:

$$\boxed{\kappa \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \kappa \cdot \vec{u} + \kappa \cdot \vec{v}}$$

ME2 – Distributiva da Soma de Escalares

Propriedade da soma de escalares em relação a um vetor:

$$\boxed{(\kappa_1 + \kappa_2) \cdot \vec{u} = \kappa_1 \cdot \vec{u} + \kappa_2 \cdot \vec{u}}$$

ME3 – Elemento Neutro

Propriedade do elemento neutro da multiplicação pelo vetor:

$$\boxed{1\cdot\vec{u} = \vec{u}}$$

ME4 – Associatividade da Multiplicação:

Propriedade associativa da multiplicação de escalares em relação a um vetor:

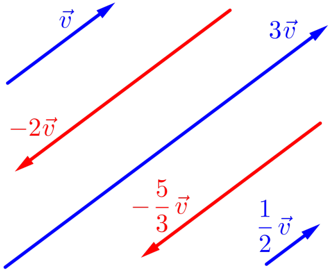
$$\boxed{(\kappa_1\cdot\kappa_2)\cdot\vec{u} = \kappa_1\cdot(\kappa_2\cdot\vec{u}) = \kappa_2\cdot(\kappa_1\cdot\vec{u})}$$

Observação 1.7 *Um conjunto qualquer V onde são definidas duas operações, normalmente denominadas de **soma** e **multiplicação**, e que satisfazem as propriedades da soma **S1**, **S2**, **S3**, **S4** e as propriedades da multiplicação por escalar **ME1**, **ME2**, **ME3** e **ME4** é chamado de **espaço vetorial**. Os elementos desse conjunto com as duas operações $(V, +, \cdot)$ são chamados de vetores (este tema será abordado no próximo semestre na disciplina Introdução à Álgebra Linear).*

Observação 1.8 *Nesse texto utilizaremos apenas o espaço vetorial bidimensional* $(\mathbb{R}^2, +, \cdot)$ *ou o espaço vetorial tridimensional* $(\mathbb{R}^3, +, \cdot)$*, com as operações de soma e multiplicação do conjunto dos números reais* $\mathbb{R}$*.*

Exemplo 1.6 *Na Figura 1.13, a partir do vetor $\vec{v}$, observe os vetores:*

Figura 1.13: *Representação dos vetores $\vec{v}$, $-2\vec{v}$, $3\vec{v}$, $-\frac{5}{3}\vec{v}$ e $\frac{1}{2}\vec{v}$.*



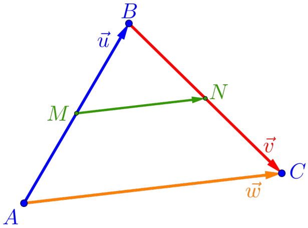
a) $\boxed{3\vec{v}}$ *é o vetor com mesmo sentido e com o triplo do comprimento do vetor $\vec{v}$;*

b) $\boxed{-2\vec{v}}$ *é o vetor com sentido oposto e com o dobro do comprimento do vetor $\vec{v}$;*

c) $\boxed{\frac{1}{2}\vec{v} = \frac{\vec{v}}{2}}$ *é o vetor com mesmo sentido e com a metade do comprimento do vetor $\vec{v}$.*

d) $\boxed{-\frac{5}{3}\vec{v} = -\frac{5\vec{v}}{3}}$ *é o vetor com sentido oposto e com cinco terços do comprimento do vetor* $\vec{v}$*;*

Exemplo 1.7 *Considere um triângulo* ABC *qualquer, e os pontos* M *e* N *como pontos médios dos segmentos* $\overline{AB}$ *e* $\overline{BC}$ *respectivamente e* $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ *e* $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, *como exibido no triângulo abaixo, logo:*



a) $\vec{u} + \vec{v} = \vec{w}$;

b) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB} = \dfrac{1}{2}\vec{u}$ *e*

c) $\overrightarrow{BN} = \overrightarrow{NC} = \dfrac{1}{2}\vec{v}$, *pois* M *e* N *são pontos médios;*

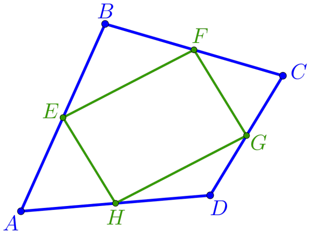
d) $\overrightarrow{MN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \dfrac{1}{2}\vec{w}$, *pois*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{MN} &= \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}\\ &= \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}\\ &= \frac{1}{2}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{w}}$$

e) *Além de mostrar que o segmento* $\overline{MN}$ *é paralelo ao segmento* $\overline{AC}$, *mostramos também que o segmento* $\overline{MN}$ *tem exatamente a metade do comprimento do segmento* $\overline{AC}$.

Exemplo 1.8 *Dado um quadrilátero $ABCD$ qualquer e pontos E, F, G e H como pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ e $\overline{DA}$ respectivamente, exemplificado como na figura abaixo, então $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ e $\overrightarrow{HE} = \overrightarrow{GF}$, ou seja, $EFGH$ é um paralelogramo.*



Exemplo 1.9 *Dado um vetor não nulo* $\vec{v} \neq \vec{0}$ *qualquer, o vetor*

$$\boxed{\vec{u} = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v}}$$

é um vetor unitário, ou seja, sua norma é igual a 1*, pois:*

$$\begin{aligned} \|\vec{u}\| &= \left\| \frac{1}{\|\vec{v}\|}\vec{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\vec{v}\|} \right| \cdot \|\vec{v}\| \\ &= \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \|\vec{v}\| = \frac{\|\vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = 1 \end{aligned}$$

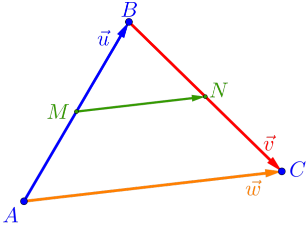
1.6 Combinação Linear

Definição 1.9 (Combinação Linear)
Diremos que um vetor $\overrightarrow{v}$ *é uma* ***combinação linear*** *dos (é gerado pelos)* n*-vetores* $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$, ..., $\overrightarrow{u}_n$ *se existirem* n*-números reais* κ_1, κ_2, κ_3, ..., κ_n, *tais que o vetor* $\overrightarrow{v}$ *possa ser formado pela soma:*

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \kappa_1 \overrightarrow{u}_1 + \kappa_2 \overrightarrow{u}_2 + \kappa_3 \overrightarrow{u}_3 + \cdots + \kappa_n \overrightarrow{u}_n}$$

Observação 1.9 *Os números* κ_1, κ_2, κ_3, ..., κ_n *são chamados de* ***coeficientes*** *do vetor* $\overrightarrow{v}$ *em relação aos vetores* $\overrightarrow{u}_1$, $\overrightarrow{u}_2$, $\overrightarrow{u}_3$, ..., $\overrightarrow{u}_n$.

Exemplo 1.10 *Considere um triângulo ABC qualquer, e os pontos M e N como pontos médios dos segmentos $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ respectivamente e $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{BC}$ e $\vec{w} = \overrightarrow{AC}$, como exibido no triângulo abaixo, logo:*



a) $\overrightarrow{MN}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *pois existem coeficientes tais que:*

$$\boxed{\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v}}$$

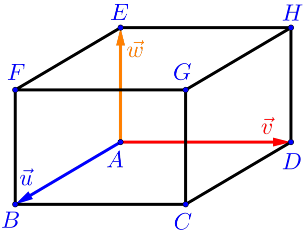
b) $\vec{w}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *pois existem coeficientes tais que:*

$$\boxed{\vec{w} = 1\vec{u} + 1\vec{v}}$$

c) *$\vec{w}$ é uma combinação linear do vetor $\overrightarrow{MN}$ pois existe um coeficiente tal que:*

$$\boxed{\vec{w} = 2\overrightarrow{MN}}$$

Exemplo 1.11 *Considerando o paralelepípedo dado pelos pontos* $ABCDEFGH$ *e os vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$, *temos:*



a) $\overrightarrow{AG}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *pois existem coeficientes tais que:*

$$\boxed{\overrightarrow{AG} = 1\vec{u} + 1\vec{v} + 1\vec{w}}$$

b) $\overrightarrow{BE}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *pois existem coeficientes tais que:*

$$\boxed{\overrightarrow{BE} = -1\vec{u} + 0\vec{v} + 1\vec{w}}$$

c) $\overrightarrow{BE}$ *é também uma combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{w}$ *pois existem coeficientes tais que:*

$$\boxed{\overrightarrow{BE} = -1\overrightarrow{u} + 1\overrightarrow{w}}$$

d) $\overrightarrow{BE}$ **não** *é uma combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *pois, para determinar o vetor é necessário usar o vetor* $\overrightarrow{w}$.

Exercício 1.3 *Considerando os vetores* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{w}$ *da figura do exemplo anterior, verifique que:*

a) $\overrightarrow{BG}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$?

b) $\overrightarrow{BG}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$?

c) $\overrightarrow{CE}$ *é uma combinação linear dos vetores* $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ *e* $\overrightarrow{w}$?

1.7 Dependência Linear

Definição 1.10 (Dependência Linear)
Diremos que os n-vetores

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n$$

*são **linearmente dependentes** (**LD**), se um dos vetores, por exemplo, $\vec{v}_i$ for cominação linear dos outros $(n-1)$ vetores, isto é:*

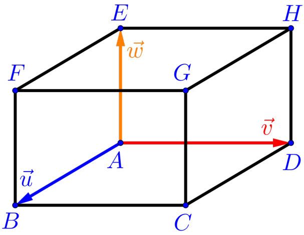
$$\boxed{\vec{v}_i = \kappa_1 \vec{v}_1 + \kappa_2 \vec{v}_2 + \cdots + \kappa_n \vec{v}_n}$$

*caso contrário, diremos que os n-vetores são **linearmente independentes** (**LI**).*

Apesar da definição de dependência linear ser geral, no nosso texto trabalharemos no máximo no espaço tridimensional, portanto teremos algumas relações geométricas, "visíveis", em relação à dependência linear, quais sejam:

- Dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são LD se os mesmos tiverem a mesma direção, ou seja, se um vetor for múltiplo do outro vetor: $\vec{u} = \kappa\vec{v}$;
- Três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LD se são paralelos a um plano;
- Quatro vetores são sempre LD no espaço tridimensional.

Exemplo 1.12 *Considerando os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ da figura abaixo, temos que os vetores:*



a) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AD}$ *são LD;*

b) $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{DC}$ *são LD;*

c) $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ *são LI (verifique!).*

1.8 *Base do Espaço Vetorial*

Definição 1.11 (Base)

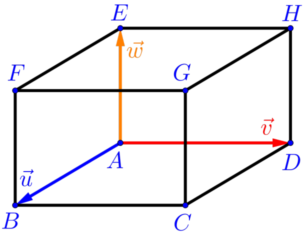
Dado um conjunto ordenado β *formado por* n*-vetores do espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *(espaço com* n *dimensões):*

$$\boxed{\beta = \left\{ \overrightarrow{v}_1, \overrightarrow{v}_2, \ldots, \overrightarrow{v}_n \right\}}$$

diremos que β *é uma* ***base*** *para o espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *se esses* n*-vetores* $\overrightarrow{v}_1$*,* $\overrightarrow{v}_2$*, ...,* $\overrightarrow{v}_n$ *são linearmente independentes (LI) em* $\mathbb{R}^n$*. Portanto qualquer vetor* $\overrightarrow{u}$ *do espaço vetorial* $\mathbb{R}^n$ *é determinado/escrito de modo único como combinação linear dos* n*-vetores na forma:*

$$\boxed{\overrightarrow{u} = \kappa_1 \overrightarrow{v}_1 + \kappa_2 \overrightarrow{v}_2 + \cdots + \kappa_n \overrightarrow{v}_n}$$

Exemplo 1.13 *Considerando os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ da figura abaixo, temos que os vetores:*



a) $\beta_a = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *é uma base do* $\mathbb{R}^3$, *pois são* 3 *vetores LI no espaço tridimensional;*

b) $\beta_b = \{\vec{v}, \vec{u}, \vec{w}\}(\neq \beta_a)$ *é uma base do* $\mathbb{R}^3$, *pois são* 3 *vetores LI no espaço tridimensional;*

c) $\beta_c = \left\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}\right\}$ *é uma base do* $\mathbb{R}^3$, *pois são* 3 *vetores LI no espaço tridimensional;*

d) $\beta_d = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ *não é uma base do* $\mathbb{R}^3$, *pois é um conjunto com apenas* 2 *vetores;*

e) $\beta_e = \{\vec{u}, \vec{v}\}$ *é uma base do* $\mathbb{R}^2$*, pois são* 2 *vetores LI no espaço bidimensional;*

f) $\beta_f = \{\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AC}\}$ *não é uma base do* $\mathbb{R}^3$*, pois são* 3 *vetores LD;*

g) $\beta_g = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}, \overrightarrow{AG}\}$ *não é uma base do* $\mathbb{R}^3$*, pois é um conjunto com* 4 *vetores.*

Definição 1.12 (Base Ortogonal)
Uma base

$$\boxed{\beta = \left\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\right\}}$$

para o espaço $\mathbb{R}^n$ *é chamada de* ***base ortogonal*** *se dois a dois os seus vetores são ortogonais e de* ***base ortonormal*** *se além de ser ortogonal, os seus vetores são todos unitários, ou seja, de norma igual a* 1 $(\|\vec{v}_i\| = 1)$.

Exemplo 1.14 *Considerando os vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *da figura 1.9, temos que:*

a) $\beta_a = \{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ *é uma base ortogonal do* $\mathbb{R}^3$*, pois seus vetores são perpendiculares dois a dois;*

b) $\beta_b = \left\{\dfrac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}, \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}, \dfrac{\vec{w}}{\|\vec{w}\|}\right\}$ *é uma base ortonormal do* $\mathbb{R}^3$*, pois seus vetores são perpendiculares dois a dois e são unitários.*

A vantagem de se trabalhar em uma base ortonormal é que a mesma facilita a visualização tridimensional (pense na quina do chão de sua sala/quarto), bem como as futuras operações algébricas que surgirão no decorrer da disciplina.

Teorema 1.1 (Linearmente Independentes)
Os vetores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \ldots, \vec{v}_n$ são linearmente independentes (LI) se, e somente se, a equação vetorial

$$\boxed{\kappa_1 \vec{v}_1 + \kappa_2 \vec{v}_2 + \kappa_3 \vec{v}_3 + \cdots + \kappa_n \vec{v}_n = \vec{0}}$$

possuir como ***única*** *solução:*

$$\boxed{\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = \cdots = \kappa_n = 0}$$

ou seja, apenas a solução trivial nula.

Demonstração: *Na demonstração deste teorema, usaremos o método da redução ao absurdo, ou seja, nega-se a tese e chega-se a uma contradição.*

[IDA] Hipótese:

Vamos supor que são LI os vetores:

$$\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_i, \ldots, \vec{v}_n$$

Se a equação vetorial

$$\kappa_1 \vec{v}_1 + \kappa_2 \vec{v}_2 + \cdots + \kappa_i \vec{v}_i + \cdots + \kappa_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

possuir uma solução não trivial, ou seja, um dos coeficientes não é nulo, por exemplo, $\kappa_i \neq 0$ $(1 \leq i \leq n)$. Neste caso, temos $\kappa_i \vec{v}_i$ com a seguinte combinação linear:

$$\kappa_i \vec{v}_i = -\kappa_1 \vec{v}_1 - \kappa_2 \vec{v}_2 - \cdots - \kappa_n \vec{v}_n$$

$$\vec{v}_i = -\frac{\kappa_1}{\kappa_i} \vec{v}_1 - \frac{\kappa_2}{\kappa_i} \vec{v}_2 - \cdots - \frac{\kappa_n}{\kappa_i} \vec{v}_n$$

ou seja, existe uma combinação linear entre esses vetores, logo são LD, o que é um **absurdo**, pois por hipótese os vetores são LI.

[VOLTA] Hipótese:
Vamos considerar que a equação vetorial

$$\kappa_1 \vec{v}_1 + \kappa_2 \vec{v}_2 + \cdots + \kappa_i \vec{v}_i + \cdots + \kappa_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

só admita a solução trivial

$$\kappa_1 = \kappa_2 = \cdots = \kappa_i = \cdots = \kappa_n = 0$$

Se um dos vetores for não nulo, por exemplo $\vec{v}_i \neq \vec{0}$, for combinação linear dos outros $n - 1$ vetores $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$, teremos

$$\vec{v}_i = \tau_1 \vec{v}_1 + \tau_2 \vec{v}_2 + \cdots + \tau_n \vec{v}_n$$

logo podemos escrever a igualdade:

$$\tau_1 \vec{v}_1 + \tau_2 \vec{v}_2 + \cdots + (-1 \vec{v}_i) + \cdots + \tau_n \vec{v}_n = \vec{0}$$

ou seja, τ_1, τ_2, ..., $\tau_i = -1$, ..., τ_n também é uma outra solução da equação, o que é um **absurdo** pois, por hipótese, a equação só admite uma única solução, a trivial.

Observação 1.10 *Note que a solução trivial*

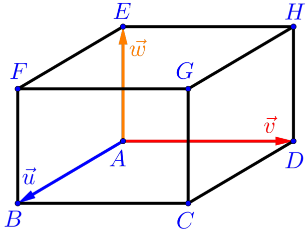
$$\kappa_1 = \kappa_2 = \cdots = \kappa_i = \cdots = \kappa_n = 0$$

é sempre solução para a equação, pois

$$0\vec{v}_1 + 0\vec{v}_2 + 0\vec{v}_3 + \cdots + 0\vec{v}_n = \vec{0}$$

*mas a força do teorema é a exigência da solução da equação vetorial ser **única**.*

Exemplo 1.15 *Considerando a figura abaixo, verifique que o conjunto* $\beta = \left\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}\right\}$ *também é uma base do* $\mathbb{R}^3$.



Solução: Para verificar que $\left\{\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AH}\right\}$ *é base, basta ver que são* 3 *vetores LI em* $\mathbb{R}^3$. *A quantidade de vetores está óbvia e para mostrar que são LI utilizaremos o teorema acima, mas para tanto utilizaremos dois fatos:*

- *Os vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *são LI, pois não são paralelos a um plano, temos pelo teorema acima que uma* *equação vetorial:*

$$\boxed{\kappa_1 \vec{u} + \kappa_2 \vec{v} + \kappa_3 \vec{w} = \vec{0}}$$

possui solução única:

$$\boxed{\kappa_1 = \kappa_2 = \kappa_3 = 0}$$

- *Os vetores* $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ *e* $\overrightarrow{AH}$ *são combinações lineares dos vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *podemos escrevê-los da forma:*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AC} &= 1\vec{u} + 1\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{u} + \vec{v} \\
\overrightarrow{AF} &= 1\vec{u} + 0\vec{v} + 1\vec{w} = \vec{u} + \vec{w} \\
\overrightarrow{AH} &= 0\vec{u} + 1\vec{v} + 1\vec{w} = \vec{v} + \vec{w}
\end{aligned}$$

Vamos montar a equação exigida no Teorema 1.1 e verificar que a equação vetorial:

$$\boxed{\tau_1 \overrightarrow{AC} + \tau_2 \overrightarrow{AF} + \tau_3 \overrightarrow{AH} = \vec{0}}$$

possui solução única:

$$\boxed{\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0}$$

De fato:

$$\begin{aligned} \tau_1\left(\vec{u} + \vec{v}\right) + \tau_2\left(\vec{u} + \vec{w}\right) + \tau_3\left(\vec{v} + \vec{w}\right) &= \vec{0} \\ (\tau_1 + \tau_2)\vec{u} + (\tau_1 + \tau_3)\vec{v} + (\tau_2 + \tau_3)\vec{w} &= \vec{0} \end{aligned}$$

Note que a última equação acima possui solução única, pois:

$$\begin{aligned} \kappa_1 &= (\tau_1 + \tau_2) = 0 \\ \kappa_2 &= (\tau_1 + \tau_3) = 0 \\ \kappa_3 &= (\tau_2 + \tau_3) = 0 \end{aligned}$$

O que resulta em um sistema de três equações e três incógnitas:

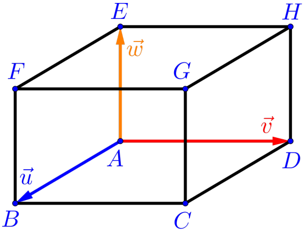
$$\begin{cases} \tau_1 + \tau_2 = 0 \\ \tau_1 + \tau_3 = 0 \\ \tau_2 + \tau_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é a trivial e única:

$$\boxed{\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = 0}$$

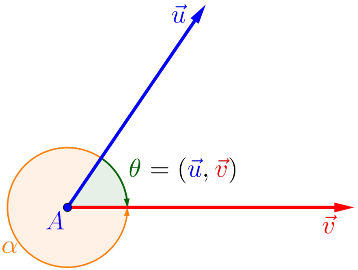
Pelo teorema 1.1 os 3 *vetores* $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AF}$ *e* $\overrightarrow{AH}$ *são LI, logo* β *é uma base do* $\mathbb{R}^3$.

Exercício 1.4 *Considerando a figura abaixo, verifique se o conjunto* $\beta = \left\{ \overrightarrow{AG}, \overrightarrow{BH}, \overrightarrow{CE} \right\}$ *é uma base do* $\mathbb{R}^3$*.*



1.9 *Ângulos entre Vetores*

Figura 1.14: *Menor ângulo* $\theta = (\vec{u}, \vec{v})$ *entre os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*.*

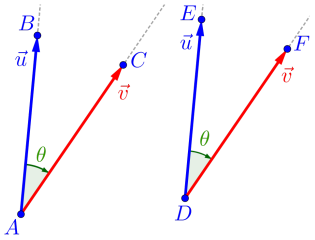


Definição 1.13 (Ângulo)
Vamos considerar o ***ângulo*** *orientado, denotado por* $(\vec{u}, \vec{v})$*, entre dois vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *não nulos, como sendo a medida do menor ângulo entre dois representantes quaisquer dos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, tendo ambos o mesmo ponto inicial, com*

$$-\pi\,\text{rad} \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq \pi\,\text{rad} \qquad \textit{(radianos)}$$
$$-180^o \leq (\vec{u}, \vec{v}) \leq 180^o \qquad \textit{(graus)}$$

Se $\vec{u} = \vec{0}$ *ou* $\vec{v} = \vec{0}$ *o ângulo não está definido.*

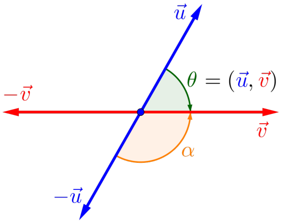
Observação 1.11 *Note que, independente da escolha dos representantes dos vetores* $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$ *e* $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DE}$ *(ver figura abaixo), a medida* θ *do ângulo* $\widehat{BAC}$ *é igual à medida* θ *do ângulo* $\widehat{EDF}$*, pois:*



- *a reta definida pelos pontos* A e C *é paralela à reta definida pelos pontos* D e F *e*
- *a reta definida pelos pontos* A e B *é paralela à reta definida pelos pontos* D e E*.*

Observação 1.12 *Os ângulos podem ser representados em graus ou em radianos, com* 180^o *(graus) equivalente à* $\pi\,\mathrm{rad}$ *(radianos).*

Observação 1.13 *Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos e um número $\kappa \in \mathbb{R}$, temos:*



- $(\vec{u}, \vec{u}) = 0^o$ *e* $(-\vec{u}, \vec{u}) = 180^o$
- $(\vec{u}, \vec{v}) = -(\vec{v}, \vec{u})$ *e* $(-\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, -\vec{v})$
- *Se* $\kappa > 0$ *então* $(\kappa\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$
- *Se* $\kappa < 0$ *então* $(\kappa\vec{u}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v}) - 180^o$

Definição 1.14 (Vetores Ortogonais)
Diremos que dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ***ortogonais*** *("perpendiculares") se*

$$\boxed{(\vec{u}, \vec{v}) = 90^o} \left(= \frac{\pi}{2}\,\mathrm{rad}\right)$$

Denotaremos neste caso como $\vec{u} \perp \vec{v}$.