Retas

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

(Notas - 27/3/2023)

Sérgio de Albuquerque Souza

Sumário

Capítulo 5

Retas

5.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos e definiremos as retas, através de suas equações vetoriais e algébricas, utilizando de vetores e de suas operações e produtos.

Uma das possibilidades para a definição de uma reta é a interseção de dois planos não paralelos (pense na interseção do plano do chão com o plano de uma parede: é uma reta).

Sempre que possível, tente desenhar, fazer um esboço, de uma reta, como será exibido aqui, mas mesmo se não tiver habilidades no desenho, imagine sempre as retas, aqueles que estão ao seu redor, como quinas das paredes, pois será muito importante observar, ou pensar, de como essas reatas podem estar dispostas no espaço tridimensional.

5.2 Problematizando a Temática

Trataremos vários problemas geométricos, como por exemplo, posições relativas entre as retas, bem como calcularemos o ângulo, distâncias e interseções entre estes elementos, utilizando as facilidades dadas pelas propriedades encontradas nos vetores e suas operações elementares e seus produtos, com suas respectivas características geométricas e algébricas.

5.3 *A Reta*

Uma reta pode ser definida de três modos distintos, bastando observar os dados que se dispõe para defini-la, mas esses modos, observando com atenção, se reduzem a um só, ou seja:

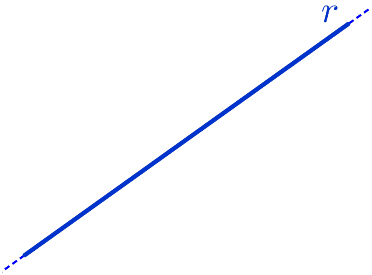
(1) Por 2 pontos ou

(2) Por um ponto e um vetor não nulo ou

(3) Por dois planos.

Para tanto, vamos encontrar uma relação que um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer do espaço tridimensional, tenha que satisfazer para que pertença a uma reta definido por um dos modos acima.

Figura 5.1: *Representação de uma reta* r.



Sempre em mente que utilizaremos as ferramentas e as ideias dadas pelos vetores (e sistemas) e planos estudados nos capítulos anteriores. Usaremos letras latinas minúsculas para representar as retas, como por exemplo:

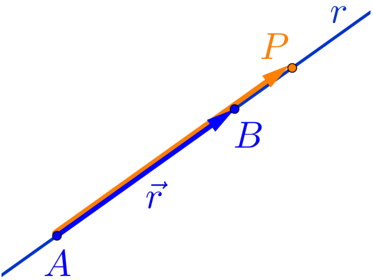
$$a, b, \ldots, r, s, \ldots$$

Vamos representar a reta graficamente por um "pedaço", por um segmento, pois seria impossível representá-la em um espaço limitado, pois a reta é infinita (Figura 5.1).

5.3.1 Dois Pontos

Considere dois pontos distintos A e B quaisquer do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, como na Figura 5.2.

Figura 5.2: *Representação de uma reta* r *definida por dois pontos* A *e* B.



Observe que a condição para que um ponto qualquer $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertencer à reta r é que os vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ sejam paralelos, ou seja, são linearmente dependentes, logo são múltiplos e portanto existe um número κ que resulta a seguinte equação vetorial:

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \kappa \overrightarrow{AB}} \tag{5.1}$$

Definição 5.1 (Vetor Diretor)
*Qualquer vetor não nulo, que dá a direção de uma reta r, é chamado de **vetor diretor da reta** r.*

Em um sistema de coordenadas do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, considerando a reta r definido por dois pontos não distintos dados por:

$$\begin{aligned} A &= (A_x, A_y, A_z) \\ B &= (B_x, B_y, B_z) \end{aligned}$$

e um ponto genérico $P = (x, y, z)$ da reta r. Definindo os vetores $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ teremos:

$$\begin{aligned} \vec{r} = \overrightarrow{AB} &= (r_x, r_y, r_z) \\ \overrightarrow{AP} &= (x - A_x, y - A_y, z - A_z) \end{aligned}$$

Portanto, da equação vetorial (5.1), teremos:

$$\underbrace{(x - A_x, y - A_y, z - A_z)}_{\overrightarrow{AP}} = \kappa \underbrace{(r_x, r_y, r_z)}_{\vec{r} = \overrightarrow{AB}}$$

ou seja, escrevendo cada coordenada da equação vetorial acima separadamente, teremos:

$$\begin{cases} x & - & A_x & = & r_x\kappa \\ y & - & A_y & = & r_y\kappa \\ z & - & A_z & = & r_z\kappa \end{cases}$$

logo isolando as variáveis x, y e z, temos o seguinte sistema de equações, chamado de **sistemas de equações paramétricas da reta** r ou simplesmente de **equações paramétricas da reta**:

$$\boxed{r : \begin{cases} x & = & A_x & + & r_x\kappa \\ y & = & A_y & + & r_y\kappa \\ z & = & A_z & + & r_z\kappa \end{cases}} \tag{5.2}$$

Se nenhuma das coordenadas do vetor diretor $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$ for nula, podemos isolar o parâmetro κ de cada uma das equações (5.2) acima, obtendo

$$\kappa = \frac{x - A_x}{r_x}, \quad \kappa = \frac{y - A_y}{r_y}, \quad \kappa = \frac{z - A_z}{r_z}$$

ou seja, teremos a seguinte igualdade

$$\kappa = \frac{x - A_x}{r_x} = \frac{y - A_y}{r_y} = \frac{z - A_z}{r_z}$$

Definição 5.2 (Equações Simétricas)
O sistema de equações

$$\boxed{r : \frac{x - A_x}{r_x} = \frac{y - A_y}{r_y} = \frac{z - A_z}{r_z}} \tag{5.3}$$

é chamado ***sistema de equações na forma simétrica da reta*** r*, ou simplesmente* ***equações simétricas da reta*** r*.*

Exercício 5.1 *Determinar as equações paramétricas e simétricas da reta* r *que contém os pontos* $A = (3, 0, 1)$ *e* $B = (2, 1, 2)$*, e verificar se o ponto* $E = (1, 2, 3)$ *e a origem do sistema pertencem à reta* r*.*

Solução: Seja $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer da reta r e definimos os vetores:

$$\begin{aligned} \vec{r} = \overrightarrow{AB} &= (2-3, 1-0, 2-1) = (-1, 1, 1) \\ \overrightarrow{AP} &= (x-3, y-0, z-1) = (x-3, y, z-1) \end{aligned}$$

- Da equação vetorial (5.1) temos:

$$\underbrace{(x-3, y, z-1)}_{\overrightarrow{AP}} = \kappa \underbrace{(-1, 1, 1)}_{\vec{r}}$$

que resulta nas equações paramétricas da reta r:

$$\boxed{r : \begin{cases} x &= & 3 & - & 1\kappa \\ y &= & 0 & + & 1\kappa \\ z &= & 1 & + & 1\kappa \end{cases}}$$

Isolando o parâmetro κ das equações acima, obtemos as equações simétricas da reta r:

$$\boxed{r : \frac{x-3}{-1} = \frac{y-0}{1} = \frac{z-1}{1}}$$

ou simplificando

$$\boxed{r : 3 - x = y = z - 1}$$

• Para verificar que o ponto $E = (1, 2, 3)$ e a origem $O = (0, 0, 0)$, pertencem à reta r, basta substituir as três coordenadas dos pontos nas equações simétricas da reta, se as igualdades forem satisfeitas, o ponto pertence à reta, caso contrário, não pertence, logo:

- Para a origem do sistema de coordenadas, o ponto $O = (0, 0, 0)$ temos:

$$\underbrace{\frac{\overset{x}{(0)} - 3}{-1}}_{=3} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{\overset{y}{(0)} - 0}{1}}_{=0} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{\overset{z}{(0)} - 1}{1}}_{=-1}$$

como $3 \neq 0 \neq -1$, então a origem $\boxed{O \notin r}$.

- Para o ponto $E = (1, 2, 3)$ temos:

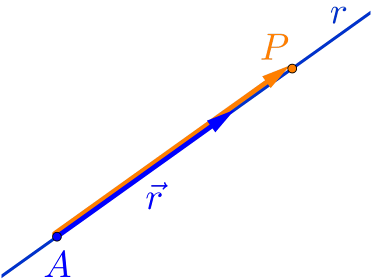
$$\underbrace{\frac{\overset{x}{(1)} - 3}{-1}}_{=2} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{\overset{y}{(2)} - 0}{1}}_{=2} \overset{?}{=} \underbrace{\frac{\overset{z}{(3)} - 1}{1}}_{=2}$$

como $2 = 2 = 2$, então ponto $\boxed{E \in r}$.

5.3.2 *Um Ponto e Um Vetor*

Considere um ponto A qualquer do espaço tridimensional e um vetor $\vec{r}$, não nulo, como na figura 5.3.

Figura 5.3: *Representação de uma reta r definida por um ponto A e um vetor $\vec{r}$.*

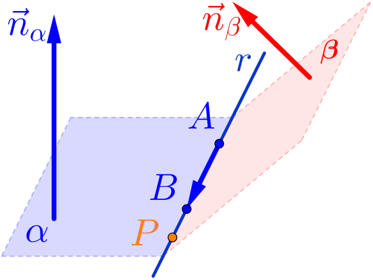


Observe que a condição para que um ponto qualquer $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertencer à reta r é a mesma utilizada anteriormente para uma reta definidas por dois pontos, pois só foram utilizados, de fato, o ponto A e o vetor diretor $\vec{r} = \overrightarrow{AB}$.

5.3.3 *Dois Planos*

Considere dois planos concorrentes α e β quaisquer, ou seja, não paralelos e não coincidentes, como na figura 5.4.

Figura 5.4: *Representação de uma reta r definida por dois planos α e β.*



Para determinar a reta r interseção destes dois planos α e β, vamos considerá-los definidos pelas suas equações normais:

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$
$$\beta : px + qy + rz + s = 0$$

logo a reta r é definida como a solução do sistema:

$$r:\begin{cases} ax+by+cz+d=0\\ px+qy+rz+s=0\end{cases}$$

Lembre-se que para definir uma reta, são necessários 2 pontos ou 1 ponto e um vetor diretor.

• Dois Pontos:

Neste caso podemos determinar duas soluções para o sistema acima, não necessariamente tendo que resolver o sistema.

Será que esta reta tem algum ponto com a primeira coordenada sendo 0*?*

- Fazendo $x=0$, o sistema acima, fica apenas com duas variáveis, que é bem mais fácil de resolver, ou seja,

$$\begin{cases} by+cz+d=0\\ qy+rz+s=0\end{cases}$$

Se tiver solução, achamos o primeiro ponto, caso contrário, faça $y = 0$ ou $z = 0$ ou qualquer outro valor para uma das coordenadas.

- Para achar um segundo ponto, siga a mesma procedimento de achar o primeiro ponto.

- Um ponto e um vetor diretor:

Neste caso determinar um ponto como anteriormente. Observe que um vetor diretor $\overrightarrow{r}$ da reta r é perpendicular aos vetores normais dos planos α e β, ou seja,

$$\overrightarrow{r} \perp \overrightarrow{n}_\alpha \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{r} \perp \overrightarrow{n}_\beta$$

logo podemos determinar um vetor diretor $\overrightarrow{r}$ como sendo o produto vetorial:

$$\boxed{\overrightarrow{r} = \overrightarrow{n}_\alpha \times \overrightarrow{n}_\beta}$$

Exercício 5.2 *Determinar as equações paramétricas e simétricas da reta r dada pela interseção dos planos*

$$\alpha : 1x + 1y + 1z + 1 = 0$$
$$\beta : 2x + 3y + z = 0$$

Solução:

1º Vamos primeiro determinar esta reta r, como solução do sistema (S) abaixo:

$$(S)\left\{\begin{array}{ccccccc} 1x & + & 1y & + & 1z & = & -1 \\ 2x & + & 3y & + & 1z & = & 0 \end{array}\right.$$

Para resolver este sistema (S) vamos usar o método do escalonamento, com as operações linhas-equivalentes na matriz ampliada do sistema (S).

As operações chamadas **linhas-equivalentes** são operações básicas realizadas nas linhas da matriz:

(1) Trocar a linha L_i pela linha L_j:

$$\boxed{L_i \leftrightarrow L_j}$$

(2) Multiplicar uma linha L_i por um escalar não nulo κ:

$$\boxed{\kappa \cdot L_i \to L_i}$$

(3) Somar uma linha L_i com o múltiplo da linha L_j:

$$\boxed{L_i + \kappa \cdot L_j \to L_i}$$

Seguindo esses passos podemos escalonar qualquer sistema e determinar as soluções do sistema.

Aplicando o escalonamento na matriz ampliada do sistema (S), teremos:

$$(S) \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ L_2 - 2L_1 \to L_2 \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{array}{l} L_1 - L_2 \to L_1 \\ \end{array}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

Resultando no sistema equivalente ao sistema (S) de resolução mais simplificada:

$$\left\{ \begin{array}{ccccccc} x & & & + & 2z & = & -3 \\ & & y & - & z & = & 2 \end{array} \right.$$

escolhendo $\boxed{z = \kappa}$ e substituindo no sistema equivalente, obtemos as equações paramétricas da reta

$$\boxed{r : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & -3 & - & 2\kappa \\ y & = & 2 & + & 1\kappa \\ z & = & 0 & + & 1\kappa \end{array} \right.}$$

e destas, obtemos as equações simétricas da reta r:

$$\boxed{r : \frac{x+3}{-2} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}}$$

2º Se não gostar de escalonamento, podemos então determinar dois pontos da reta r, atribuindo valores para uma das variáveis, por exemplo:

* Para a variável $\boxed{y = 0}$, reduzimos o sistema (S) para o sistema:

$$\begin{cases} x + z = -1 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$$

tendo como solução $\boxed{x = 1}$ e $\boxed{z = -2}$, ou seja, um primeiro ponto da reta r será dada por $\boxed{A = (1, 0, -2)}$;

* Para a variável $\boxed{z = 0}$, reduzindo o sistema (S) para o sistema:

$$\begin{cases} x + y = -1 \\ 2x + 3y = 0 \end{cases}$$

tendo como solução $\boxed{x = -3}$ e $\boxed{y = 2}$, ou seja, um segundo ponto da reta r será $\boxed{B = (-3, 2, 0)}$. Logo um vetor diretor da reta r é o vetor

$$\vec{r} = \overrightarrow{AB} = (-4, 2, 2)$$

e portanto, as equações paramétricas da reta são:

$$\boxed{r : \begin{cases} x & = & 1 & - & 4\kappa \\ y & = & 0 & + & 2\kappa \\ z & = & -2 & + & 2\kappa \end{cases}}$$

e destas equações, obtemos as equações simétricas

$$\boxed{r : \frac{x-1}{-4} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{2}}$$

3º Pode-se também determinar um ponto e um vetor diretor da reta.

* Para encontrar um ponto, fazemos como anteriormente, logo vamos utilizar o ponto $\boxed{A = (1, 0, -2)}$.

* Para determinar um vetor diretor da reta r, basta calcular o produto vetorial entre os vetores normais dos planos α e β, ou seja:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \vec{n}_{\alpha} \times \vec{n}_{\beta} \\ &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}\end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{r} = -2\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}}$$

Portanto as equações paramétricas da reta são:

$$\boxed{r : \left\{ \begin{array}{ccccc} x & = & 1 & - & 2\kappa \\ y & = & 0 & + & 1\kappa \\ z & = & -2 & + & 1\kappa \end{array} \right.}$$

e destas, obtemos as equações simétricas

$$\boxed{r : \frac{x-1}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z+2}{1}}$$

Observação 5.1 *Apesar das equações paramétricas e simétricas da reta* r*, encontradas no exercício acima, serem diferentes, elas representam a mesma reta* r*, o que as diferencia é a escolha de um ponto inicial e de um "novo" vetor diretor, múltiplo do vetor diretor obtido anteriormente.*

5.4 Posição Relativa entre Retas

Para o estudo de posições relativas, é importante "enxergar" as retas e os planos, juntamente com os elementos que o definem, ou seja, FAÇA vários esboços, por exemplo, duas retas paralelas, uma reta perpendicular a um plano, etc.

Para resolver problemas, como ângulos, distâncias e interseções, envolvendo retas, não como eles estão definidos pelas suas equações, mas genericamente, é necessário saber como eles estão dispostos no espaço, ou seja, em que posição um está em relação ao outro.

Existem quatro possibilidades para a posição relativa entre duas retas, ou seja, as retas podem ser:

(1) Coincidentes;

(2) Paralelas;

(3) Concorrentes ou

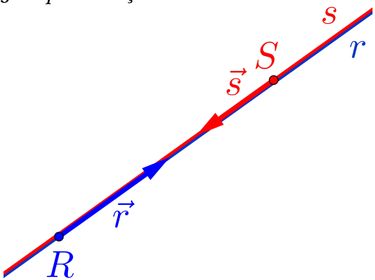
(4) Reversas.

Vamos considerar, para efeito de estudos das posições relativas:

- A reta r definida pelo ponto $R = (R_x, R_y, R_z)$ e pelo vetor diretor $\overrightarrow{r} = (r_x, r_y, r_z)$ e
- A reta s definida pelo ponto $S = (S_x, S_y, S_z)$ e pelo vetor diretor $\overrightarrow{s} = (s_x, s_y, s_z)$.

5.4.1 Retas Coincidentes

Figura 5.5: *Representação de duas retas coincidentes* r *e* s.



Observando as duas retas r e s paralelas coincidentes na figura 5.5, concluímos que:

- Representam a mesma reta;
- Os vetores diretores $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$ são paralelos, ou seja,
$$\boxed{\overrightarrow{r} = \kappa \overrightarrow{s}}$$
- O ponto $\boxed{S \in r}$ e o ponto $\boxed{R \in s}$;

- O vetor $\overrightarrow{RS}$ é paralelo aos vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$;

- A interseção entre as retas r e s é a própria reta, ou seja,

$$\boxed{r \cap s = r (\equiv s)}$$

- O ângulo entre as retas r e s é nulo, ou seja,

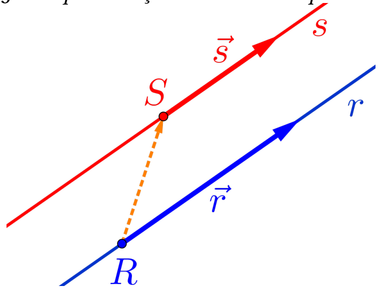
$$\boxed{(r, s) = 0^o}$$

- A distância entre as retas r e s é nula, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\,(r, s) = 0}$$

5.4.2 *Retas Paralelas*

Figura 5.6: *Representação de duas retas paralelas r e s.*



Observando as duas retas r e s paralelas distintas na figura 5.6, concluímos que:

- Os vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ são paralelos, ou seja,

$$\boxed{\vec{r} = \kappa \vec{s}}$$

- O ponto $\boxed{S \notin r}$ e o ponto $\boxed{R \notin s}$;

- O vetor $\overrightarrow{RS}$ **não é** paralelo aos vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$;

- A área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\overrightarrow{RS}$ é positiva, ou seja,

$$\left\| \vec{r} \times \overrightarrow{RS} \right\| > 0$$

- A interseção entre as retas r e s é vazia, ou seja,

$$\boxed{r \cap s = \{\ \} = \emptyset}$$

- O ângulo entre as retas r e s é nulo, ou seja,

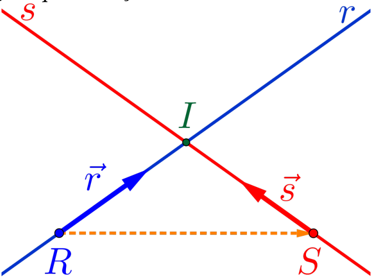
$$\boxed{(r, s) = 0^o}$$

- A distância entre as retas r e s é positiva, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\left(r, s\right) > 0}$$

5.4.3 *Retas Concorrentes*

Figura 5.7: *Representação de duas retas concorrentes r e s.*



Observando as duas retas r e s concorrentes na figura 5.7, concluímos que:

- Os vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ **não são** paralelos, ou seja,

$$\boxed{\vec{r} \neq \kappa \vec{s}}$$

- Os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{SR}$ podem ser representados em um plano, logo são LD;

- O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\overrightarrow{r}$, $\overrightarrow{s}$ e $\overrightarrow{SR}$ é nulo, ou seja,

$$\left[\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s}, \overrightarrow{SR}\right] = 0$$

- A interseção entre as retas r e s é um ponto, ou seja,

$$\boxed{r \cap s = I}$$

- O ângulo entre as retas r e s é agudo, reto ou obtuso, ou seja, está entre

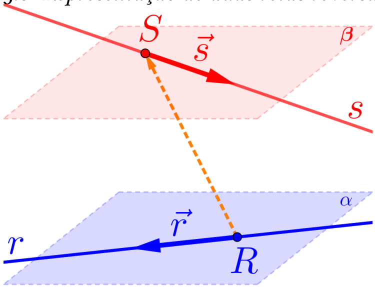
$$\boxed{0^o < (r, s) < 180^o}$$

- A distância entre as retas r e s é nula, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\,(r, s) = 0}$$

5.4.4 *Retas Reversas*

Figura 5.8: *Representação de duas retas reversas r e s.*



Observando as duas retas r e s reversas na figura 5.8, ou seja, as retas estão em planos paralelos distintos, concluímos que:

- Os vetores diretores $\vec{r}$ e $\vec{s}$ não são paralelos, ou seja,

$$\boxed{\vec{r} \neq \kappa \vec{s}}$$

- Os vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{RS}$ não podem ser representados em um plano, logo são LI;

- O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{r}$, $\vec{s}$ e $\overrightarrow{RS}$ é positivo, ou seja,

$$\left|\left[\vec{r}, \vec{s}, \overrightarrow{RS}\right]\right| > 0$$

- A interseção entre as retas r e s é vazia, ou seja,

$$\boxed{r \cap s = \{\ \} = \emptyset}$$

- O ângulo entre as retas r e s é agudo, reto ou obtuso, ou seja, está entre

$$\boxed{0^o < (r, s) < 180^o}$$

- A distância entre as retas r e s é positiva, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\,(r, s) > 0}$$

5.5 Posição Relativa entre Retas e Planos

Existem três possibilidades para a posição relativa entre uma reta e um plano, ou seja, eles podem ser:

(1) A reta contida no plano;

(2) A reta paralela ao plano ou

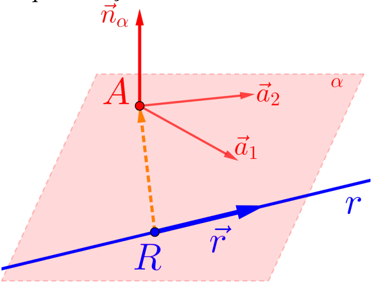
(3) A reta concorrente ao plano.

Vamos considerar, para efeito de estudos das posições relativas:

- A reta r definida pelo ponto R e pelo vetor diretor $\overrightarrow{r}$ e
- O plano α definido pelo ponto A e pelo vetor normal $\overrightarrow{n}_{\alpha}$, ou pelo ponto A e dois vetores diretores $\overrightarrow{a}_1$ e $\overrightarrow{a}_2$.

5.5.1 Reta Contida no Plano

Figura 5.9: *Representação de uma reta r contida no plano α.*



Observando a reta r paralela e contida no plano α na figura 5.9, concluímos que:

- O ponto R pertence ao plano α, ou seja, $\boxed{R \in \alpha}$;
- Os vetores $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{n}_\alpha$ são perpendiculares, ou seja,

$$\boxed{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n}_\alpha = 0}$$

- O vetor $\overrightarrow{RA}$ é perpendicular ao vetor $\vec{n}_\alpha$;
- Os vetores $\vec{r}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ podem ser representados em um plano, logo são LD;
- O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{r}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ é nulo, ou seja,

$$[\vec{r}, \vec{a}_1, \vec{a}_2] = 0$$

- A interseção entre a reta r e o plano α é a própria reta r, ou seja,

$$\boxed{r \cap \alpha = r}$$

- O ângulo entre a reta r e o plano α é nulo, ou seja,

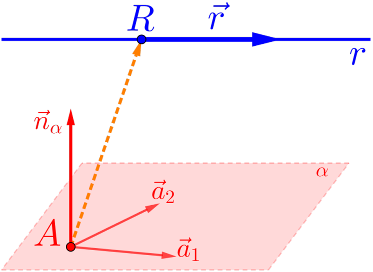
$$\boxed{(\alpha, r) = 0^o}$$

- A distância entre a reta r e o plano α é nula, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\left(\alpha, r\right) = 0}$$

5.5.2 Reta Paralela ao Plano

Figura 5.10: *Representação de uma reta r paralela ao plano α.*



Observando a reta r paralela ao plano α na figura 5.10, concluímos que:

- O ponto R **não** pertence ao plano α, ou seja, $\boxed{R \notin \alpha}$;
- Os vetores $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{n}_\alpha$ são perpendiculares, ou seja,

$$\boxed{\overrightarrow{r} \cdot \overrightarrow{n}_\alpha = 0}$$

- O vetor $\overrightarrow{AR}$ **não é** perpendicular ao vetor $\vec{n}_\alpha$;
- Os vetores $\vec{r}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, podem ser representados em um plano, logo são LD;
- O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\overrightarrow{AR}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ é positivo, ou seja,

$$\left|\left[\overrightarrow{AR}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\right]\right| > 0$$

- A interseção entre a reta r e o plano α é vazia, ou seja,

$$\boxed{r \cap \alpha = \{\ \} = \emptyset}$$

- O ângulo entre a reta r e o plano α é nulo, ou seja,

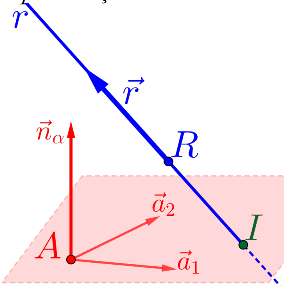
$$\boxed{(\alpha, r) = 0^o}$$

- A distância entre a reta r e o plano α é positiva, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\,(\alpha, r) > 0}$$

5.5.3 *Reta Concorrente ao Plano*

Figura 5.11: *Representação de uma reta r concorrente ao plano α.*



Observando a reta r concorrente ao plano α, ou seja, que o intercepta em apenas um ponto, na figura 5.11, concluímos que:

- Os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}_\alpha$ **não são** perpendiculares, logo
$$\boxed{\vec{r} \cdot \vec{n}_\alpha \neq 0}$$
- Os vetores $\vec{r}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$, não podem ser representados em um plano, logo são LI;

- O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{r}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ é positivo, ou seja,

$$\left|[\vec{r}, \vec{a}_1, \vec{a}_2]\right| > 0$$

- A interseção entre a reta r e o plano α é um ponto, ou seja,

$$\boxed{r \cap \alpha = I}$$

- O ângulo entre a reta r e o plano α é agudo, reto ou obtuso, ou seja, está entre

$$\boxed{0^o < (\alpha, r) < 180^o}$$

- A distância entre a reta r e o plano α é nula, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\left(\alpha, r\right) = 0}$$

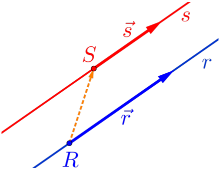
5.6 Ângulos

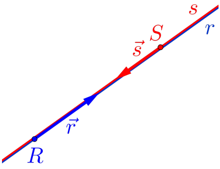
Para determinar ângulos entre as retas e entre as retas e os planos, é necessário primeiro, saber qual é a posição relativa entre eles, pois dependendo do caso, o ângulo é nulo e nada para se fazer, mas quando não for nulo, o ângulo será calculando, usando o cálculo do ângulo entre dois vetores.

5.6.1 Ângulo Nulo

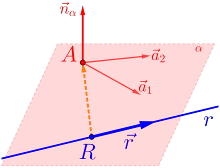
O ângulo entre as retas r e s ou entre a reta r e o plano α, serão **nulos**, ou seja, $(r, s) = 0^o$ ou $(r, \alpha) = 0^o$, quando:

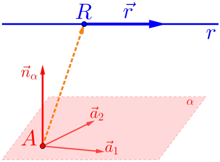
- As retas r e s forem paralelas ou coincidentes





- A reta r for paralela, ou estiver contida no plano α.

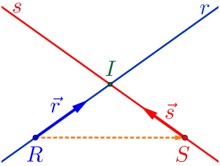


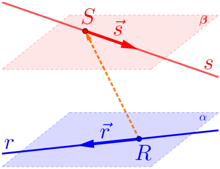


5.6.2 Ângulo Não Nulo

O ângulo entre as retas r e s ou entre a reta r e o plano α, serão **não nulos**, ou seja, $(r, s) \neq 0^o$ ou $(r, \alpha) \neq 0^o$, quando:

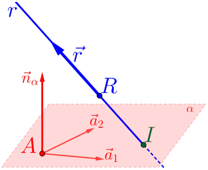
- As retas r e s forem concorrentes ou reversas.





  Neste caso, diremos que o ângulo entre as retas r e s, denotado por (r, s), será o menor ângulo entres os ângulos $(\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s})$ e $(-\overrightarrow{r}, \overrightarrow{s})$.

- A reta r for concorrente ao plano α



Neste caso, o ângulo entre a reta r e o plano α, denotado por (α, r), é igual ao ângulo complementar do menor ângulo θ entre $(\overrightarrow{n}_\alpha, \overrightarrow{r})$ e $(-\overrightarrow{n}_\alpha, \overrightarrow{r})$, ou seja,

$$\boxed{(\alpha, r) = 90^o - \theta}$$

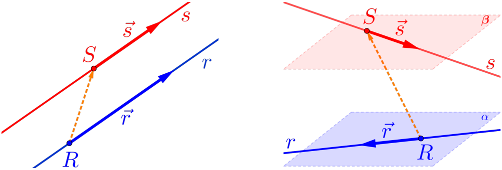
5.7 Interseções

As interseções entre as retas, entre as retas e os planos, dependem da posição relativa. Se a interseção for vazia, nada a fazer, se não for vazia, deve-se, basicamente, resolver sistemas, para encontrar a solução.

5.7.1 Interseção Vazia

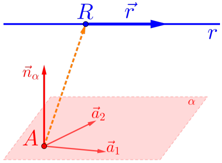
A interseção entre as retas r e s ou entre a reta r e o plano α, serão **vazias**, ou seja, $r \cap s = \{\ \}$ ou $r \cap \alpha = \{\ \}$, quando:

- As retas r e s forem paralelas distintas ou reversas:



$$\boxed{r \cap s = \{\ \} = \emptyset}$$

- A reta r for paralela ao plano α.

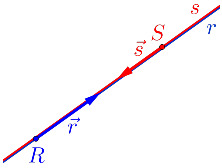


$$\boxed{r \cap \alpha = \{\ \} = \emptyset}$$

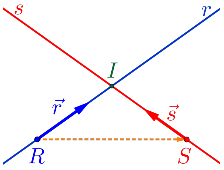
5.7.2 *Interseção Não Vazia*

A interseção entre as retas r e s ou entre a reta r e o plano α, serão **não vazias**, ou seja, $r \cap s \neq \{\ \}$ ou $r \cap \alpha \neq \{\ \}$, quando:

- As retas r e s forem coincidentes, e neste caso, a interseção será a própria reta r (ou s), ou seja, $\boxed{r \cap s = r(\equiv s)}$.



- As retas r e s forem concorrentes:



Neste caso, a interseção será um ponto I, ou seja,

$$\boxed{r \cap s = I}$$

Considere as retas r e s definida pelas seguintes equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = R_x + r_x\kappa \\ y = R_y + r_y\kappa \\ z = R_z + r_z\kappa \end{cases} \quad \text{e} \quad s : \begin{cases} x = S_x + s_x\tau \\ y = S_y + s_y\tau \\ z = S_z + s_z\tau \end{cases}$$

O ponto I de interseção das retas é um ponto que deve satisfazer as duas equações paramétricas, ou seja,

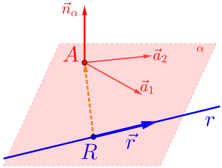
$$I = \left(R_x + r_x\kappa, R_y + r_y\kappa, R_z + r_z\kappa\right) \in r$$
$$I = \left(S_x + s_x\tau, S_y + s_y\tau, S_z + s_z\tau\right) \in s$$

Portanto, basta resolver o seguinte sistema, nas incógnitas κ e τ:

$$I : \begin{cases} R_x + r_x\kappa = S_x + s_x\tau \\ R_y + r_y\kappa = S_y + s_y\tau \\ R_z + r_z\kappa = S_z + s_z\tau \end{cases}$$

Uma vez determinado o valor do parâmetro κ ou de τ, basta substituir na equação da reta correspondente ao parâmetro, obtendo o ponto de interseção I.

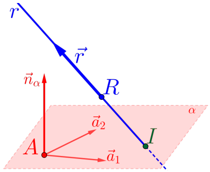
- A reta r estiver contida no plano α:



Neste caso a interseção será a própria reta r, ou seja,

$$\boxed{r \cap \alpha = r}$$

- A reta r for concorrente ao plano α:



Neste caso a interseção será um ponto I, ou seja,

$$\boxed{r \cap \alpha = I}$$

Considere a reta r definida pelas equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = R_x + r_x \kappa \\ y = R_y + r_y \kappa \\ z = R_z + r_z \kappa \end{cases}$$

e o plano α definida pela equação geral

$$\alpha : ax + by + cz + d = 0$$

O ponto I de interseção da reta r com o plano α, é um ponto que deve satisfazer as equações paramétricas da reta r e a equação geral do plano α, ou seja, basta resolver a seguinte equação, do primeiro grau, na incógnita κ:

$$\begin{aligned} a \left(R_x + r_x \kappa\right) + b \left(R_y + r_y \kappa\right) + \\ + c \left(R_z + r_z \kappa\right) + d = 0 \end{aligned}$$

Uma vez determinado a solução, ou seja, o valor para κ, basta substituir esse valor na equação da reta r, obtendo o ponto de interseção I.

5.8 Distâncias

As distâncias entre as retas, entre as retas e os planos, também dependem da posição relativa pois, se a distância for nula, nada a fazer, se não for nula, deve-se, basicamente, calcular comprimentos (produto interno), áreas (produto vetorial) e volume (produto misto).

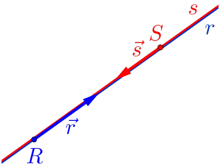
5.8.1 Distância Nula

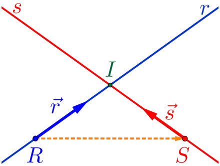
A distância entre um ponto Q e a reta r, entre as retas r e s ou entre a reta r e o plano α, serão **nulas**, ou seja, $\mathrm{d}\left(Q, r\right) = 0$, $\mathrm{d}\left(r, s\right) = 0$ ou $\mathrm{d}\left(r, \alpha\right) = 0$, quando:

- O ponto Q qualquer **pertencer** à reta r, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\left(Q, r\right) = 0}$$

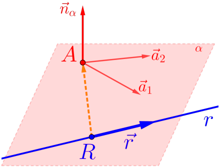
- As retas r e s forem coincidentes ou concorrentes:

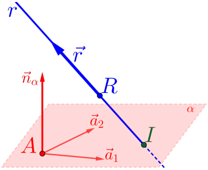




$$\boxed{\mathrm{d}\left(r, s\right) = 0}$$

- A reta r estiver contida ou for concorrente ao no plano α:





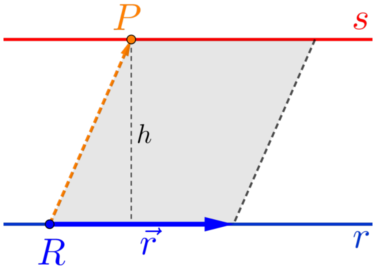
$$\boxed{\mathrm{d}\left(r, \alpha\right) = 0}$$

5.8.2 Distância Não Nula

A distância entre um ponto Q e a reta r, entre as retas r e s ou entre a reta r e o plano α, serão **não nulas**, ou seja, $\mathrm{d}(Q, r) \neq 0$, $\mathrm{d}(r, s) \neq 0$ ou $\mathrm{d}(r, \alpha) \neq 0$. Para tanto, vamos considerar antes de definir as demais distâncias não nulas, a distância entre um ponto Q e uma reta r, pois os outros casos restantes recaem neste caso.

5.8.2.1 Distância entre um ponto e uma reta

Figura 5.12: *Representação de uma reta r e um ponto $P \notin r$.*



A distância entre um ponto P e uma reta r será encontrada através do cálculo de uma determinada área.

- Lembre-se: a área de um paralelogramo é igual à base vezes altura.

- Da figura 5.12, temos que a área do paralelogramo formado pelos vetores $\vec{r}$ e $\overrightarrow{RP}$ é dada pela norma do produto vetorial:

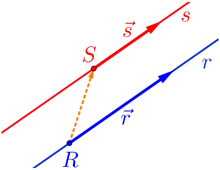
$$\underbrace{\left\| \vec{r} \times \overrightarrow{RP} \right\|}_{\text{Área}} = \underbrace{\| \vec{r} \|}_{\text{base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{altura}}$$

  logo a distância do ponto P a uma reta r, é dada por:

$$\boxed{d(P, r) = h = \frac{\text{Área}}{\text{base}} = \frac{\left\| \vec{r} \times \overrightarrow{RP} \right\|}{\| \vec{r} \|}}$$

5.8.2.2 *Outros casos de distâncias não nulas*

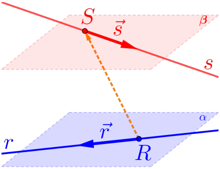
- As retas r e s são paralelas e distintas:



Neste caso a distância entre as retas r e s é igual à distância do ponto $S \in s$ à reta r, que é igual à distância do ponto $R \in r$ à reta s, ou seja:

$$\boxed{d(r,s) = d(S,r) = d(R,s)}$$

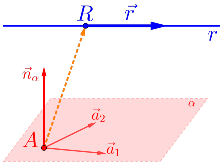
- As retas r e s são reversas:



Neste caso a distância entre as retas r e s é igual à distância do ponto $S \in s$ ao plano α (definido pelo ponto $R \in r$ e pelos vetores $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$), que é igual à distância do ponto $R \in r$ ao plano β (definido pelo ponto $S \in s$ e pelos vetores $\overrightarrow{r}$ e $\overrightarrow{s}$), ou seja:

$$\boxed{d(r, s) = d(S, \alpha) = d(R, \beta)}$$

- A reta r paralela ao plano α:



Neste caso a distância entre a reta r e o plano α é igual à distância do ponto $R \in r$ ao plano α, ou seja:

$$\boxed{d(r, \alpha) = d(R, \alpha)}$$

5.9 *Exemplos*

A partir deste momento iremos revisar, via exercícios e exemplos, todos os conhecimentos anteriores, como definir retas, determinar a posição relativa, a interseção, o ângulo e a distância entre eles, sempre considerando o sistema de coordenadas do $\mathbb{R}^3$ definido.

Em todos os exemplos a seguir consideraremos:

- Os pontos:

$$\boxed{A = (3, 0, 1)}\ \boxed{B = (2, 1, 2)}\ \boxed{C = (0, -1, 3)}$$

- O ponto genérico: $P = (x, y, z)$

- A reta r definida por:

$$\boxed{r : \begin{cases} x & = & 3 & - & 1\kappa \\ y & = & 0 & + & 1\kappa \\ z & = & 1 & + & 1\kappa \end{cases}}$$

- O plano α definido por:

$$\boxed{\alpha : 2x + 1y + 3z - 6 = 0}$$

Exemplo 5.1 *Determinar a reta s, que passa por C e é paralela à reta r.*

Para determinar a reta s, ou seja, determinar as equações desta reta, você terá que achar um vetor diretor da mesma.

Como fazer isso?

- Esboce duas retas paralelas r e s quaisquer;
- Represente o ponto R e o vetor $\vec{r}$ na reta r e os pontos C e P na reta s;
- Observe que, para definir a reta s, só falta determinar o vetor diretor;
- Escolha como vetor diretor para reta s o mesmo da reta r, ou seja, $\vec{s} = \vec{r}$;

Porque posso escolher esse vetor?

- Temos que a reta s será definida pelo ponto $C = (0, -1, 3)$ e pelo vetor diretor $\vec{s} = \vec{r} = (-1, 1, 1)$;

- Como $\overrightarrow{CP}$ e $\vec{r}$ são paralelos (LD), temos a equação vetorial
$$\overrightarrow{CP} = \kappa \vec{r}$$

- Escrevendo as equações paramétricas da reta s, temos

$$\boxed{s : \begin{cases} x = 0 - 1\kappa \\ y = -1 + 1\kappa \\ z = 3 + 1\kappa \end{cases}}$$

- Escrevendo as equações simétricas (isolando κ em cada uma das equações paramétricas) obtemos:

$$\boxed{s : \frac{x - 0}{-1} = \frac{y + 1}{1} = \frac{z - 3}{1}}$$

ou simplificado:

$$\boxed{s: -x = y + 1 = z - 3}$$

Exemplo 5.2 *Determinar o plano β que passa C e é perpendicular à reta r.*

Para determinar o plano β, ou seja, determinar as equações deste plano, você terá que achar um ponto e um vetor normal para o plano β.

Como fazer isso?

- Esboce um plano e uma reta perpendicular quaisquer;
- Represente o ponto R e o vetor $\overrightarrow{r}$ na reta r e os pontos C e P no plano β;
- Observe que, para definir o plano β, só falta determinar um vetor normal, logo escolha como vetor normal do plano β o mesmo da reta r, ou seja,

$$\overrightarrow{n}_\beta = \overrightarrow{r} = (-1, 1, 1)$$

$$\boxed{\textit{Porque posso escolher esse vetor?}}$$

- Temos, portanto que, o plano β é definido por $C = (0, -1, 3)$ e $\vec{n}_\beta = \vec{r} = (-1, 1, 1)$;
- Como $\overrightarrow{CP} \perp \vec{r}$ o produto interno $\overrightarrow{CP} \cdot \vec{r} = 0$;
- Logo a equação normal do plano β é dado por:

$$\boxed{\beta : -1x + 1y + 1z - 2 = 0}$$

- Para escrever as equações paramétricas do plano β partindo de sua equação normal, temos pelo menos duas possibilidades:

1ª Determinar dois vetores diretores do plano, para tanto, determinaremos outros dois pontos do plano β, como por exemplo os pontos

$$C_1 = (0, 0, 2) \quad \text{e} \quad C_2 = (-2, 0, 0)$$

e encontrando os dois vetores diretores:

$$\overrightarrow{CC_1} = (0, 1, -1) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{CC_2} = (-2, 1, -3)$$

logo teremos uma equação paramétrica do plano β dada por:

$$\boxed{\beta : \begin{cases} x & = & 0 & + & 0\kappa_1 & - & 2\kappa_2 \\ y & = & -1 & + & 1\kappa_1 & + & 1\kappa_2 \\ z & = & 3 & - & 1\kappa_1 & - & 3\kappa_2 \end{cases}}$$

2ª Considerar $y = \tau_1$ e $z = \tau_2$, logo da equação normal do plano β, temos que:

$$x = -2 + 1y + 1z$$

logo teremos uma equação paramétrica do plano β dada por:

$$\beta : \begin{cases} x & = & -2 & + & 1\tau_1 & + & 1\tau_2 \\ y & = & \tau_1 \\ z & = & \tau_2 \end{cases}$$

ou na forma completa:

$$\boxed{\beta : \begin{cases} x &= -2 &+ 1\tau_1 &+ 1\tau_2 \\ y &= 0 &+ 1\tau_1 &+ 0\tau_2 \\ z &= 0 &+ 0\tau_1 &+ 1\tau_2 \end{cases}}$$

Exemplo 5.3 *Determinar a posição relativa, o ângulo, a distância e a interseção ente o plano β e a reta s.*

Para determinar o ângulo, a distância e a interseção, verifique, antes de qualquer coisa, a posição relativa entre o plano β e a reta s, pois dependendo do caso, não será necessário fazer contas.

Como fazer isso?

- Pense nas três possibilidades que existem, com relação à posição relativa entre uma reta e um plano.

> *Pense na sua mesa como um plano (infinito) e o seu lápis como uma reta (infinita)!*

(1) Coloque o lápis sobre a mesa (primeira possibilidade);

(2) Afaste da mesa paralelamente o lápis (segunda possibilidade);

(3) Encoste apenas a ponta do lápis na mesa (terceira possibilidade).

- Esboce um plano e uma reta quaisquer;
- Represente o ponto r e o vetor $\vec{r}$ na reta r o ponto C e vetor $\vec{n}_\beta$ no plano β;
- Verifique se os vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}_\beta$ são perpendiculares, ou seja, calcule o produto interno $\vec{r}\cdot\vec{n}_\beta$;
- Como o resultado $\vec{r}\cdot\vec{n}_\beta = 3$, os vetores não são perpendiculares, portanto a reta só pode ser **concorrente** ao plano;
- Como são concorrentes a distância entre a reta r e o plano β será:

$$\boxed{\mathrm{d}\left(r,\beta\right) = 0}$$

- Observe que $\vec{n}_\beta = \vec{r} = (-1,1,1)$, logo o ângulo entre a reta r e o plano β será:

$$\boxed{\left(r,\beta\right) = 90^o}$$

portanto são perpendiculares;

- Finalmente para determinar a interseção, que já sabemos que é **um ponto** I, basta pegar um ponto qualquer da reta s definida por:

$$\boxed{s : \begin{cases} x & = & 0 & - & 1\kappa \\ y & = & -1 & + & 1\kappa \\ z & = & 3 & + & 1\kappa \end{cases}}$$

logo o ponto de interseção $I \in s$ será:

$$I = (0 - 1\kappa, -1 + 1\kappa, 3 + 1\kappa) = (-\kappa, -1 + \kappa, 3$$

portanto basta substituir as coordenadas do ponto I na equação geral do plano β, ou seja:

$$-1\overbrace{(-\kappa)}^{x} + 1\overbrace{(-1 + \kappa)}^{y} + 1\overbrace{(3 + \kappa)}^{z} - 2 = 0$$

Resolvendo a equação em relação à variável κ, teremos como solução $\boxed{\kappa = 0}$, logo a ponto interseção será:

$$\boxed{s \cap \beta = I = (0, -1, 3)}$$

5.10 Avaliando o que foi construído

- Foram introduzidos, nesta unidade, as retas e os planos e como olhar estes elementos de uma maneira geométrica.

- Definimos também as equações paramétricas e simétricas das retas.

- Foi bastante enfatizado que determinar a posição relativa entre as retas e entre as retas e os planos é, de fato, muito importante, pois facilita a compreensão dos problemas e principalmente a sua resolução.

- Mostramos também como determinar ângulos, interseções e distâncias entre as retas e entre retas e planos.