



Quádricas

CÁLCULO VETORIAL E GEOMETRIA ANALÍTICA

(NOTAS - 18/5/2023)

Sérgio de
Albuquerque
Souza

$$S_{\Delta} = \sqrt{p(p-a) \cdot (p-b) \cdot (p-c)} = p$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$$

$$g^2(x)$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

$$\sin x = a; \quad x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,$$

$$\log_a b = \frac{\log_e b}{\log_e a} \quad \cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2 \alpha} = \operatorname{cosec}^2 \alpha$$

$$(\sin x + \cos x)^2 = 1 + \sin 2x$$

Sumário

Sumário	2
7 Quádricas	3
7.1 Introdução	3
7.2 Quádricas	6

Capítulo 7

Quádricas

7.1 Introdução

Nesta unidade estudaremos e definiremos as quádricas, como por exemplo, Superfícies Cilíndricas, Elipsoides, Hiperboloides, Paraboloides, a partir das suas equações gerais dadas por equações do segundo grau em três variáveis, usando ferramentas algébricas, como matrizes, determinantes, polinômios característicos, autovalores e autovetores, introduzidos nesta unidade.

Faremos também uma introdução às superfícies quádricas, bem como serão exibidas algumas superfícies de revolução, cilíndricas e cônicas, com o intuito de fazer o aluno olhar os objetos ao seu redor e tentar ver que tipo de superfície se trata tal objeto e que é possível existir uma equação associada a tal superfície.

7.1.1 *Problematizando a Temática*

Como desenhar uma quádrica, ou pelo menos ter uma ideia de como a quádrica se encontra no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 , sendo capaz de visualizar suas interseções com planos, determinando qual curva, em duas dimensões, irá surgir nestas interseções/cortes.

7.1.2 *Conhecendo a Temática*

O tratamento mais básico, ou seja, considerando as quádricas com o eixo focal paralelo ao eixo x ou y ou ao eixo z , para definir as equações e determinar todos os elementos definidos das quádricas.

Para a classificação das quádricas a partir das equações na forma reduzida, usaremos as características

das cônicas contidas nessas quádricas via interseções com planos paralelos ao planos coordenados. Pode-se usar os conceitos de autovalores e autovetores associados a uma matriz formada pelos coeficientes dos termos mistos, do mesmo modo como aplicado às cônicas.

7.2 Quádricas

Vamos considerar para o estudo das quádricas, o espaço tridimensional \mathbb{R}^3 com o sistema de eixos coordenados definidos nos capítulos anteriores e para efeito de simplificações, os principais eixos das quádricas serão paralelos a esses eixos.

Definição 7.1 (Quádrica)

O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ no espaço tridimensional \mathbb{R}^3 que satisfazem à equação do segundo grau em três variáveis:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0 \quad (7.1)$$

é denominado de **superfície quádrica** \mathcal{Q} ou simplesmente de **quádrica** \mathcal{Q} .

Observação 7.1 Da equação da quádrlica \mathcal{Q} (7.1), temos que:

★ Pelos menos um dos coeficientes A, B, C, D, E ou F deve ser não nulo ($\neq 0$), caso contrário a equação seria a de um plano em \mathbb{R}^3 ;

★ Os termos:

- Ax^2 , By^2 e Cz^2 são denominados de termos quadráticos;
- Dxy , Eyz e Fzx são denominados de termos quadráticos mistos;
- Gx , Hy e Iz são os termos lineares;
- J é o termo independente;

★ Podemos escrever a equação (7.1) na forma matricial (verifique):

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & D/2 & E/2 \\ D/2 & B & F/2 \\ E/2 & F/2 & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G & H & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + J = 0$$

- ★ *Iremos considerar que os coeficientes quadráticos mistos serão nulos, ou seja, $D = E = F = 0$.*

Exemplo 7.1 *Algumas quádricas e suas equações:*

a) Esfera: $\mathcal{E}_s : x^2 + y^2 + z^2 = 1$

$$\mathcal{E}_s : 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 + 0xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y + 0z - 1 = 0$$

b) Elipsoide: $\mathcal{E}_l : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 1$

$$\mathcal{E}_l : 2x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 0xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y + 0z - 6 = 0$$

c) Hiperboloide: $\mathcal{H} : \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} + \frac{z^2}{2} = 1$

$$\mathcal{H} : 2x^2 - 3y^2 + 3z^2 + 0xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y + 0z - 6 = 0$$

d) Paraboloides: $\mathcal{P} : x^2 + y^2 - z = 0$

$$\mathcal{P} : 1x^2 + 1y^2 + 0z^2 + 0xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y - 1z + 0 = 0$$

e) Cone: $\mathcal{C} : x^2 + y^2 - z^2 = 0$

$$\mathcal{C} : 1x^2 + 1y^2 - 1z^2 + 0xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y + 0z + 0 = 0$$

f) Cilindro: $C_i : x^2 + y^2 - 1 = 0$

$$C_i : 1x^2 + 1y^2 + 0z^2 + 0xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y + 0z - 1 = 0$$

g) Um ponto: $\mathcal{P} : x^2 + y^2 + z^2 = 0$

$$\mathcal{P} : 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 + 0xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y + 0z + 0 = 0$$

h) Vazio: $\mathcal{V} : x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$

$$\mathcal{V} : 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 + 0xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y + 0z - 1 = 0$$

i) Uma reta: $\mathcal{R}_1 : (x - y)^2 + (y - z)^2 = 0$

$$\mathcal{R}_1 : 1x^2 + 2y^2 + 1z^2 + 2xy - 2yz + 0xz + 0x + 0y + 0z + 0 = 0$$

j) Um plano: $\mathcal{P}_1 : (x - y)^2 = 0$

$$\mathcal{P}_1 : 1x^2 + 1y^2 + 0z^2 + 2xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y + 0z + 0 = 0$$

k) Dois planos paralelos:

$$\mathcal{P}_2 : (x + y + z)(x + y + z + 1) = 0$$

$$\mathcal{P}_2 : 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 + 2xy + 2yz + 2xz - 1x - 1y - 1z + 0 = 0$$

l) *Dois planos concorrentes:*

$$\mathcal{P}_{2c} : (x + z)(x - z) = 0$$

$$\mathcal{P}_{2c} : 1x^2 + 0y^2 - 1z^2 + 0xy + 0yz + 0xz + 0x + 0y + 0z + 0 = 0$$

Apresentaremos nas próximas seções as principais quádricas e as mais conhecidas, ou seja:

7.2.2 Esfera \mathcal{E}_s (P. 15)

7.2.3 Elipsoide \mathcal{E} (P. 28)

7.2.4 Hiperboloide de uma Folha \mathcal{H}_{1f} (P. 41)

7.2.5 Hiperboloide de duas Folhas \mathcal{H}_{2f} (P. 54)

7.2.6 Paraboloide Elíptico \mathcal{P}_e (P. 64)

7.2.7 Paraboloide Hiperbólico \mathcal{P}_h (P. 70)

7.2.1 Classificação

A classificação inicial se dará a partir das equações na forma reduzida da quádrlica \mathcal{Q} , e para tal, serão utilizadas interseções desta quádrlica com planos bem definidos que resultam em cônicas. Utilizando destas cônicas poderemos classificá-las e esbochá-las. Para tanto utilizaremos o procedimento abaixo:

- 1º Fazer interseções da quádrlica \mathcal{Q} com os planos paralelos aos planos coordenados, ou seja:

$$\pi_x : x = C_x$$

$$\pi_y : y = C_y$$

$$\pi_z : z = C_z$$

Estes planos são escolhidos de tal forma que a interseção resultante com a quádrlica \mathcal{Q} , seja uma cônica conhecida, tendo com ideia básica “fazer sumir” uma das variáveis da equação da quádrlica;

- 2º Caso a interseção da quádrlica \mathcal{Q} com o plano π_n seja uma das cônicas conhecidas, classificar e observar quais são as características desta cônica em relação aos eixos paralelos ao plano π_n ;

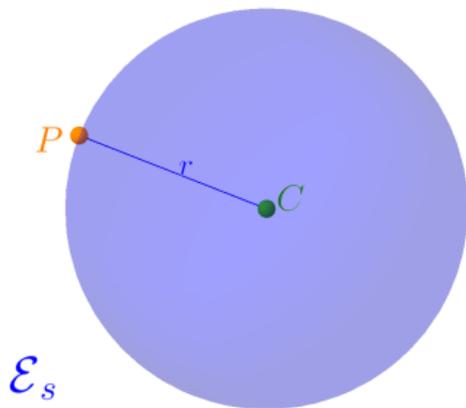
- 3° Caso a interseção da quádrlica \mathcal{Q} com um dos planos π_n seja um ponto, duas retas ou vazia, deve-se encontrar um outro plano α_n paralelo ao plano π_n , de tal forma que a interseção da quádrlica \mathcal{Q} com esse novo plano α_n seja uma das cônicas conhecidas, voltando para o segundo item;
- 4° Caso a interseção da quádrlica \mathcal{Q} com o plano π_n seja uma circunferência a superfície será denominada de superfície de revolução, ou seja, gira em torno de uma reta perpendicular ao plano π_n , passando pelo centro C ou pelo vértice V da quádrlica.

7.2.2 Esfera \mathcal{E}_s

Definição 7.2 (Esfera)

Na geometria euclidiana, uma **esfera** \mathcal{E}_s é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 que equidistam de um ponto fixo (Figura 7.1). O ponto fixo C é denominado de **centro** e a equidistância r é denominada de **raio** da esfera.

Figura 7.1: Representação de uma esfera \mathcal{E}_s de raio r .



7.2.2.1 Equações da Esfera

Considerando os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e o centro $C = (C_x, C_y, C_z)$, temos as seguintes equações:

★ Equação vetorial:

$$\mathcal{E}_s : \left\| \overrightarrow{CP} \right\| = r$$

★ Equação na forma reduzida:

$$\mathcal{E}_s : (x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 + (z - C_z)^2 = r^2 \quad (E_s)$$

★ Considerando $v = C_x^2 + C_y^2 + C_z^2 - r^2$, a equação na forma geral:

$$\mathcal{E}_s : 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 - 2C_x x - 2C_y y - 2C_y y + v = 0$$

★ Equação na forma matricial:

$$\mathcal{E}_s : \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2C_x & 2C_y & 2C_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + v = 0$$

★ Equação na forma paramétrica:

$$\mathcal{E}_s : \begin{cases} x = C_x + r \cdot \cos(\theta) \cos(\rho) \\ y = C_y + r \cdot \sin(\theta) \sin(\rho) \\ z = C_z + r \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

7.2.2.2 Interações com a Esfera

Considerando a esfera \mathcal{E}_s definida pela equação na forma reduzida (E_s), temos que as três interseções (Figura 7.2) com a esfera são:

- ★ Com o plano $\pi_x : x = C_x$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{E}_s$ é a circunferência:

$$C_x : (y - C_y)^2 + (z - C_z)^2 = r^2$$

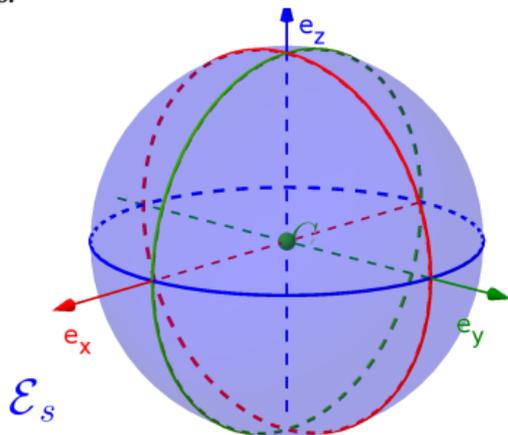
- ★ Com o plano $\pi_y : y = C_y$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{E}_s$ é a circunferência:

$$C_y : (x - C_x)^2 + (z - C_z)^2 = r^2$$

- ★ Com o plano $\pi_z : z = C_z$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{E}_s$ é a circunferência:

$$C_z : (x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = r^2$$

Figura 7.2: Representação de uma esfera \mathcal{E}_s de raio r e as interseções com os planos.

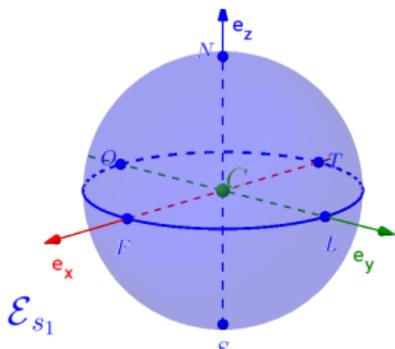


Exemplo 7.2 Considerando a esfera \mathcal{E}_{s_1} de centro $C = (1, 2, 3)$ e raio $r = 2$, teremos que:

a) A equação na forma reduzida:

$$\mathcal{E}_{s_1} : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$$

b) Gráfico da esfera \mathcal{E}_{s_1} :



c) Interseções com os planos:

★ Plano $\pi_x : x = 1$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{E}_{s_1}$ é a circunferência de raio $r = 2$:

$$\mathcal{C}_x : (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = 4$$

★ Plano $\pi_y : y = 2$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{E}_{s_1}$ é a circunferência de raio $r = 2$:

$$C_y : (x - 1)^2 + (z - 3)^2 = 4$$

★ Plano $\pi_z : z = 3$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{E}_{s_1}$ é a circunferência de raio $r = 2$:

$$C_z : (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 4$$

d) Os pontos da esfera \mathcal{E}_{s_1} correspondentes aos pontos cardeais Norte, Sul, Leste, Oeste e os pontos Frontal e Traseiro são:

$$N_z = (1, 2, 5)$$

$$S_z = (1, 2, 1)$$

$$L_y = (1, 4, 3)$$

$$O_y = (1, 0, 3)$$

$$F_x = (3, 2, 3)$$

$$T_x = (-1, 2, 3)$$

e) A equação na forma geral:

$$\mathcal{E}_{s_1} : 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 - 2x - 4y - 6z + 10 = 0$$

f) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{E}_{s_1} : \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 10 = 0$$

Exemplo 7.3 Considerando a esfera \mathcal{E}_{s_2} definida pela equação:

$$\mathcal{E}_{s_2} : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

Teremos que:

a) Para determinar a equação na forma reduzida:

★ Agruparemos as variáveis x , y e z da forma:

$$\mathcal{E}_{s_2} : [x^2 + 2x] + [y^2 - 2y] + [z^2 - 2z] - 6 = 0 \quad (7.2)$$

★ Aplicar a técnica de completamento de quadrados nesses agrupamentos, ou seja:

$$[x^2 + 2x] = (x + 1)^2 - 1 \quad (7.3)$$

$$[y^2 - 2y] = (y - 1)^2 - 1 \quad (7.4)$$

$$[z^2 - 2z] = (z - 1)^2 - 1 \quad (7.5)$$

★ Substituir os completamentos de quadrados (7.3), (7.4) e (7.5) na equação da esfera \mathcal{E}_{s_2} (7.2):

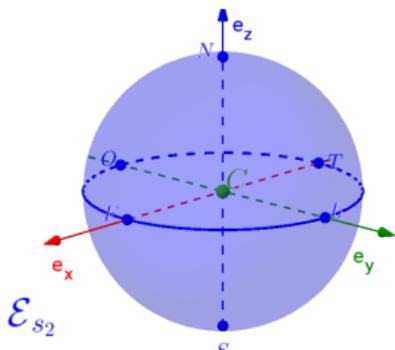
$$\mathcal{E}_{s_2} : [(x+1)^2 - 1] + [(y-1)^2 - 1] + [(z-1)^2 - 1] - 6 = 0$$

★ *Teremos a equação na forma reduzida:*

$$\mathcal{E}_{s_2} : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$$

b) *A esfera \mathcal{E}_{s_2} possui centro $C = (-1, 1, 1)$ e raio $r = 3$.*

c) *Gráfico da esfera \mathcal{E}_{s_2} :*



d) *Interseções com os planos:*

★ *Plano $\pi_x : x = -1$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{E}_{s_2}$ é a circunferência de raio $r = 3$:*

$$\mathcal{C}_x : (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$$

★ Plano $\pi_y : y = 1$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{E}_{s_2}$ é a circunferência de raio $r = 3$:

$$C_y : (x + 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$$

★ Plano $\pi_z : z = 1$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{E}_{s_2}$ é a circunferência de raio $r = 3$:

$$C_z : (x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 9$$

e) Os pontos da esfera \mathcal{E}_{s_1} correspondentes aos pontos cardeais Norte, Sul, Leste, Oeste e os pontos Frontal e Traseiro são:

$$N_z = (-1, 1, 4) \quad S_z = (-1, 1, -2)$$

$$L_y = (-1, 4, 1) \quad O_y = (-1, -2, 1)$$

$$F_x = (2, 1, 1) \quad T_x = (-4, 1, 1)$$

f) A equação na forma geral:

$$\mathcal{E}_{s_2} : 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 + 2x - 2y - 2z - 6 = 0$$

g) *A equação na forma matricial:*

$$\mathcal{E}_{s_2} : [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + [2 \ -2 \ -2] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 6 = 0$$

Exercício 7.1 *Determinar todos os elementos e as equações reduzidas e completas, considerando as características das quádricas abaixo:*

a) Esfera \mathcal{E}_{s_a} com centro $C = (2, 1, 2)$ e raio $r = 3$.^(a)

b) Esfera \mathcal{E}_{s_b} com diâmetro dado pelos pontos $A = (2, 0, 4)$ e $B = (-4, 8, 4)$.^(b)

- (a) $\mathcal{E}_{s_a} : (z-2)^2 + (y-1)^2 + (x-2)^2 = 9$, $\mathcal{E}_{s_a} : 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 + 0xy + 0yz + 0zx - 4x - 2y - 2z - 4 = 0$, $N_z = (2, 1, 5)$, $S_z = (2, 1, -1)$, $L_y = (2, 4, 2)$, $O_y = (2, -2, 2)$, $F_x = (5, 1, 2)$ e $T_x = (-1, 1, 2)$.
- (b) $C = (-1, 4, 4)$, $r = 5$, $\mathcal{E}_{s_b} : (x+1)^2 + (y-4)^2 + (z-4)^2 = 25$, $\mathcal{E}_{s_b} : 1x^2 + 1y^2 + 1z^2 + 0xy + 0yz + 0zx + 2x - 8y - 8z + 8 = 0$, $N_z = (-1, 4, 9)$, $S_z = (-1, 4, -1)$, $L_y = (-1, 9, 4)$, $O_y = (-1, -1, 4)$, $F_x = (4, 4, 4)$ e $T_x = (-6, 4, 4)$.

7.2.3 Elipsoide \mathcal{E}

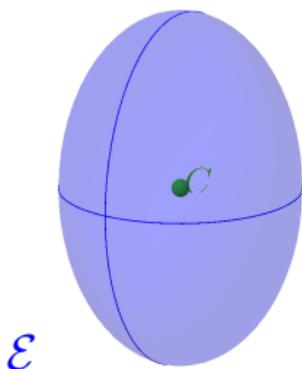
Definição 7.3 (Elipsoide \mathcal{E})

Na geometria euclidiana, um **elipsoide** \mathcal{E} (Figura 7.3) é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 com centro $C = (C_x, C_y, C_z)$ e definido pela equação:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} + \frac{(y - C_y)^2}{b^2} + \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1 \quad (El)$$

com a , b e c números reais não-nulos.

Figura 7.3: Representação de um elipsoide \mathcal{E} .



7.2.3.1 Equações do Elipsoide

Considerando os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e o centro $C = (C_x, C_y, C_z)$, temos as seguintes equações:

★ Equação na forma reduzida:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} + \frac{(y - C_y)^2}{b^2} + \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

★ Equação na forma paramétrica:

$$\mathcal{E} : \begin{cases} x = C_x + a \cdot \cos(\theta) \cos(\rho) \\ y = C_y + b \cdot \sin(\theta) \sin(\rho) \\ z = C_z + c \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

7.2.3.2 Interações com o Elipsoide

Considerando o elipsoide \mathcal{E} definida pela equação na forma reduzida (El), temos que as três interseções (Figura 7.4) com \mathcal{E} são:

- ★ Com o plano $\pi_x : x = C_x$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{E}$ é a elipse:

$$C_x : \frac{(y - C_y)^2}{b^2} + \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

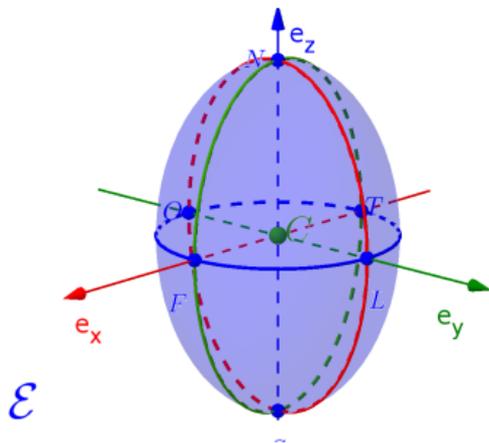
- ★ Com o plano $\pi_y : y = C_y$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{E}$ é a elipse:

$$C_y : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} + \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

- ★ Com o plano $\pi_z : z = C_z$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{E}$ é a elipse:

$$C_z : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} + \frac{(y - C_y)^2}{b^2} = 1$$

Figura 7.4: Representação de um elipsoide \mathcal{E} e as interseções com os planos.



Observação 7.2 *Em relação ao elipsoide \mathcal{E} definido pela equação (E1), teremos:*

- ★ *A esfera é um caso particular de elipsoide, bastando considerar os valores $a = b = c = r$, na equação acima.*
- ★ *Todos os coeficientes dos termos quadráticos do primeiro membro da equação (E1) são positivos.*
- ★ *Duas das três interseções da quádrlica \mathcal{E} com os planos π_x , π_y e π_z são elipses, por este motivo é denominado **elipsoide**.*
- ★ *Se a terceira interseção com a quádrlica \mathcal{E} for uma:*
 - *Elipse será denominado **elipsoide elíptica**;*
 - *Circunferência será denominado **elipsoide circular** ou **elipsoide de revolução**.*

Exemplo 7.4 Considerando quádrlica \mathcal{E}_1 definida pela equação:

$$\mathcal{E}_1 : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$$

a) Centro $C = (1, 2, 3)$.

b) Interseções com os planos:

★ Plano $\pi_x : x = 1$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{E}_1$ é a **elipse** com eixo focal paralelo ao eixo z :

$$C_x : \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$$

★ Plano $\pi_y : y = 2$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{E}_1$ é a **elipse** com eixo focal paralelo ao eixo z :

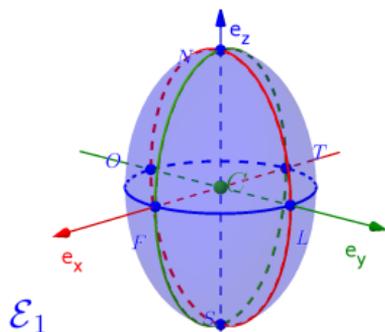
$$C_y : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{9} = 1$$

★ Plano $\pi_z : z = 3$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{E}_1$ é a **circunferência** de raio $r = 2$ no plano paralelo ao plano xy :

$$C_z : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

c) Denominação da quádrlica \mathcal{E}_1 : **elipsoide circular** ou **elipsoide de revolução**.

d) Gráfico do elipsoide circular \mathcal{E}_1 :



e) Os pontos da elipsoide \mathcal{E}_1 correspondentes aos pontos cardeais **Norte**, **Sul**, **Leste**, **Oeste** e os pontos **Frontal** e **Traseiro** são:

$$N_z = (1, 2, 6)$$

$$S_z = (1, 2, 0)$$

$$L_y = (1, 4, 3)$$

$$O_y = (1, 0, 3)$$

$$F_x = (3, 2, 3)$$

$$T_x = (-1, 2, 3)$$

f) A equação na forma geral:

$$\mathcal{E}_1: 36x^2 + 36y^2 + 16z^2 - 72x - 144y - 96z + 180 = 0$$

g) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{E}_1: \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - [72 \quad 144 \quad 96] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 180 = 0$$

Exemplo 7.5 Considerando a quádrlica \mathcal{E}_2 definida pela equação:

$$\mathcal{E}_2 : 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8x - 2y - 8z + 5 = 0$$

Teremos que:

a) Para determinar a equação na forma reduzida:

★ Agruparemos as variáveis x , y e z da forma:

$$\mathcal{E}_2 : [4x^2 - 8x] + [y^2 - 2y] + [4z^2 - 8z] + 5 = 0 \quad (7.6)$$

★ Aplicar a técnica de completamento de quadrados nesses agrupamentos, ou seja:

$$[4x^2 - 8x] = 4(x - 1)^2 - 4 \quad (7.7)$$

$$[y^2 - 2y] = (y - 1)^2 - 1 \quad (7.8)$$

$$[4z^2 - 8z] = 4(z - 1)^2 - 4 \quad (7.9)$$

- ★ Substituir os complementos de quadrados (7.7), (7.8) e (7.9) na equação \mathcal{E}_2 (7.6):

$$\mathcal{E}_2: [4(x-1)^2 - 4] + [(y-1)^2 - 1] + [4(z-1)^2 - 4] + 5 = 0$$

- ★ Teremos a equação na forma reduzida:

$$\mathcal{E}_2: \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$$

b) A quádrlica \mathcal{E}_2 possui centro $C = (1, 1, 1)$.

c) Interseções com os planos:

- ★ Plano $\pi_x : x = 1$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{E}_2$ é a **elipse** com eixo focal paralelo ao eixo y :

$$C_x: \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$$

- ★ Plano $\pi_y : y = 1$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{E}_2$ é a **circunferência** de raio $r = 1$:

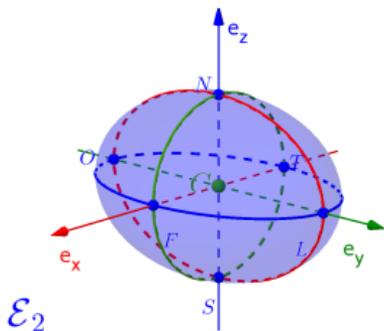
$$C_y: \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$$

★ Plano $\pi_z : z = 1$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{E}_2$ a **elipse** com eixo focal paralelo ao eixo y :

$$C_z : \frac{(x - 1)^2}{1} + \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

d) Denominação da quádrlica \mathcal{E}_2 : **elipsoide circular** ou **elipsoide de revolução**.

e) Gráfico do elipsoide circular \mathcal{E}_2 :



f) Os pontos do elipsoide circular \mathcal{E}_2 correspondentes aos pontos cardeais **Norte**, **Sul**, **Leste**, **Oeste** e os

pontos Frontal e Traseiro são:

$$N_z = (1, 1, 2)$$

$$S_z = (1, 1, 0)$$

$$L_y = (1, 3, 1)$$

$$O_y = (1, -1, 1)$$

$$F_x = (2, 1, 1)$$

$$T_x = (0, 1, 1)$$

g) *A equação na forma matricial:*

$$\mathcal{E}_2: [x \ y \ z] \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - [8 \ 2 \ 8] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 5 = 0$$

Exercício 7.2 *Determinar todos os elementos e as equações reduzidas e completas, considerando as características das quádricas abaixo:*

- a) *Elipsoide \mathcal{E}_a com centro na origem e contida numa caixa de dimensões $c_x \times c_y \times c_z = 8 \times 6 \times 4$.*^(a)

^(a) \mathcal{E}_a é um elipsoide elíptico, $\mathcal{E}_a : \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1$, $\mathcal{E}_a : 36x^2 + 64y^2 + 144z^2 + 0xy + 0yz + 0zx + x + 0y + 0z - 576 = 0$, $N_z = (0, 0, 2)$, $S_z = (0, 0, -2)$, $L_y = (0, 3, 0)$, $O_y = (0, -3, 0)$, $F_x = (4, 0, 0)$ e $T_x = (-4, 0, 0)$.

7.2.4 Hiperboloide de uma folha \mathcal{H}_{1f}

Definição 7.4 (Hiperboloide de uma folha)

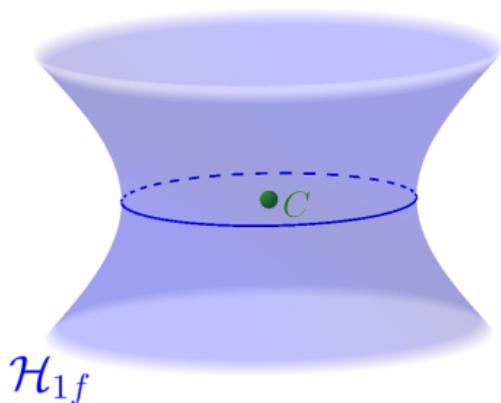
Na geometria euclidiana, um **hiperboloide de uma folha** \mathcal{H}_{1f} (Figura 7.5) é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 com centro $C = (C_x, C_y, C_z)$ e definido por uma dessas equações:

$$\mathcal{H}_{1f_x} : -\frac{(x-C_x)^2}{a^2} + \frac{(y-C_y)^2}{b^2} + \frac{(z-C_z)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathcal{H}_{1f_y} : \frac{(x-C_x)^2}{a^2} - \frac{(y-C_y)^2}{b^2} + \frac{(z-C_z)^2}{c^2} = 1 \quad (H_1)$$

$$\mathcal{H}_{1f_z} : \frac{(x-C_x)^2}{a^2} + \frac{(y-C_y)^2}{b^2} - \frac{(z-C_z)^2}{c^2} = 1$$

com a , b e c números reais não-nulos.

Figura 7.5: Representação de um hiperboloide de uma folha \mathcal{H}_{1f} .

7.2.4.1 Equações do Hiperbolóide de uma folha

Considerando os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e o centro $C = (C_x, C_y, C_z)$, temos as seguintes equações:

★ Equações na forma reduzida:

$$\mathcal{H}_{1f_x}: -\frac{(x-C_x)^2}{a^2} + \frac{(y-C_y)^2}{b^2} + \frac{(z-C_z)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathcal{H}_{1f_y}: \frac{(x-C_x)^2}{a^2} - \frac{(y-C_y)^2}{b^2} + \frac{(z-C_z)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathcal{H}_{1f_z}: \frac{(x-C_x)^2}{a^2} + \frac{(y-C_y)^2}{b^2} - \frac{(z-C_z)^2}{c^2} = 1$$

★ Equação na forma paramétrica:

$$\mathcal{H}_{1f}: \begin{cases} x = C_x + a \cdot \cosh(\theta) \cos(\rho) \\ y = C_y + b \cdot \cosh(\theta) \sen(\rho) \\ z = C_z + c \cdot \sinh(\theta) \end{cases}$$

7.2.4.2 Interseções com o Hiperboloide de uma folha

Considerando o hiperboloide de uma folha \mathcal{H}_{1f} definido pela equação na forma reduzida (H_1), temos que as três interseções (Figura 7.6) com \mathcal{H}_{1f} são:

- ★ Com o plano $\pi_x : x = C_x$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{H}_{1f}$ é a hipérbole:

$$C_x : \frac{(y - C_y)^2}{b^2} - \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

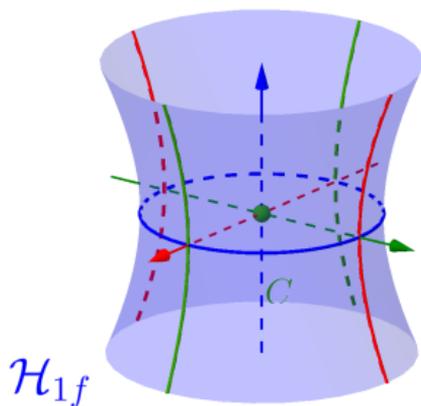
- ★ Com o plano $\pi_y : y = C_y$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{H}_{1f}$ é a hipérbole:

$$C_y : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} - \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

- ★ Com o plano $\pi_z : z = C_z$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{H}_{1f}$ é a elipse:

$$C_z : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} + \frac{(y - C_y)^2}{b^2} = 1$$

Figura 7.6: Representação de um hiperboloide de uma folha \mathcal{H}_{1f} e as interseções com os planos.



Observação 7.3 *Em relação ao hiperboloide de uma folha \mathcal{H}_{1f} definido pela equação (H_1) , teremos:*

- ★ *Apenas um dos coeficientes dos termos quadráticos do primeiro membro da equação (H_1) é negativo.*
- ★ *Duas das três interseções da quádrlica \mathcal{H}_{1f} com os planos π_x , π_y e π_z são hipérbolas, por este motivo é denominado **hiperboloide**.*
- ★ *Se a terceira interseção com a quádrlica \mathcal{H}_{1f} for uma:*
 - *Elipse será denominado **hiperboloide elíptica de uma folha**;*
 - *Circunferência será denominado **hiperboloide circular de uma folha** ou **hiperboloide de revolução de uma folha**;*
- ★ *O “sobrenome” uma folha é uma superfície contendo apenas uma parte, ou seja uma folha, e também para diferenciar do hiperboloide de duas folhas.*

Exemplo 7.6 Considerando quádrlica \mathcal{H}_{1f_1} definida pela equação:

$$\mathcal{H}_{1f_1} : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(z-3)^2}{9} = 1$$

a) Centro $C = (1, 2, 3)$.

b) Interseções com os planos:

★ Plano $\pi_x : x = 1$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{H}_{1f_1}$ é a **hipérbole** com eixo focal paralelo ao eixo y :

$$C_x : \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(z-3)^2}{9} = 1$$

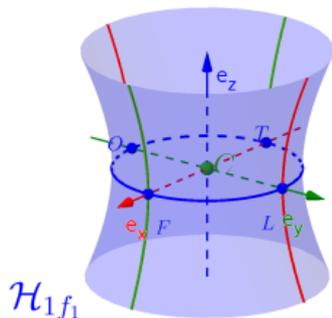
★ Plano $\pi_y : y = 2$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{H}_{1f_1}$ é a **hipérbole** com eixo focal paralelo ao eixo x :

$$C_y : \frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(z-3)^2}{9} = 1$$

★ Plano $\pi_z : z = 3$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{H}_{1f_1}$ é a **circunferência** de raio $r = 2$ no plano paralelo ao plano xy :

$$C_z : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

- c) Denominação da quádrlica \mathcal{H}_{1f_1} : **hiperboloide circular de uma folha** ou **hiperboloide de revolução de uma folha**.
- d) Gráfico do hiperboloide circular de uma folha \mathcal{H}_{1f_1} :



- e) Os pontos da hiperboloide \mathcal{H}_{1f_1} correspondentes aos pontos *Leste*, *Oeste* e os pontos *Frontal* e *Traseiro* são:

$$L_y = (1, 4, 3)$$

$$O_y = (1, 0, 3)$$

$$F_x = (3, 2, 3)$$

$$T_x = (-1, 2, 3)$$

f) A equação na forma geral:

$$\mathcal{H}_{1f_1} : 36x^2 + 36y^2 - 16z^2 - 72x - 144y + 96z - 108 = 0$$

g) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{H}_{1f_1} : \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 & 0 & 0 \\ 0 & 36 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - [72 \quad 144 \quad -96] \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 108 = 0$$

Exemplo 7.7 Considerando a quádrlica \mathcal{H}_{1f_2} definida pela equação:

$$\mathcal{H}_{1f_2} : 4x^2 - y^2 + 4z^2 - 8x + 2y - 8z + 3 = 0$$

Teremos que:

a) Para determinar a equação na forma reduzida:

★ Agruparemos as variáveis x , y e z da forma:

$$\mathcal{H}_{1f_2} : [4x^2 - 8x] - [y^2 - 2y] + [4z^2 - 8z] + 3 = 0 \quad (7.10)$$

★ Aplicar a técnica de completamento de quadrados nesses agrupamentos, ou seja:

$$[4x^2 - 8x] = 4(x - 1)^2 - 4 \quad (7.11)$$

$$[y^2 - 2y] = (y - 1)^2 - 1 \quad (7.12)$$

$$[4z^2 - 8z] = 4(z - 1)^2 - 4 \quad (7.13)$$

- ★ Substituir os complementos de quadrados (7.11), (7.12) e (7.13) na equação \mathcal{E}_2 (7.10):

$$\mathcal{H}_{1f_2} : \left[4(x-1)^2 - 4\right] - \left[(y-1)^2 - 1\right] + \left[4(z-1)^2 - 4\right] + 3 = 0$$

- ★ Teremos a equação na forma reduzida:

$$\mathcal{H}_{1f_2} : \frac{(x-1)^2}{1} - \frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$$

b) A quádrlica \mathcal{H}_{1f_2} possui centro $C = (1, 1, 1)$.

c) Interseções com os planos:

- ★ Plano $\pi_x : x = 1$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{H}_{1f_2}$ é a **hipérbola** com eixo focal paralelo ao eixo z :

$$\mathcal{C}_x : -\frac{(y-1)^2}{4} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$$

- ★ Plano $\pi_y : y = 1$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{H}_{1f_2}$ é a **circunferência** de raio $r = 1$:

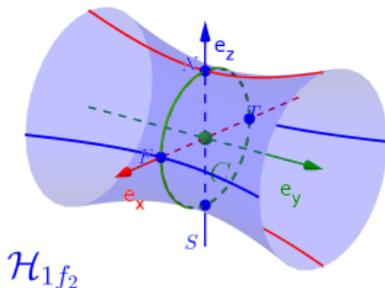
$$\mathcal{C}_y : \frac{(x-1)^2}{1} + \frac{(z-1)^2}{1} = 1$$

★ Plano $\pi_z : z = 1$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{H}_{1f_2}$ a **hipérbole** com eixo focal paralelo ao eixo x :

$$C_z : \frac{(x - 1)^2}{1} - \frac{(y - 1)^2}{4} = 1$$

d) Denominação da quádrlica \mathcal{H}_{1f_2} : **hiperboloide circular de uma folha** ou **hiperboloide de revolução de uma folha**.

e) Gráfico do elipsoide circular \mathcal{H}_{1f_2} :



f) Os pontos do elipsoide circular \mathcal{H}_{1f_2} correspondentes aos pontos **Norte**, **Sul**, e os pontos **Frontal** e

Traseiro são:

$$N_z = (1, 1, 2) \quad S_z = (1, 1, 0)$$

$$F_x = (2, 1, 1) \quad T_x = (0, 1, 1)$$

g) *A equação na forma matricial:*

$$\mathcal{H}_{1f_2} : [x \ y \ z] \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - [8 \ -2 \ 8] \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + 3 = 0$$

7.2.5 Hiperboloide de duas folhas \mathcal{H}_{2f}

Definição 7.5 (Hiperboloide de duas folha)

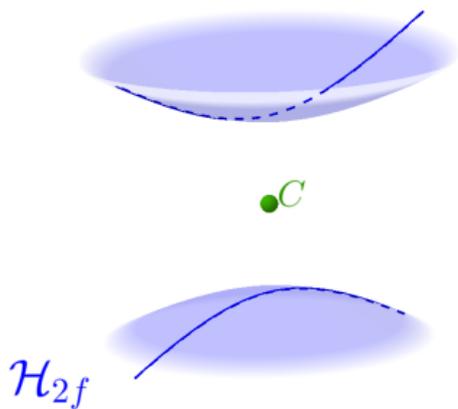
Na geometria euclidiana, um **hiperboloide de duas folhas** \mathcal{H}_{2f} (Figura 7.7) é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 com centro $C = (C_x, C_y, C_z)$ dada pelas equações:

$$\mathcal{H}_{2f_x} : \frac{(x-C_x)^2}{a^2} - \frac{(y-C_y)^2}{b^2} - \frac{(z-C_z)^2}{c^2} = 1 \quad (H_2)$$

$$\mathcal{H}_{2f_y} : -\frac{(x-C_x)^2}{a^2} + \frac{(y-C_y)^2}{b^2} - \frac{(z-C_z)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathcal{H}_{2f_z} : -\frac{(x-C_x)^2}{a^2} - \frac{(y-C_y)^2}{b^2} + \frac{(z-C_z)^2}{c^2} = 1$$

com a , b e c números reais não-nulos.

Figura 7.7: Representação de um hiperboloide de duas folha \mathcal{H}_{2f} .

7.2.5.1 Equações do Hiperboloide de duas folhas

Considerando os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e o centro $C = (C_x, C_y, C_z)$, temos as seguintes equações:

★ Equações na forma reduzida:

$$\mathcal{H}_{2f_x} : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} - \frac{(y - C_y)^2}{b^2} - \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathcal{H}_{2f_y} : -\frac{(x - C_x)^2}{a^2} + \frac{(y - C_y)^2}{b^2} - \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

$$\mathcal{H}_{2f_z} : -\frac{(x - C_x)^2}{a^2} - \frac{(y - C_y)^2}{b^2} + \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

★ Equação na forma paramétrica:

$$\mathcal{H}_{2f} : \begin{cases} x = C_x + a \cdot \sinh(\theta) \cos(\rho) \\ y = C_y + b \cdot \sinh(\theta) \sin(\rho) \\ z = C_z \pm c \cdot \cosh(\theta) \end{cases}$$

7.2.5.2 Interseções com o Hiperboloide de duas folhas

Considerando o hiperboloide de duas folhas \mathcal{H}_{2f} definida pela equação na forma reduzida (H_1), temos que as três interseções (Figura 7.8) com \mathcal{H}_{2f} são:

- ★ Com o plano $\pi_x : x = C_x$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{H}_{2f}$ é vazia, pois:

$$C_x : -\frac{(y - C_y)^2}{b^2} - \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

Neste caso escolhe-se um outro plano paralelo α_x ao plano π_x , de tal forma que a interseção $\alpha_x \cap \mathcal{H}_{2f}$ seja uma cônica conhecida, no caso a elipse:

$$C_{x_1} : \frac{(y - C_y)^2}{b^2} + \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

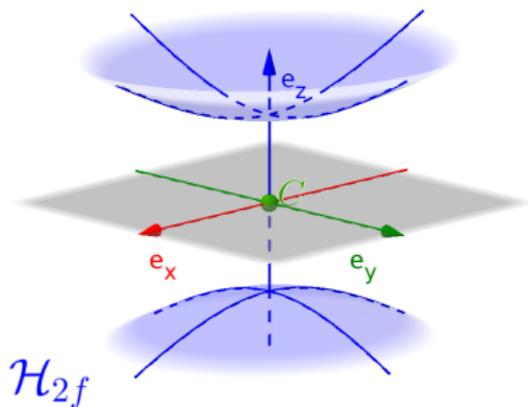
- ★ Com o plano $\pi_y : y = C_y$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{H}_{2f}$ é a hipérbole:

$$C_y : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} - \frac{(z - C_z)^2}{c^2} = 1$$

★ Com o plano $\pi_z : z = C_z$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{H}_{2f}$ é a hipérbole:

$$C_z : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} - \frac{(y - C_y)^2}{b^2} = 1$$

Figura 7.8: Representação de um hiperboloide de duas folhas \mathcal{H}_{2f} e as interseções com os planos.



Observação 7.4 *Em relação ao hiperboloide de duas folhas \mathcal{H}_{1f} definido pela equação (H_2) , teremos:*

- ★ *Apenas um dos coeficientes dos termos quadráticos do primeiro membro da equação (H_1) é positivo.*
- ★ *Duas das três interseções da quádrlica \mathcal{H}_{2f} com os planos π_x , π_y e π_z são hipérbolas, por este motivo é denominado **hiperboloide**.*
- ★ *A terceira interseção com a quádrlica \mathcal{H}_{2f} é vazia.*
- ★ *Após uma a escolha de um novo plano auxiliar α_n a interseção com a quádrlica \mathcal{H}_{2f} for uma:*
 - *Elipse será denominado **hiperboloide elíptica de duas folha**;*
 - *Circunferência será denominado **hiperboloide circular de duas folha** ou **hiperboloide de revolução de duas folha**;*
- ★ *O “sobrenome” duas folhas a superfície é tem duas partes separadas, ou seja, duas folhas.*

Exemplo 7.8 Considerando quádrica \mathcal{H}_{2f_1} definida pela equação:

$$\mathcal{H}_{2f_1} : -\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{2} = 1$$

a) Centro $C = (1, 2, 3)$.

b) Interseções com os planos:

★ Plano $\pi_x : x = 1$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{H}_{2f_1}$ é a **hipérbole** com eixo focal paralelo ao eixo z :

$$C_x : -\frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{2} = 1$$

★ Plano $\pi_y : y = 2$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{H}_{2f_1}$ é a **hipérbole** com eixo focal paralelo ao eixo z :

$$C_y : -\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(z-3)^2}{2} = 1$$

★ Plano $\pi_z : z = 3$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{H}_{2f_1}$ é um conjunto **vazio**^(b)!!!!

$$C_z : -\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

ou

$$C_z : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{4} = -1$$

Neste caso deve-se escolher um outro plano auxiliar $\pi_{z'}$ paralelo ao plano π_z de tal forma que a interseção com a quádrlica \mathcal{H}_{2f_1} seja a de uma cônica conhecida.

^(b) Observe que o resultado do lado direito da equação C_z é negativo e portanto nunca será igual a 1.

No caso por exemplo, para o plano $\pi_{z'} : z = 5$ a interseção $\pi_{z'} \cap \mathcal{H}_{2f_1}$ é a **circunferência** de raio 2 no plano paralelo ao plano xy , pois:

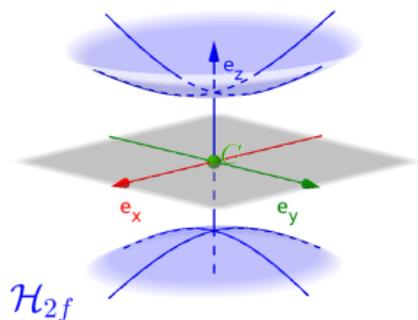
$$\begin{aligned} C_{x'} : -\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} + \frac{(5-3)^2}{2} &= 1 \\ -\frac{(x-1)^2}{4} - \frac{(y-2)^2}{4} &= -1 \end{aligned}$$

Logo:

$$C_{x'} : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{4} = 1$$

c) Denominação da quádrlica \mathcal{H}_{2f_1} : **hiperboloide circular de duas folhas** ou **hiperboloide de revolução de duas folha**.

d) Gráfico do hiperboloide circular de duas folhas \mathcal{H}_{2f_1} :



e) Os pontos da hiperboloide \mathcal{H}_{2f_1} correspondentes aos pontos Norte, Sul são:

$$N_z = (0, 0, \sqrt{2}) \quad S_z = (0, 0, -\sqrt{2})$$

f) A equação na forma geral:

$$\mathcal{H}_{1f_1} : -1x^2 - 1y^2 + 2z^2 + 2x + 4y - 12z - 4 = 0$$

g) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{H}_{2f_1} : \begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 4 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} - 4 = 0$$

7.2.6 Parabolóide Elíptico \mathcal{P}_e

Definição 7.6 (Parabolóide Elíptico)

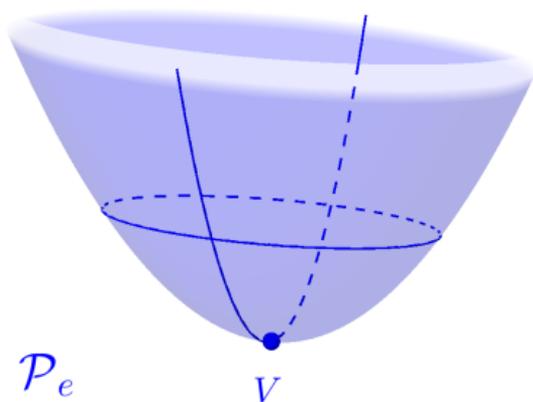
Na geometria euclidiana, um **parabolóide elíptico** \mathcal{P}_e (Figura 7.9) é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 com vértice $V = (V_x, V_y, V_z)$ definido por uma dessas equações:

$$\mathcal{P}_{e_x}: \frac{(y - V_y)^2}{b^2} + \frac{(z - V_z)^2}{c^2} = a(x - V_x)$$

$$\mathcal{P}_{e_y}: \frac{(x - V_x)^2}{a^2} + \frac{(z - V_z)^2}{c^2} = b(y - V_y) \quad (\mathcal{P}_e)$$

$$\mathcal{P}_{e_z}: \frac{(x - V_x)^2}{a^2} + \frac{(y - V_y)^2}{b^2} = c(z - V_z)$$

com a , b e c números reais não-nulos.

Figura 7.9: Representação de um parabolóide elíptico \mathcal{P}_e .

7.2.6.1 Equações do Paraboloide Elíptico

Considerando os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e o vértice $V = (V_x, V_y, V_z)$, temos as seguintes equações:

★ Equações na forma reduzida:

$$\mathcal{P}_{e_x} : \frac{(y - V_y)^2}{b^2} + \frac{(z - V_z)^2}{c^2} = a(x - V_x)$$

$$\mathcal{P}_{e_y} : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} + \frac{(z - V_z)^2}{c^2} = b(y - V_y)$$

$$\mathcal{P}_{e_z} : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} + \frac{(y - V_y)^2}{b^2} = c(z - V_z)$$

★ Equação na forma paramétrica:

$$\mathcal{P}_e : \begin{cases} x = a \cdot \kappa \cdot \cos(\theta) \\ y = b \cdot \kappa \cdot \text{sen}(\theta) \\ z = \frac{\kappa^2}{c} \end{cases}$$

7.2.6.2 Interações com o Parabolóide Elíptico

Considerando o parabolóide elíptico \mathcal{P}_e definido pela equação na forma reduzida (\mathcal{P}_e), temos que as três interseções (Figura 7.10) com a elipsoide são:

- ★ Com o plano $\pi_x : x = V_x$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{P}_e$ é a **parábola** com eixo de simetria paralelo ao eixo z :

$$C_x : \frac{(y - V_y)^2}{b^2} = c(z - V_z)$$

- ★ Com o plano $\pi_y : y = V_y$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{P}_e$ é a **parábola** com eixo de simetria paralelo ao eixo z :

$$C_y : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} = c(z - V_z)$$

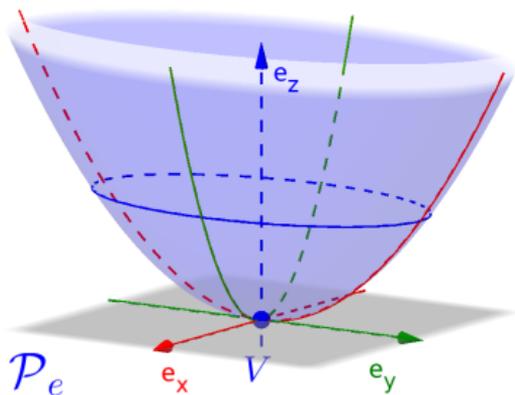
- ★ Com o plano $\pi_z : z = V_z$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{H}_{2f}$ é um ponto (V) pois:

$$C_z : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} + \frac{(y - V_y)^2}{b^2} = 0$$

Neste caso escolhe-se um outro plano paralelo α_z ao plano π_z , de tal forma que a interseção $\alpha_z \cap \mathcal{P}_e$ seja uma cônica conhecida, no caso a **elipse**:

$$C_{z_1} : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} + \frac{(y - V_y)^2}{b^2} = 1$$

Figura 7.10: Representação de um parabolóide elíptico \mathcal{P}_e e as interseções com os planos.



Observação 7.5 *Em relação ao parabolóide elíptico \mathcal{P}_e definido pela equação (P_e) , teremos:*

- ★ *Os dois coeficientes dos termos quadráticos do primeiro membro da equação (P_e) possuem o mesmo sinal.*
- ★ *Duas das três interseções da quádrlica \mathcal{P}_e com os planos π_x , π_y e π_z são parábolas, por este motivo é denominado **parabolóide**.*
- ★ *A terceira interseção com a quádrlica \mathcal{P}_e é um ponto do vértice (V) .*
- ★ *Após uma a escolha de um novo plano auxiliar α_n a interseção com a quádrlica \mathcal{P}_e for uma:*
 - *Elipse será denominado **parabolóide elíptica**;*
 - *Circunferência será denominado **parabolóide circular**.*

7.2.7 Parabolóide Hiperbólico \mathcal{P}_h

Definição 7.7 (Parabolóide Hiperbólico)

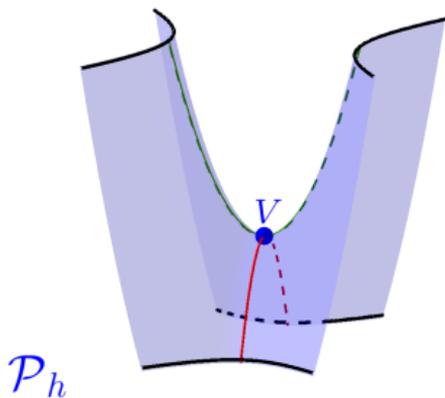
Na geometria euclidiana, um **parabolóide Hiperbólico** \mathcal{P}_h (Figura 7.9) é o lugar geométrico dos pontos $P = (x, y, z)$ do espaço tridimensional \mathbb{R}^3 com vértice $V = (V_x, V_y, V_z)$ definido por uma dessas equações:

$$\mathcal{P}_{h_x}: \frac{(y - V_y)^2}{b^2} - \frac{(z - V_z)^2}{c^2} = a(x - V_x)$$

$$\mathcal{P}_{h_y}: \frac{(x - V_x)^2}{a^2} - \frac{(z - V_z)^2}{c^2} = b(y - V_y) \quad (\mathcal{P}_h)$$

$$\mathcal{P}_{h_z}: \frac{(x - V_x)^2}{a^2} - \frac{(y - V_y)^2}{b^2} = c(z - V_z)$$

com a , b e c números reais não-nulos.

Figura 7.11: Representação de um parabolóide hiperbólico \mathcal{P}_h .

7.2.7.1 Equações do Paraboloide Hiperbólico

Considerando os pontos $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e o vértice $V = (V_x, V_y, V_z)$, temos as seguintes equações:

★ Equações na forma reduzida:

$$\mathcal{P}_{h_x} : \frac{(y - V_y)^2}{b^2} - \frac{(z - V_z)^2}{c^2} = a(x - V_x)$$

$$\mathcal{P}_{h_y} : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} - \frac{(z - V_z)^2}{c^2} = b(y - V_y)$$

$$\mathcal{P}_{h_z} : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} - \frac{(y - V_y)^2}{b^2} = c(z - V_z)$$

★ Equação na forma paramétrica:

$$\mathcal{P}_e : \begin{cases} x = \kappa + \tau \\ y = \frac{b}{a}\tau \\ z = \frac{\kappa^2 + 2 \cdot \kappa \cdot \tau}{a^2 c} \end{cases}$$

7.2.7.2 Interações com o Parabolóide Hiperbólico

Considerando o parabolóide hiperbólico \mathcal{P}_h definido pela equação na forma reduzida (P_h), temos que as três interseções (Figura 7.12) com a parabolóide são:

- ★ Com o plano $\pi_x : x = V_x$ a interseção $\pi_x \cap \mathcal{P}_e$ é a **parábola** com eixo de simetria paralelo ao eixo z :

$$C_x : -\frac{(y - V_y)^2}{b^2} = c(z - V_z)$$

- ★ Com o plano $\pi_y : y = V_y$ a interseção $\pi_y \cap \mathcal{P}_e$ é a **parábola** com eixo de simetria paralelo ao eixo z :

$$C_y : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} = c(z - V_z)$$

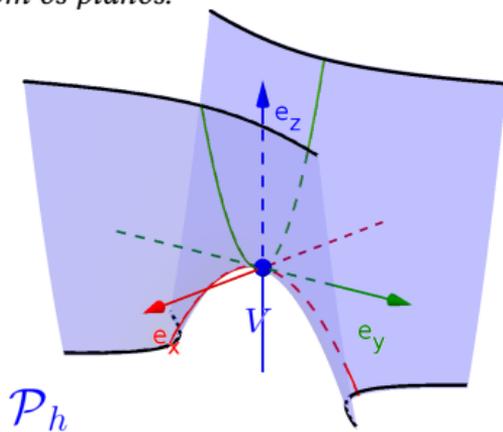
- ★ Com o plano $\pi_z : z = V_z$ a interseção $\pi_z \cap \mathcal{P}_h$ são duas retas pois:

$$C_z : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} - \frac{(y - V_y)^2}{b^2} = 0$$

Neste caso escolhe-se um outro plano paralelo α_z ao plano π_z , de tal forma que a interseção $\alpha_z \cap \mathcal{P}_h$ seja uma cônica conhecida, no caso a **hipérbole**:

$$\mathcal{C}_{z_1} : \frac{(x - V_x)^2}{a^2} - \frac{(y - V_y)^2}{b^2} = 1$$

Figura 7.12: Representação de um parabolóide hiperbólico \mathcal{P}_h e as interseções com os planos.



Observação 7.6 *Em relação ao parabolóide hiperbólico \mathcal{P}_h definido pela equação (P_h), teremos:*

- ★ *Os dois coeficientes dos termos quadráticos do primeiro membro da equação (P_h) possuem sinais opostos.*
- ★ *Duas das três interseções da quádrlica \mathcal{P}_e com os planos π_x , π_y e π_z são parábolas, por este motivo é denominado **parabolóide**.*
- ★ *A terceira interseção com a quádrlica \mathcal{P}_h são duas retas concorrentes.*
- ★ *Após uma a escolha de um novo plano auxiliar α_n a interseção com a quádrlica \mathcal{P}_h é uma hipérbole, portanto denominada **parabolóide hiperbólico**.*
- ★ *O parabolóide hiperbólico também é conhecida como “cela de cavalo” e vértice é denominado de “ponto de cela”.*

