Produtos

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

(Notas - 28/3/2023)

Sérgio de Albuquerque Souza

Sumário

Capítulo 2

Produtos entre Vetores

Deste momento em diante, estaremos sempre trabalhando no espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, porém algumas ideias também podem ser expandidas para dimensões maiores, que serão tratadas na disciplina Introdução a Álgebra Linear.

Os produtos entre vetores são operações que trazem um apelo geométrico bem interessante e que serão muito úteis na compreensão das definições, propriedades e resoluções de alguns problemas, pois estes produtos estão relacionados com as grandezas:

- **Comprimento** (produto interno) – uma dimensão,
- **Área** (produto vetorial) – duas dimensões
- **Volume** (produto misto) – três dimensões

gerado por vetores em certas condições.

2.1 Produto Interno

O produto interno está muito relacionado com uma medida de uma dimensão, um comprimento, seja olhando como o tamanho de uma projeção de um vetor em relação a um outro, seja vendo como o comprimento de um vetor qualquer.

Definição 2.1 (Produto Interno)
*Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, definiremos como **produto interno** (ou produto escalar) entre esses vetores o **número** real denotado por $\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v}}$ e definido pela expressão:*

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right)}$$

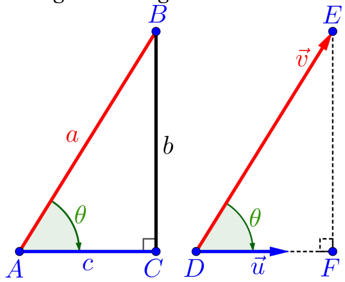
Se $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$ então definiremos que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$.

Observação 2.1 *Este número, produto interno, aparentemente vindo do nada, na realidade surge de uma simples razão trigonométrica em um triângulo retângulo* ABC *(Figura 2.1), dada por:*

$$\boxed{c = a \cdot \cos(\theta)} \text{ ou}$$

$$\boxed{\cos(\theta) = \frac{c}{a} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}}$$

Figura 2.1: *Triângulos retângulos semelhantes* ABC *e* DEF.



Observação 2.2 *Considerando como vetor unitário o vetor* $\overrightarrow{u}$, *isto é,* $\|\overrightarrow{u}\| = 1$ *e do triângulo retângulo* DEF *(Figura 2.1), temos que a norma do vetor* $\overrightarrow{DF}$ *é*

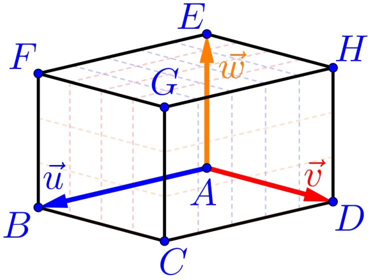
$$\begin{aligned} \left\|\overrightarrow{DF}\right\| &= \|\overrightarrow{v}\| \cdot \left|\cos(\theta)\right| \\ &= \|\overrightarrow{v}\| \cdot \|\overrightarrow{u}\| \cdot \left|\cos(\overrightarrow{v}, \overrightarrow{u})\right| \end{aligned}$$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{DF}\right\| = |\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}|}$$

ou seja, podemos ver este número como sendo o comprimento da projeção do vetor $\overrightarrow{v}$ *em relação à direção do vetor unitário* $\overrightarrow{u}$. *Desta forma podemos definir um vetor chamado* ***vetor projeção*** *do vetor* $\overrightarrow{v}$ *na direção do vetor unitário* $\overrightarrow{u}$, *como:*

$$\boxed{\operatorname{proj}_{\overrightarrow{u}} \overrightarrow{v} = (\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u})\, \overrightarrow{u}}$$

Figura 2.2: *Paralelepípedo $ABCDEFGH$ com dimensões* $5 \times 4 \times 3$.



Exemplo 2.1 *Considerando os vetores ortogonais $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, com $\|\vec{u}\| = 5$, $\|\vec{v}\| = 4$ e $\|\vec{w}\| = 3$ definidos no paralelepípedo $ABCDEFGH$ (Figura 2.2), então:*

a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, *pois:*

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot \cos(90^o) \\ &= 20 \cdot \cos(90^o) = 0 \end{aligned}$$

b) $\vec{v} \cdot \vec{w} = 0$, *pois:*

$$\begin{aligned}\vec{v} \cdot \vec{w} &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{w}\| \cdot \cos\left(\vec{v}, \vec{w}\right) \\ &= 4 \cdot 3 \cdot \cos\left(90^o\right) \\ &= 12 \cdot \cos\left(90^o\right) = 0\end{aligned}$$

c) $\vec{w} \cdot \vec{u} = 0$, *pois:*

$$\begin{aligned}\vec{w} \cdot \vec{u} &= \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\left(\vec{w}, \vec{u}\right) \\ &= 3 \cdot 5 \cdot \cos\left(90^o\right) \\ &= 15 \cdot \cos\left(90^o\right) = 0\end{aligned}$$

d) $\vec{u} \cdot \vec{u} = 25$, *pois:*

$$\begin{aligned}\vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\left(\vec{u}, \vec{u}\right) \\ &= 5 \cdot 5 \cdot \cos\left(0^o\right) \\ &= 25 \cdot \cos\left(0^o\right) = 25\end{aligned}$$

e) $(-\vec{u}) \cdot \vec{u} = -25$, *pois:*

$$\begin{aligned}(-\vec{u}) \cdot \vec{u} &= \|-\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos\left(-\vec{u}, \vec{u}\right) \\ &= 5 \cdot 5 \cdot \cos\left(180^o\right) \\ &= 25 \cdot \cos\left(180^o\right) = -25\end{aligned}$$

f) $(2\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) = 0$, *pois:*

$$\begin{aligned}(2\vec{u}) \cdot (3\vec{v}) &= \|2\vec{u}\| \cdot \|3\vec{v}\| \cdot \cos(2\vec{u}, 3\vec{v}) \\ &= (2 \cdot 5) \cdot (3 \cdot 4) \cdot \cos(90^o) \\ &= 120 \cdot \cos(90^o) = 0\end{aligned}$$

g) $(-3\vec{v}) \cdot (2\vec{w}) = 0$, *pois:*

$$\begin{aligned}(-3\vec{v}) \cdot (2\vec{w}) &= \|-3\vec{v}\| \cdot \|2\vec{w}\| \cdot \cos(-3\vec{v}, 2\vec{w}) \\ &= \big(|-3| \cdot 4\big) \cdot (2 \cdot 3) \cdot \cos(-90^o) \\ &= 72 \cdot \cos(-90^o) = 0\end{aligned}$$

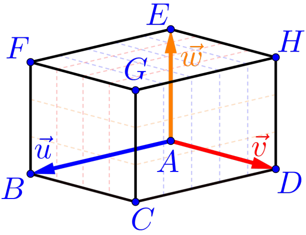
h) $\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, *pois:*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{EF} \cdot \overrightarrow{BC} &= \left\|\overrightarrow{EF}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{EF}, \overrightarrow{BC}\right) \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= 5 \cdot 4 \cdot \cos(90^o) \\ &= 20 \cdot \cos(90^o) = 0\end{aligned}$$

i) $\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{EH} = 0$, *pois:*

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CG} \cdot \overrightarrow{EH} &= \left\|\overrightarrow{CG}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{EH}\right\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{CG}, \overrightarrow{EH}\right) \\ &= \|\vec{w}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{w}, \vec{v}) \\ &= 3 \cdot 4 \cdot \cos(-90^o) \\ &= 12 \cdot \cos(-90^o) = 0\end{aligned}$$

Exercício 2.1 *Encontre os produtos internos de todas as combinações entre os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ da figura abaixo, bem como de seus opostos.*



2.1.1 Propriedades do Produto Interno

Considerando três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e os números $\tau, \kappa \in \mathbb{R}$, teremos:

PI1 – Propriedade Comutativa:

Propriedade comutativa do produto interno:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}}$$

Como o cosseno é par, isto é, $\cos(\theta) = \cos(-\theta)$, para todo ângulo θ e como os ângulos $(\vec{u}, \vec{v})$ e $(\vec{v}, \vec{u})$ são opostos, temos:

$$\cos(\vec{u}, \vec{v}) = \cos\big(-(\vec{v}, \vec{u})\big) = \cos(\vec{v}, \vec{u})$$

Logo segue o resultado:

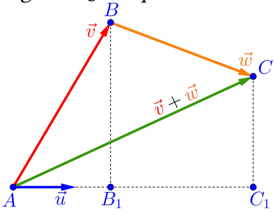
$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\vec{v}, \vec{u}) \\ &= \vec{v} \cdot \vec{u} \end{aligned}$$

PI2 – Propriedade Distributiva:

Propriedade distributiva do produto interno em relação à soma:

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}}$$

Figura 2.3: *Propriedade* ***PI2***.



Considerando o vetor $\vec{u}$ unitário ($\|\vec{u}\| = 1$) e os vetores $\vec{v}$ e $\vec{w}$, como na Figura 2.3, teremos:

- Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, que:

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AB_1}\right\| &= \left\|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{v}\right\| \\ &= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{AB_1}\right\| = \vec{u}\cdot\vec{v}}$$

- Considerando os vetores $\vec{u}$ e $\vec{w}$, que:

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{B_1C_1}\right\| &= \left\|\text{proj}_{\vec{u}}\vec{w}\right\| \\ &= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{w}\|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{w}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{B_1C_1}\right\| = \vec{u}\cdot\vec{w}}$$

- Considerando os vetores $\vec{u}$ e $(\vec{v}+\vec{w})$, que:

$$\begin{aligned}\left\|\overrightarrow{AC_1}\right\| &= \left\|\text{proj}_{\vec{u}}(\vec{v}+\vec{w})\right\| \\ &= \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}+\vec{w}\|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}+\vec{w}\right)\end{aligned}$$

$$\boxed{\left\|\overrightarrow{AC_1}\right\| = \vec{u}\cdot(\vec{v}+\vec{w})}$$

Logo como:

$$\left\|\overrightarrow{AC_1}\right\| = \left\|\overrightarrow{AB_1}\right\| + \left\|\overrightarrow{B_1C_1}\right\|$$

segue o resultado:

$$\boxed{\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}}$$

Exercício 2.2 *Mostre que a propriedade PI2 também é válida quando pelo menos um dos ângulos* $(\vec{u}, \vec{v})$ *ou* $(\vec{u}, \vec{w})$ *for maior do que* 90^o*.*

PI3 – Homogeneidade:

Seja $\kappa \in \mathbb{R}$, então:

$$\boxed{\kappa\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) = \left(\kappa\vec{u}\right) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \left(\kappa\vec{v}\right)}$$

- Se $\kappa > 0$, os ângulos $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ e $\left(\kappa\vec{u}, \vec{v}\right)$ são iguais, logo:

$$\begin{aligned} \kappa\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) &= \kappa \left\|\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \\ &= \left\|\kappa\vec{u}\right\| \cdot \left\|\vec{v}\right\| \cdot \cos\left(\kappa\vec{u}, \vec{v}\right) \end{aligned}$$

$$\boxed{\kappa\left(\vec{u} \cdot \vec{v}\right) = \left(\kappa\vec{u}\right) \cdot \vec{v}}$$

- Se $\kappa < 0$, os ângulos $\left(\vec{u}, \vec{v}\right)$ e $\left(\kappa\vec{u}, \vec{v}\right)$ são suplementares, ou seja,

$$\left(\vec{u}, \vec{v}\right) + \left(\kappa\vec{u}, \vec{v}\right) = 180^o$$

logo:

$$\begin{aligned} \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) &= \cos\left[180^o - \left(\kappa\vec{u}, \vec{v}\right)\right] \\ &= -\cos\left(\kappa\vec{u}, \vec{v}\right) \end{aligned}$$

temos que:

$$\begin{aligned}
\kappa\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) &= \kappa\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cdot\cos\left(\vec{u},\vec{v}\right)\\
&= \kappa\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cdot\left[-\cos\left(\kappa\vec{u},\vec{v}\right)\right]\\
&= -\kappa\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cdot\cos\left(\kappa\vec{u},\vec{v}\right)\\
&= \left|\kappa\right|\left\|\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cdot\cos\left(\kappa\vec{u},\vec{v}\right)\\
&= \left\|\kappa\vec{u}\right\|\cdot\left\|\vec{v}\right\|\cdot\cos\left(\kappa\vec{u},\vec{v}\right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\kappa\left(\vec{u}\cdot\vec{v}\right) = \left(\kappa\vec{u}\right)\cdot\vec{v}}$$

PI4 – Norma:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = \|\vec{u}\|^2 \text{ ou } \|\vec{u}\| = \sqrt{\vec{u} \cdot \vec{u}}}$$

Se $\vec{u}$ é não nulo, o angulo entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{u}$ é zero graus, ou seja, $(\vec{u}, \vec{u}) = 0^o$ e portanto da definição do produto interno temos:

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{u} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{u}) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \cdot \cos(0^o) \\ &= \|\vec{u}\|^2 \end{aligned}$$

É claro que $\vec{u} = \vec{0}$ satisfaz a propriedade PI4.

PI5 – Ortogonalidade:
Dois vetores não nulos $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são ortogonais se, e somente se, $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$$

Se $\vec{u} \perp \vec{v}$, então $(\vec{u}, \vec{v}) = 90^o$ e como $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são não nulos, ou seja, $\|\vec{u}\| \neq \vec{0}$ e $\|\vec{v}\| \neq \vec{0}$ logo

$$\begin{aligned} \vec{u} \cdot \vec{v} &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 0 \\ \boxed{\vec{u} \cdot \vec{v} = 0} \end{aligned}$$

PI6 – Desigualdade de Schwarz:

$$\boxed{|\vec{u} \cdot \vec{v}| \leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$$

Como o valor absoluto do cosseno de qualquer ângulo θ é menor ou igual a 1, isto é, $0 \leq |\cos\theta| \leq 1$, temos:

$$\begin{aligned} |\vec{u} \cdot \vec{v}| &= \Big| \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Big| \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \Big| \cos(\vec{u}, \vec{v}) \Big| \\ &\leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot 1 \\ &\leq \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \end{aligned}$$

PI7 – Positividade:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} \geq 0} \text{ e } \boxed{\vec{u} \cdot \vec{u} = 0 \Longleftrightarrow \vec{u} = \vec{0}}$$

Exemplo 2.2 *Supondo que* $\|\vec{u}\| = \sqrt{3}$, $\|\vec{v}\| = 2$ *e que* 30^o *é medida do ângulo entre os vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$, *então os valores:*

a) $a = \vec{u} \cdot \vec{v} = 3$, *pois por definição temos que:*

$$\begin{aligned} a &= \vec{u} \cdot \vec{v} \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\vec{u}, \vec{v}\right) \\ &= \left(\sqrt{3}\right) \cdot (2) \cdot \cos\left(30^o\right) \\ &= 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2 \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{3}}{2} \\ &\boxed{a = 3} \end{aligned}$$

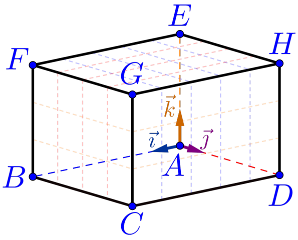
b) $b = \|3\vec{u} - 2\vec{v}\| = \sqrt{7}$, *pois:*

$$\begin{aligned} b^2 &= \|3\vec{u} - 2\vec{v}\|^2 \\ &= (3\vec{u} - 2\vec{v}) \cdot (3\vec{u} - 2\vec{v}) \\ &= (3\vec{u}) \cdot (3\vec{u}) + (3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v}) \\ &\quad + (-2\vec{v}) \cdot (3\vec{u}) + (-2\vec{v}) \cdot (-2\vec{v}) \\ &= \|3\vec{u}\|^2 + 2 \cdot (3\vec{u}) \cdot (-2\vec{v}) + \|-2\vec{v}\|^2 \\ &= |3|^2 \cdot \|\vec{u}\|^2 - 12\,(\vec{u} \cdot \vec{v}) + |-2|^2 \cdot \|\vec{v}\|^2 \\ &= 9 \cdot \left(\sqrt{3}\right)^2 - 12 \cdot 3 + 4 \cdot (2)^2 \\ &= 27 - 36 + 16 \end{aligned}$$

$$\boxed{b^2 = 7}$$

Logo: $b = \|3\vec{u} - 2\vec{v}\| = \sqrt{7}$

Exemplo 2.3 *Com base nestas propriedades e considerando os vetores unitários e ortogonais* $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ *e* $\vec{k}$ *definidos no paralelepípedo* $ABCDEFGH$ *com dimensões* $5 \times 4 \times 3$ *e vetores ortogonais e unitários* $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ *e* $\vec{k}$, *conforme a figura abaixo, teremos:*



a) $a = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 25$, *pois:*

$$\begin{aligned} a &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= (5\vec{\imath}) \cdot (5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) \\ &= (5\vec{\imath} \cdot 5\vec{\imath}) + (5\vec{\imath} \cdot 4\vec{\jmath}) \\ &= 25 \cdot \|\vec{\imath}\|^2 + 20 \cdot (\vec{\imath} \cdot \vec{\jmath}) \\ &= 25 \cdot 1 + 20 \cdot 0 = 25 \end{aligned}$$

b) $b = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG} = 50$, *pois:*

$$\begin{aligned}
b &= \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG} \\
&= \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&= 5\vec{\imath} \cdot \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&\quad + 4\vec{\jmath} \cdot \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&\quad + 3\vec{k} \cdot \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&= (5\vec{\imath} \cdot 5\vec{\imath}) + (5\vec{\imath} \cdot 4\vec{\jmath}) + \left(5\vec{\imath} \cdot 3\vec{k}\right) \\
&\quad + (4\vec{\jmath} \cdot 5\vec{\imath}) + (4\vec{\jmath} \cdot 4\vec{\jmath}) + \left(4\vec{\jmath} \cdot 3\vec{k}\right) \\
&\quad + \left(3\vec{k} \cdot 5\vec{\imath}\right) + \left(3\vec{k} \cdot 4\vec{\jmath}\right) + \left(3\vec{k} \cdot 3\vec{k}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
b &= 25\cdot\|\vec{\imath}\|^2 + 20\cdot(\vec{\imath}\cdot\vec{\jmath}) + 15\cdot\left(\vec{\imath}\cdot\vec{k}\right)\\
&\quad + 20\cdot(\vec{\jmath}\cdot\vec{\imath}) + 16\cdot\|\vec{\jmath}\|^2 + 12\cdot\left(\vec{\jmath}\cdot\vec{k}\right)\\
&\quad + 15\cdot\left(\vec{k}\cdot\vec{\imath}\right) + 12\cdot\left(\vec{k}\cdot\vec{\jmath}\right) + 9\cdot\left\|\vec{k}\right\|^2\\
&= 25\cdot(1)^2 + 20\cdot 0 + 15\cdot 0\\
&\quad + 20\cdot 0 + 16\cdot(1)^2 + 12\cdot 0\\
&\quad + 15\cdot 0 + 12\cdot 0 + 9\cdot(1)^2\\
&= 25 + 16 + 9 = 50
\end{aligned}
$$

c) *O comprimento do segmento $\overline{AG}$ é dado pela norma do vetor $\overrightarrow{AG}$, isto é:*

$$\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AG}\cdot\overrightarrow{AG}} = \sqrt{50}$$

Portanto o comprimento do segmento será igual a $\sqrt{50} \simeq 7{,}07\, u.c.$[1].

[1] *A simbologia u.c. significa unidade de comprimento, por exemplo:* m *(metro),* cm *(centímetro), etc.*

d) $d = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} = -32$, *pois:*

$$
\begin{aligned}
d &= \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} \\
&= \left(5\vec{i} + 4\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(-5\vec{i} - 4\vec{j} + 3\vec{k}\right) \\
&= (5\vec{i} \cdot -5\vec{i}) + (5\vec{i} \cdot -4\vec{j}) + \left(5\vec{i} \cdot 3\vec{k}\right) \\
&\quad + (4\vec{j} \cdot -5\vec{i}) + (4\vec{j} \cdot -4\vec{j}) + \left(4\vec{j} \cdot 3\vec{k}\right) \\
&\quad + \left(3\vec{k} \cdot -5\vec{i}\right) + \left(3\vec{k} \cdot -4\vec{j}\right) + \left(3\vec{k} \cdot 3\vec{k}\right) \\
&= -25\,(\vec{i} \cdot \vec{i}) - 20\,(\vec{i} \cdot \vec{j}) + 15\left(\vec{i} \cdot \vec{k}\right) \\
&\quad -20\,(\vec{j} \cdot \vec{i}) - 16\,(\vec{j} \cdot \vec{j}) + 12\left(\vec{j} \cdot \vec{k}\right) \\
&\quad - 15\left(\vec{k} \cdot \vec{i}\right) - 12\left(\vec{k} \cdot \vec{j}\right) + 9\left(\vec{k} \cdot \vec{k}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
d &= -25\cdot(1)^2 - 20\cdot 0 + 15\cdot 0 \\
&\quad - 20\cdot 0 - 16\cdot(1)^2 + 12\cdot 0 \\
&\quad - 15\cdot 0 - 12\cdot 0 + 9\cdot(1)^2 \\
&= -25 - 16 + 9 = -32
\end{aligned}
$$

e) Os vetores $\overrightarrow{AG}$ e $\overrightarrow{CE}$ estão representados por duas diagonais internas e usando a definição do produto interno para esses vetores, teremos:

$$\overrightarrow{AG} \bullet \overrightarrow{CE} = \left\|\overrightarrow{AG}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{CE}\right\| \cdot \cos\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}\right)$$
$$-32 = \sqrt{50} \cdot \sqrt{50} \cdot \cos\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}\right)$$

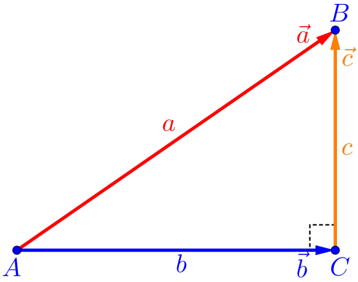
logo

$$\cos\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}\right) = \frac{-32}{\sqrt{50} \cdot \sqrt{50}}$$
$$= \frac{-32}{50} = \frac{-16}{25}$$
$$\boxed{\cos\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}\right) = -0{,}64}$$

Portanto podemos calcular o ângulo entre as diagonais, ou seja, entre esses vetores como:

$$\boxed{\left(\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}\right) = \arccos\left(-0{,}64\right) \approx 129{,}8^o}$$

Exemplo 2.4 *Uma Demonstração do teorema de Pitágoras para um triângulo retângulo qualquer. Usando o triângulo ABC da figura abaixo.*



Considerando os vetores definidos por $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{b} = \overrightarrow{AC}$ e $\vec{c} = \overrightarrow{CB}$, teremos que:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} \Longrightarrow \boxed{\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}}$$

Logo a norma do vetor $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$*, ou seja, o comprimento da hipotenusa* a*, será determinado por:*

$$\begin{aligned} a^2 = \|\vec{a}\|^2 &= \left\|\vec{b} + \vec{c}\right\|^2 \\ &= \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \cdot \left(\vec{b} + \vec{c}\right) \\ &= \left(\vec{b} \cdot \vec{b}\right) + 2\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) + (\vec{c} \cdot \vec{c}) \\ \|\vec{a}\|^2 &= \left\|\vec{b}\right\|^2 + 2\left(\vec{b} \cdot \vec{c}\right) + \|\vec{c}\|^2 \end{aligned}$$

como o triângulo ABC *é retângulo, os vetores* $\vec{b}$ *e* $\vec{c}$ *são perpendiculares* $\left(\vec{b} \perp \vec{c}\right)$*, então* $\vec{b} \cdot \vec{c} = 0$*, o que resulta em:*

$$\|\vec{a}\|^2 = \left\|\vec{b}\right\|^2 + \|\vec{c}\|^2 \Longrightarrow \boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Proposição 2.1 *Em uma base* $\beta = \left\{ \overrightarrow{b}_1, \overrightarrow{b}_2, \overrightarrow{b}_3 \right\}$ *ortonormal no espaço tridimensional e considerando dois vetores* $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *quaisquer escritos nessa base, ou seja:*

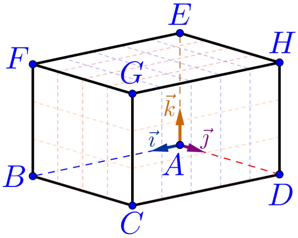
$$\overrightarrow{u} = u_1 \overrightarrow{b}_1 + u_2 \overrightarrow{b}_2 + u_3 \overrightarrow{b}_3$$

$$\overrightarrow{v} = v_1 \overrightarrow{b}_1 + v_2 \overrightarrow{b}_2 + v_3 \overrightarrow{b}_3$$

Então o produto interno entre os vetores $\overrightarrow{u}$ *e* $\overrightarrow{v}$ *é calculado como:*

$$\boxed{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + u_3 \cdot v_3}$$

Exemplo 2.5 *Utilizando a proposição 2.1 e considerando a base ortonormal* $\beta = \left\{ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} \right\}$ *definida no paralelepípedo* $ABCDEFGH$ *de dimensões* $5 \times 4 \times 3$*, conforme a figura abaixo, teremos:*



a) $a = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 25$*, pois:*

$$\begin{aligned} a &= \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \\ &= \left(5\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}\right) \cdot \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 0\vec{k}\right) \\ &= (5)\cdot(5) + (0)\cdot(4) + (0)\cdot(0) = 25 \end{aligned}$$

b) $b = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG} = 50$, *pois:*

$$\begin{aligned} b &= \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG} \\ &= \left(5\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}\right) \cdot \left(5\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}\right) \\ &= (5)\cdot(5) + (4)\cdot(4) + (3)\cdot(3) \\ &= 25 + 16 + 9 = 50 \end{aligned}$$

Lembre-se que: $\left\|\overrightarrow{AG}\right\| = \sqrt{\overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{AG}} = \sqrt{50}.$

c) $c = \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} = -32$, *pois:*

$$\begin{aligned} c &= \overrightarrow{AG} \cdot \overrightarrow{CE} \\ &= \left(5\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}\right) \cdot \left(-5\,\vec{\imath} - 4\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}\right) \\ &= (5)\cdot(-5) + (4)\cdot(-4) + (3)\cdot(3) \\ &= -25 - 16 + 9 = -32 \end{aligned}$$

d) Considerando os vetores $\vec{d}_1 = 1\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}$ *e* $\vec{d}_2 = 1\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 1\vec{k}$*, então:*

$$\begin{aligned} d &= \vec{d}_1 \cdot \vec{d}_2 \\ &= \left(1\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(1\vec{\imath} - 1\vec{\jmath} + 1\vec{k}\right) \\ &= (1)\cdot(1) + (2)\cdot(-1) + (3)\cdot(1) \\ &= 1 - 2 + 3 = 2 \end{aligned}$$

e) Considerando os vetores $\vec{e}_1 = 3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 1\vec{k}$ *e* $\vec{e}_2 = -1\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 1\vec{k}$*, então:*

$$\begin{aligned} e &= \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 \\ &= \left(3\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} + 1\vec{k}\right) \cdot \left(-1\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 1\vec{k}\right) \\ &= (3)\cdot(-1) + (2)\cdot(1) + (1)\cdot(1) \\ &= -3 + 2 + 1 = 0 \Longrightarrow \boxed{\vec{e}_1 \perp \vec{e}_2} \end{aligned}$$

f) Considerando os vetores $\vec{f}_1 = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$ *e* $\vec{f}_2 = \frac{\vec{i}}{3} + \frac{\vec{k}}{4}$*, então:*

$$
\begin{aligned}
f &= \vec{f}_1 \cdot \vec{f}_2 \\
&= \left(-1\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}\right) \cdot \left(\frac{1}{3}\vec{i} + 0\vec{j} + \frac{1}{4}\vec{k}\right) \\
&= (-1) \cdot \left(\frac{1}{3}\right) + (2) \cdot (0) + (3) \cdot \left(\frac{1}{4}\right) \\
&= -\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{-4+9}{12} = \frac{5}{12}
\end{aligned}
$$

2.2 Produto Vetorial

O produto vetorial entre dois vetores quaisquer é um vetor cuja norma está relacionada geometricamente com uma medida em duas dimensões, ou seja, uma área. O fato do produto vetorial não ser o vetor nulo, será um indicativo, por exemplo, de que:

- Três pontos, que definem dois vetores, formam um triângulo, ou seja, não são colineares;
- Os vetores não são paralelos;
- Que duas retas são paralelas (Capítulo 4);

Além disso, o produto vetorial tem muitas aplicações na física/engenharias como campo magnético, torção, etc.

Definição 2.2 (Produto Vetorial)
Dados dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos, definiremos como o ***produto vetorial*** *(ou produto externo) entre esses vetores o* ***vetor*** *denotado por* $\boxed{\vec{u} \times \vec{v}}$*, definido pelas seguintes características vetoriais:*

- ***Norma***:

  A norma do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é definido por:

  $$\boxed{\|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \left|\operatorname{sen}(\vec{u}, \vec{v})\right|}$$

- ***Direção***:

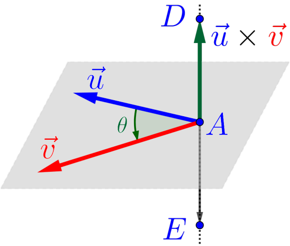
  A direção do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja,

  $$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{u}} \quad e \quad \boxed{\vec{u} \times \vec{v} \perp \vec{v}}$$

- ***Sentido***:

  O sentido do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é dado pela "regra da mão direita" que é equivalente algebricamente a base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{u} \times \vec{v}\}$ ser uma base positiva do $\mathbb{R}^3$.

Observação 2.3 *Observando a figura abaixo em relação à definição do produto vetorial.*



- *Note que apenas com a direção teríamos uma infinidade de vetores para representar o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$, pois qualquer vetor $\overrightarrow{AD}$, onde $D \in r$, satisfaz a direção exigida, onde r é a reta que contém o ponto A e é perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$;*

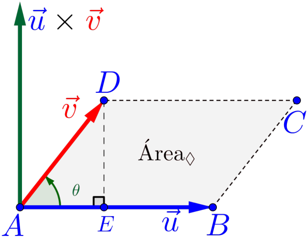
- *Com a característica da norma, teríamos duas possibilidades para o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$, ou seja, o vetor $\overrightarrow{AD}$ e o vetor $\overrightarrow{AE}$, desde que estes tenham a norma igual a $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$;*

- *Para que o vetor* $\vec{u} \times \vec{v}$ *seja bem definido, teremos que escolher um deles. A escolha será feita usando a "regra da mão direita", exibida no tópico a seguir, mas já adiantando que o vetor* $\vec{u} \times \vec{v}$ *é o vetor* $\overrightarrow{AD}$*.*

- *Note que o vetor* $\overrightarrow{AE}$*, tem mesma direção, mesmo comprimento, mas sentido oposto, logo este vetor é o oposto do vetor* $\vec{u} \times \vec{v}$*, ou seja,*

$$\overrightarrow{AE} = -(\vec{u} \times \vec{v})$$

Observação 2.4 *Geometricamente o número associado à norma* $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ *corresponde exatamente a área do paralelogramo* $ABCD$ *formado pelos vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$*, conforme a figura abaixo.*



- *Basta observar que a área de um paralelogramo qualquer é sempre comprimento da base vezes a altura. Logo, no caso do paralelogramo $ABCD$ formado pelos vetores, a área é dada por:*

$$\textit{Área}_{\Diamond} = \textit{base} \cdot \textit{altura} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{DE}\right\|$$

Do triângulo retângulo ADE temos a seguinte relação:

$$\left\|\overrightarrow{DE}\right\| = \left\|\overrightarrow{AD}\right\| \cdot \left|\operatorname{sen}(\theta)\right| = \|\vec{v}\| \cdot \left|\operatorname{sen}(\vec{u}, \vec{v})\right|$$

logo a área é dada por:

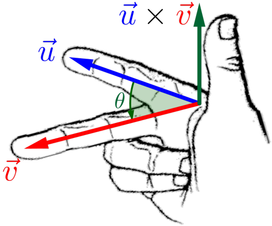
$$\begin{aligned} \textit{Área}_{\Diamond} &= \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{DE}\right\| \\ &= \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \left|\operatorname{sen}(\vec{u}, \vec{v})\right| \end{aligned}$$

$$\boxed{\textit{Área}_{\Diamond} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

- *Note que as áreas dos triângulos ABD e BCD são iguais à metade da área do paralelogramo, logo:*

$$\boxed{A_{\Delta} = \frac{\text{Área}}{2} = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2}}$$

Regra da mão direita: A regra da mão direita serve informalmente para definir se três vetores LI formam uma base positiva ou orientação positiva e, no nosso caso em particular, para determinar o sentido do vetor $\vec{u} \times \vec{v}$.



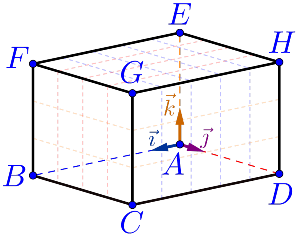
Esta regra consiste em usar a mão direita e os dedos desta mão da seguinte maneira, conforme a figura acima.

1º Posicionar o dedo indicador na direção e sentido do vetor $\vec{u}$ (primeiro vetor);

2º Posicionar o dedo médio na direção e sentido do $\vec{v}$ (segundo vetor);

3º O polegar indicará qual sentido o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ deve ter, que será necessariamente perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, por definição.

Exemplo 2.6 *Considerando a base ortonormal* $\beta = \left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ *definida no paralelepípedo* $ABCDEFGH$ *de dimensões* $5 \times 4 \times 3$, *conforme a figura abaixo, teremos:*



a) $\vec{\imath} \times \vec{\jmath} = \vec{k}$, *pois:*

- $\vec{k}$ *é perpendicular aos vetores* $\vec{\imath}$ *e* $\vec{\jmath}$*;*
- *A norma* $\|\vec{\imath} \times \vec{\jmath}\| = \left\|\vec{k}\right\| = 1$, *pois*

$$\begin{aligned} \|\vec{\imath} \times \vec{\jmath}\| &= \|\vec{\imath}\| \cdot \|\vec{\jmath}\| \cdot \left|\operatorname{sen}\left(\vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)\right| \\ &= 1 \cdot 1 \cdot \left|\operatorname{sen}\left(90^o\right)\right| = 1 \end{aligned}$$

- *Usando a regra da mão direita, confirmamos o resultado.*

b) $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, *análogo ao anterior;*

c) $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$, *análogo aos anteriores;*

d) $\vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k}$, *pela definição;*

e) $(3\vec{i}) \times (2\vec{j}) = 6\vec{k}$, *pois:*

- $6\vec{k}$ *é perpendicular aos vetores* $3\vec{i}$ *e* $2\vec{j}$*;*
- *A norma* $\|3\vec{i} \times 2\vec{j}\| = \left\|6\vec{k}\right\| = 6$*, pois*

$$\begin{aligned}\|3\vec{i} \times 2\vec{j}\| &= \|3\vec{i}\| \cdot \|2\vec{j}\| \cdot \left|\operatorname{sen}\left(3\vec{i}, 2\vec{j}\right)\right| \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \left|\operatorname{sen}\left(90^o\right)\right| = 6\end{aligned}$$

- *Usando a regra da mão direita, confirmamos o resultado.*

f) $\vec{i} \times \vec{i} = \vec{0}$, *pois:*

$$\begin{aligned}\|\vec{i} \times \vec{i}\| &= \|\vec{i}\| \cdot \|\vec{i}\| \cdot \left|\operatorname{sen}\left(\vec{i}, \vec{i}\right)\right| \\ &= 1 \cdot 1 \cdot |\operatorname{sen}\left(0^o\right)| = 0\end{aligned}$$

Propiedade 2.1 *Dados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ quaisquer e um escalar $\kappa \in \mathbb{R}$, temos que:*

PV1 – Anticomutatividade:

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = -\left(\vec{v} \times \vec{u}\right)}$$

PV2 – Homogeneidade:

Seja $\kappa \in \mathbb{R}$, então:

$$\boxed{\kappa\left(\vec{u} \times \vec{v}\right) = \left(\kappa\vec{u}\right) \times \vec{v} = \vec{u} \times \left(\kappa\vec{v}\right)}$$

PV3 – Distributiva sobre Adição:

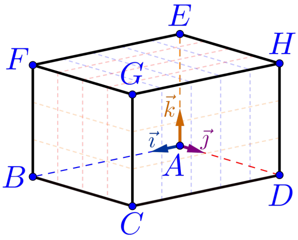
$$\boxed{\vec{u} \times \left(\vec{v} + \vec{w}\right) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}}$$

e

$$\boxed{\left(\vec{u} + \vec{v}\right) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}}$$

Exercício 2.3 *Encontre os produtos vetoriais de todas as combinações entre os vetores* $\overrightarrow{i}$, $\overrightarrow{j}$ *e* $\overrightarrow{k}$ *da figura do exemplo anterior, bem como de seus opostos.*

Exemplo 2.7 *Utilizando as propriedades do produto vetorial e considerando a base ortonormal* $\beta = \left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ *definida no paralelepípedo* $ABCDEFGH$ *de dimensões* $5 \times 4 \times 3$, *conforme a figura abaixo, teremos:*



a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 20\vec{k}$, *pois:*

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \\
&= (5\vec{\imath}) \times (5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}) \\
&= (5\vec{\imath} \times 5\vec{\imath}) + (5\vec{\imath} \times 4\vec{\jmath}) \\
&= 25\cdot(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) + 20\cdot(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) \\
&= 25\cdot\vec{0} + 20\cdot\vec{k} = 20\vec{k}
\end{aligned}$$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AG} = \vec{0}$, *pois:*

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AG} \\
&= \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \times \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&= 5\vec{\imath} \times \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&\quad + 4\vec{\jmath} \times \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&\quad + 3\vec{k} \times \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&= (5\vec{\imath} \times 5\vec{\imath}) + (5\vec{\imath} \times 4\vec{\jmath}) + \left(5\vec{\imath} \times 3\vec{k}\right) \\
&\quad + (4\vec{\jmath} \times 5\vec{\imath}) + (4\vec{\jmath} \times 4\vec{\jmath}) + \left(4\vec{\jmath} \times 3\vec{k}\right) \\
&\quad + \left(3\vec{k} \times 5\vec{\imath}\right) + \left(3\vec{k} \times 4\vec{\jmath}\right) + \left(3\vec{k} \times 3\vec{k}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= 25\cdot(\vec{i}\times\vec{i})+20\cdot(\vec{i}\times\vec{j})+15\cdot\left(\vec{i}\times\vec{k}\right)\\
&\quad+20\cdot(\vec{j}\times\vec{i})+16\cdot(\vec{j}\times\vec{j})+12\cdot\left(\vec{j}\times\vec{k}\right)\\
&\quad+15\cdot\left(\vec{k}\times\vec{i}\right)+12\cdot\left(\vec{k}\times\vec{j}\right)+9\cdot\left(\vec{k}\times\vec{k}\right)\\
&= 25\cdot\left(\vec{0}\right)+20\cdot\left(\vec{k}\right)+15\cdot(-\vec{j})\\
&\quad+20\cdot\left(-\vec{k}\right)+16\cdot\left(\vec{0}\right)+12\cdot(\vec{i})\\
&\quad+15\cdot(\vec{j})+12\cdot(-\vec{i})+9\cdot\left(\vec{0}\right)\\
&= 20\,\vec{k}-15\vec{j}-20\,\vec{k}+12\vec{i}+15\vec{j}-12\vec{i}\\
&= 0\vec{i}+0\vec{j}+0\,\vec{k}=\vec{0}
\end{aligned}$$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{CE} = 24\vec{\imath} - 30\vec{\jmath} + 0\vec{k}$, *pois:*

$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{CE} \\
&= \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \times \left(-5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&= (5\vec{\imath} \times -5\vec{\imath}) + (5\vec{\imath} \times -4\vec{\jmath}) + \left(5\vec{\imath} \times 3\vec{k}\right) \\
&\quad + (4\vec{\jmath} \times -5\vec{\imath}) + (4\vec{\jmath} \times -4\vec{\jmath}) + \left(4\vec{\jmath} \times 3\vec{k}\right) \\
&\quad + \left(3\vec{k} \times -5\vec{\imath}\right) + \left(3\vec{k} \times -4\vec{\jmath}\right) + \left(3\vec{k} \times 3\vec{k}\right) \\
&= -25\cdot(\vec{\imath} \times \vec{\imath}) - 20\cdot(\vec{\imath} \times \vec{\jmath}) + 15\cdot\left(\vec{\imath} \times \vec{k}\right) \\
&\quad - 20\cdot(\vec{\jmath} \times \vec{\imath}) - 16\cdot(\vec{\jmath} \times \vec{\jmath}) + 12\cdot\left(\vec{\jmath} \times \vec{k}\right) \\
&\quad - 15\cdot\left(\vec{k} \times \vec{\imath}\right) - 12\cdot\left(\vec{k} \times \vec{\jmath}\right) + 9\cdot\left(\vec{k} \times \vec{k}\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\vec{c} &= -25\cdot\left(\vec{0}\right) - 20\cdot\left(\vec{k}\right) + 15\cdot(-\vec{j}) \\
&\quad - 20\cdot\left(-\vec{k}\right) - 16\cdot\left(\vec{0}\right) + 12\cdot(\vec{i}) \\
&\quad - 15\cdot(\vec{j}) - 12\cdot(-\vec{i}) + 9\cdot\left(\vec{0}\right) \\
&= -20\,\vec{k} - 15\,\vec{j} + 20\,\vec{k} + 12\,\vec{i} - 15\,\vec{j} + 12\,\vec{i} \\
&= 24\,\vec{i} - 30\,\vec{j} + 0\,\vec{k}
\end{aligned}
$$

Proposição 2.2 *Em uma base* $\beta = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ *ortonormal no espaço tridimensional e considerando dois vetores* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *quaisquer escritos nessa base, ou seja:*

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + u_3\vec{b}_3$$

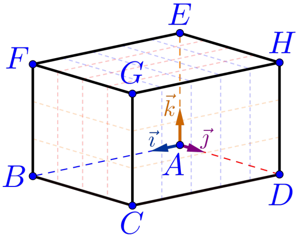
$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + v_3\vec{b}_3$$

então produto vetorial entre os vetores $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *é calculado como um "determinante[2]", da forma:*

$$\boxed{\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{b}_1 & \vec{b}_2 & \vec{b}_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}}$$

[2] *O determinante está entre aspas, para enfatizar que o cálculo é igual ao de um determinante qualquer, porém a primeira linha é composta de vetores.*

Exemplo 2.8 *Utilizando a proposição 2.2 e considerando a base ortonormal* $\beta = \left\{ \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k} \right\}$ *definida no paralelepípedo* $ABCDEFGH$ *de dimensões* $5 \times 4 \times 3$, *conforme a figura abaixo, teremos:*



a) $\vec{a} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = 20\vec{k}$, *pois:*

$$\begin{aligned}
\vec{a} &= \left(5\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}\right) \times \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 0\vec{k}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 0 & 0 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \cdot \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \\
&= (0) \cdot \vec{\imath} - (0) \cdot \vec{\jmath} + (20) \cdot \vec{k} \\
&= 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 20\vec{k} = 20\vec{k}
\end{aligned}$$

b) $\vec{b} = \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{AG} = \vec{0}$, *pois:*

$$\begin{aligned}
\vec{b} &= \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \times \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ 5 & 4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 5 & 4 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \\
&= (0) \cdot \vec{\imath} - (0) \cdot \vec{\jmath} + (0) \cdot \vec{k} \\
&= 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{0}
\end{aligned}$$

c) $\vec{c} = \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{CE} = 24\vec{\imath} - 30\vec{\jmath}$, *pois:*

$$\begin{aligned}
\vec{c} &= \left(5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \times \left(-5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) \\
&= \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 5 & 4 & 3 \\ -5 & -4 & 3 \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ -4 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{\imath} - \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -5 & 3 \end{vmatrix} \cdot \vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ -5 & -4 \end{vmatrix} \cdot \vec{k} \\
&= (24) \cdot \vec{\imath} - (30) \cdot \vec{\jmath} + (0) \cdot \vec{k} \\
&= 24\vec{\imath} - 30\vec{\jmath} + 0\vec{k} = 24\vec{\imath} - 30\vec{\jmath}
\end{aligned}$$

d) *A área do paralelogramo formado pelos vetores* $\overrightarrow{AG}$ *e* $\overrightarrow{CE}$ *é, por definição, a norma do vetor* $\overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{CE}$, *isto é:*

$$
\begin{aligned}
\textit{Área} &= \left\| \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{CE} \right\| \\
&= \sqrt{\left(24\vec{\imath} - 30\vec{\jmath} + 0\vec{k}\right) \cdot \left(24\vec{\imath} - 30\vec{\jmath} + 0\vec{k}\right)} \\
&= \sqrt{(24)\cdot(24) + (-30)\cdot(-30) + (0)\cdot(0)} \\
&= \sqrt{(24)^2 + (-30)^2 + (0)^2}
\end{aligned}
$$

$$\boxed{\textit{Área} = \sqrt{1476}}$$

Portanto a área do paralelogramo será igual a $\sqrt{1476} \simeq 38{,}32\, u.a.$[3].

[3] *A simbologia u.a. significa unidade de área, por exemplo:* m^2 *(metro quadrado),* cm^2 *(centímetro quadrado), etc.*

2.3 Produto Misto

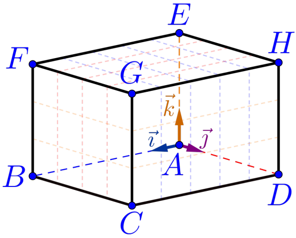
O produto misto é uma junção dos dois produtos anteriores, isto é, produto interno e produto vetorial, e com um resultado geométrico muito importante: o módulo do produto misto está relacionado, geometricamente, com uma medida em três dimensões, ou seja, um volume de um paralelogramo. O fato que este volume ser positivo revelará, por exemplo, que três vetores são LI.

Definição 2.3 (Produto Misto)
*Dados três vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ não nulos, definiremos como **produto misto** entre esses vetores o **número** denotado por $\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]}$ e definido pela expressão:*

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}}$$

Observação 2.5 *Não é necessária a colocação de parênteses em* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *na definição, pois a única maneira de se calcular este número é como sendo o produto interno entre o vetor* $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ *e o vetor* $\overrightarrow{w}$*, já que o produto vetorial entre o vetor* $\overrightarrow{u}$ *e o número* $(\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w})$ *não faz sentido.*

Exemplo 2.9 *Considerando a base ortonormal* $\beta = \left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ *definida no paralelepípedo* $ABCDEFGH$ *de dimensões* $5 \times 4 \times 3$, *conforme a figura abaixo, teremos:*



a) $\left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right] = 1$, *pois:*

$$\left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right] = \vec{\imath} \times \vec{\jmath} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

b) $\left[\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right] = 1$, *pois:*

$$\left[\vec{k}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right] = \vec{k} \times \vec{\imath} \cdot \vec{\jmath} = \vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = 1$$

c) $\left[\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath}\right] = 1$, *pois:*

$$\left[\vec{\jmath}, \vec{k}, \vec{\imath}\right] = \vec{\jmath} \times \vec{k} \cdot \vec{\imath} = \vec{\imath} \cdot \vec{\imath} = 1$$

d) $\left[\vec{\imath}, \vec{k}, \vec{\jmath}\right] = -1$, *pois:*

$$\left[\vec{\imath}, \vec{k}, \vec{\jmath}\right] = \vec{\imath} \times \vec{k} \cdot \vec{\jmath} = -\vec{\jmath} \cdot \vec{\jmath} = -1$$

e) $\left[\vec{\jmath}, \vec{\imath}, \vec{k}\right] = -1$, *pois:*

$$\left[\vec{\jmath}, \vec{\imath}, \vec{k}\right] = \vec{\jmath} \times \vec{\imath} \cdot \vec{k} = -\vec{k} \cdot \vec{k} = -1$$

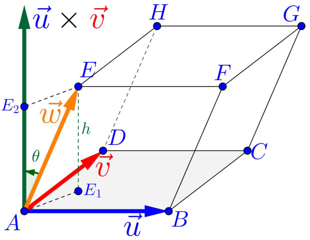
f) $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right] = 60$, *pois:*

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right] &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AE} \\ &= 5\vec{\imath} \times 4\vec{\jmath} \cdot 3\vec{k} \\ &= 20\vec{k} \cdot 3\vec{k} = 20 \cdot 3 = 60\end{aligned}$$

g) $\left[\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BH}\right] = -240$*, pois:*

$$\begin{aligned}\left[\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BH}\right] &= \overrightarrow{AG} \times \overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{BH} \\ &= (24\,\vec{\imath} - 30\,\vec{\jmath}) \cdot \left(-5\,\vec{\imath} + 4\,\vec{\jmath} + 3\,\vec{k}\right) \\ &= 24 \cdot (-5) + (-30) \cdot 4 + 0 \cdot 3 = -240\end{aligned}$$

Observação 2.6 *Geometricamente o valor absoluto do produto misto dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ou seja, $\left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$ representa exatamente o volume do paralelepípedo definido por esses três vetores, conforme a figura abaixo.*



Pois basta observar que o volume (V) de um paralelepípedo qualquer é sempre a área da base (A_{base}) vezes a altura (h), ou seja:

$$\boxed{V = A_{base} \cdot h}$$

No caso do paralelepípedo $ABCDEFGH$, formado pelos vetores, temos:

- *Área da base é dada por*

$$\boxed{A_{base} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|}$$

- *Do triângulo retângulo* AEE_2 *temos a seguinte relação para a altura* $h = \left\|\overrightarrow{AE_2}\right\|$*, isto é:*

$$\boxed{h = \|\vec{w}\| \cdot \left|\cos(\theta)\right|}$$

com o ângulo $\theta = (\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})$*;*

Logo o volume do paralelepípedo é

$$\begin{aligned} V &= A_{base} \cdot h \\ &= \underbrace{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}_{A_{base}} \cdot \underbrace{\|\vec{w}\| \cdot \left|\cos(\vec{u} \times \vec{v}, \vec{w})\right|}_{h} \end{aligned}$$

que por definição de produto interno implica em:

$$V = A_{base} \cdot h = |\vec{u} \times \vec{v} \cdot \vec{w}| = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right|$$

Proposição 2.3 *Em uma base* $\beta = \left\{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3\right\}$ *ortonormal no espaço tridimensional e considerando três vetores* $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *quaisquer escritos nessa base, ou seja:*

$$\vec{u} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 + u_3\vec{b}_3$$

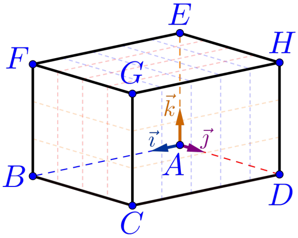
$$\vec{v} = v_1\vec{b}_1 + v_2\vec{b}_2 + v_3\vec{b}_3$$

$$\vec{w} = w_1\vec{b}_1 + w_2\vec{b}_2 + w_3\vec{b}_3$$

então produto misto entre os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ *e* $\vec{w}$ *é calculado através do determinante, da forma:*

$$\boxed{[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}}$$

Exemplo 2.10 *Considerando a base ortonormal* $\beta = \left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ *definida no paralelepípedo* $ABCDEFGH$ *de dimensões* $5 \times 4 \times 3$, *conforme a figura abaixo, teremos:*



a) $\left[\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right] = 1$, *pois como:*

$$\vec{\imath} = 1\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$
$$\vec{\jmath} = 0\vec{\imath} + 1\vec{\jmath} + 0\vec{k}$$
$$\vec{k} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 1\vec{k}$$

Então, utilizando a proposição 2.3:

$$\left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

b) $\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right] = 60$, *pois como:*

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AB} &= 5\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\ \overrightarrow{AD} &= 0\,\vec{i} + 4\,\vec{j} + 0\,\vec{k} \\ \overrightarrow{AE} &= 0\,\vec{i} + 0\,\vec{j} + 3\,\vec{k} \end{aligned}$$

Então, utilizando a proposição 2.3:

$$\left[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE}\right] = \begin{vmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 60$$

c) $\left[\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BH}\right] = -240$, *pois como:*

$$\overrightarrow{AG} = 5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$
$$\overrightarrow{CE} = -5\vec{\imath} - 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$
$$\overrightarrow{BH} = -5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath} + 3\vec{k}$$

Então, utilizando a proposição 2.3:

$$\left[\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BH}\right] = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 3 \\ -5 & -4 & 3 \\ -5 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -240$$

d) *O volume do paralelepípedo gerado pelos vetores* $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{CE}$ *e* $\overrightarrow{BH}$ *é* $240\,u.v.$[4], *pois é o módulo do produto misto, ou seja:*

$$V = \left|\left[\overrightarrow{AG}, \overrightarrow{CE}, \overrightarrow{BH}\right]\right| = |-240| = 240$$

[4] *A simbologia u.v. significa unidade de volume, por exemplo:* m^3 *(metro cúbico),* cm^3 *(centímetro cúbico),* l *(litro), etc.*

2.4 Vetores em Coordenadas do $\mathbb{R}^3$

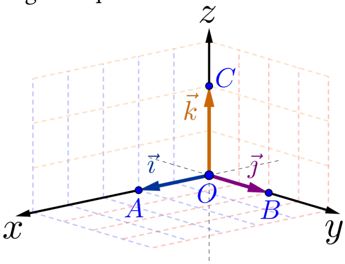
Deste ponto em diante, iremos trabalhar em um sistema ortonormal de coordenadas do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, onde representaremos pontos e vetores por um trio de números, chamados de coordenadas, e na qual aplicaremos toda a teoria dos vetores e produtos anteriormente estudados.

Para tanto, iremos usar uma base ortonormal positiva de $\mathbb{R}^3$, que chamaremos de **base canônica** e denotaremos por:

$$\boxed{\left\{ \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k} \right\}}$$

Definição 2.4 (Sistema de Coordenadas)
Considere um ponto $O \in \mathbb{R}^3$ *e* $\beta = \left\{\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right\}$ *uma base canônica (ortonormal positiva). O par* (O, β) *é chamado de* ***sistema ortogonal de coordenadas*** *do espaço tridimensional* $\mathbb{R}^3$*, com origem no ponto* O *e na base* β*.*

Figura 2.4: *Eixos coordenados do* $\mathbb{R}^3$*.*



Observação 2.7 *Com base na Figura 2.4*

- *Consideraremos o sistema ortogonal de coordenadas em* $\mathbb{R}^3$*, ou simplesmente sistema de coordenadas, sendo* O *a origem do sistema de coordenadas, e escolhendo os vetores* $\vec{i} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{j} = \overrightarrow{OB}$ *e* $\vec{k} = \overrightarrow{OC}$.

- *Indicaremos por* Ox, Oy *e* Oz *as três retas definidas pelos segmentos orientados* $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ *e* $\overrightarrow{OC}$*, respectivamente, que são chamadas usualmente de eixos dos* x *(das abscissas), eixos dos* y *(das ordenadas) e eixos dos* z *(das cotas).*

- *As setas na figura indicam o sentido positivo de cada eixo.*

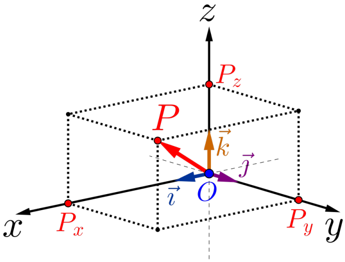
Definição 2.5 (Coordenadas do Ponto P)
Dado um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ qualquer e considerando o vetor $\overrightarrow{OP}$ escrito na base canônica isto é:

$$\boxed{\overrightarrow{OP} = P_x \vec{\imath} + P_y \vec{\jmath} + P_z \vec{k}}$$

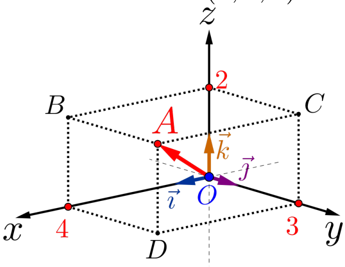
*então as **coordenadas** do ponto P (Figura 2.5) nesse sistema de coordenadas (O, β), serão denotadas pelo terno de números reais P_x, P_y e P_z, da forma:*

$$\boxed{P = \left(P_x, P_y, P_z\right)}$$

Figura 2.5: *Representação de um ponto P com coordenadas (P_x, P_y, P_z) em $\mathbb{R}^3$.*



Exemplo 2.11 *Na figura abaixo esta a representação do ponto* A *com coordenadas* $(4, 3, 2)$ *em* $\mathbb{R}^3$*, portanto teremos:*



a) *Como o vetor* $\overrightarrow{OA} = 4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ *então as coordenadas do ponto* A *são* $A = (4, 3, 2)$*;*

b) *Como o vetor* $\overrightarrow{OO} = 0\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{0}$ *então as coordenadas da origem* O *são* $O = (0, 0, 0)$*;*

c) *Os outros pontos marcados possuem como coordenadas:*

$$X_A = (4, 0, 0) \quad Y_A = (0, 3, 0) \quad Z_A = (0, 0, 2)$$
$$B = (4, 0, 2) \quad C = (0, 3, 2) \quad D = (4, 3, 0)$$

Proposição 2.4 *Dados dois pontos quaisquer no nosso sistema de coordenadas do* $\mathbb{R}^3$, $A = \left(A_x, A_y, A_z\right)$ *e* $B = \left(B_x, B_y, B_z\right)$*,então as coordenadas do vetor* $\overrightarrow{AB}$ *são dadas por:*

$$\boxed{\overrightarrow{AB} = \left(B_x - A_x, B_y - A_y, B_z - A_z\right)}$$

Demonstração: *Note que qualquer vetor* $\overrightarrow{AB}$*, pode ser escrito como:*

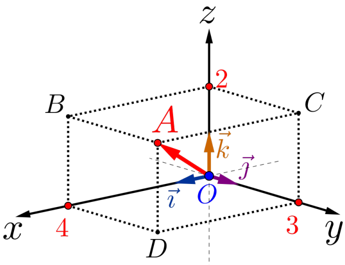
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = -\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} \\
&= -\left(A_x\overrightarrow{\imath} + A_y\overrightarrow{\jmath} + A_z\overrightarrow{k}\right) \\
&\quad + \left(B_x\overrightarrow{\imath} + B_y\overrightarrow{\jmath} + B_z\overrightarrow{k}\right) \\
&= \left(B_x - A_x\right)\overrightarrow{\imath} + \left(B_y - A_y\right)\overrightarrow{\jmath} + \left(B_z - A_z\right)\overrightarrow{k}
\end{aligned}$$

que, escrito em coordenadas, tem-se o resultado.

Observação 2.8 *Para encontrar as coordenadas de um vetor* $\overrightarrow{AB}$ *basta fazer a diferença, coordenada a coordenada, entre o ponto final* B *e o ponto inicial* A*.*

Observação 2.9 *Dois vetores* $\overrightarrow{u} = \left(u_x, u_y, u_z\right)$ *e* $\overrightarrow{v} = \left(v_x, v_y, v_z\right)$ *são iguais quando suas coordenadas são iguais, ou seja,* $u_x = v_x$, $u_y = v_y$ *e* $u_z = v_z$*.*

Exemplo 2.12 *Considerando os pontos da figura abaixo, temos que as coordenadas dos vetores são:*



$$\overrightarrow{OB} = (4,0,2) \qquad \overrightarrow{OC} = (0,3,2) \qquad \overrightarrow{OD} = (4,3,0)$$
$$\overrightarrow{AB} = (0,-3,0) \quad \overrightarrow{AC} = (-4,0,0) \quad \overrightarrow{AD} = (0,0,-2)$$
$$\overrightarrow{BC} = (-4,3,0) \quad \overrightarrow{BD} = (0,3,-2) \quad \overrightarrow{CD} = (-4,0,2)$$

2.5 Exemplos

A partir deste momento iremos refazer, via exercícios e exemplos, todos os produtos entre vetores, bem como calcular comprimentos, áreas, volumes e outras "coisinhas mais", considerando o sistema de coordenadas do $\mathbb{R}^3$ canônico definido.

Para todos os exemplos a seguir, consideremos os pontos A, B e C definidos como:

$$\boxed{A = (3, 0, 1)} \quad \boxed{B = (2, 1, 2)} \quad \boxed{C = (0, -1, 3)}$$

2.5.1 Os pontos A, B e C são vértices de um triângulo?

Para verificar que são vértices de um triângulo, basta verificar que os pontos não são colineares, ou seja, que não estão na uma mesma reta.

Como fazer isso?

1) Desenhe um triângulo qualquer;
2) Escolha dois vetores formados pelos pontos, por exemplo, $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$;
3) Note que esses dois vetores não são paralelos;
4) Logo esses vetores são LI;
5) Dois vetores são LI quando um é múltiplo do outro (correto?)
6) ERRADO, o certo é que, quando são LI, não existe combinação linear entre eles;

7) Logo vamos verificar se é possível achar uma combinação linear entre esses vetores;

8) Note que:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (2-3, 1-0, 2-1) = (-1, 1, 1)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (0-3, -1-0, 3-1) = (-3, -1, 2)$$

9) Se há essa combinação linear, teríamos que existe um número $\kappa \in \mathbb{R}$ tal que $\vec{u} = \kappa\vec{v}$, que em coordenadas seria:

$$(-1, 1, 1) = \kappa\,(-3, -1, 2) = (-3\kappa, -1\kappa, 2\kappa)$$

logo teríamos:

$$\begin{cases} -1 & = -3\kappa \\ 1 & = -1\kappa \\ 1 & = 2\kappa \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \kappa = 1/3 \\ \kappa = -1 \\ \kappa = 1/2 \end{cases}$$

ou seja, é impossível existir um $\kappa \in \mathbb{R}$, tal que $\vec{u} = \kappa\vec{v}$, portanto os vetores são LI, logo os pontos A, B e C são vértices de um triângulo.

2.5.2 *Qual é a altura relativa ao maior lado do triângulo ABC?*

Para determinar a altura relativa, temos que determinar primeiro qual é o maior lado e só depois calcular a altura.

Como fazer isso?

1) Vamos calcular as normas dos três vetores, ou seja, a norma dos vetores:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 1)\\
\vec{v} &= \overrightarrow{AC} = (-3, -1, 2)\\
\vec{w} &= \overrightarrow{BC} = (-2, -2, 1)
\end{aligned}$$

Portanto como a norma de um vetor $\vec{a}$ é dado por $\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, teremos:

$$
\begin{aligned}
\|\vec{u}\| = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| &= \sqrt{(-1)^2 + (1)^2 + (1)^2} \\
&= \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3} \\
\|\vec{v}\| = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| &= \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2 + (2)^2} \\
&= \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \\
\|\vec{w}\| = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| &= \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2 + (1)^2} \\
&= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3
\end{aligned}
$$

ou seja, $\overline{AC}$ é o maior lado do triângulo ABC, pois $\|\vec{v}\| = \sqrt{14} > 3 > \sqrt{3}$;

2) Desenhe um triângulo com essas características;

3) Note que a altura procurada é relativa à base AC e como a área de um triângulo qualquer é

$$
\boxed{A_{\Delta} = \frac{base \cdot altura}{2}} \tag{2.1}
$$

basta encontrar a área, pois o comprimento da base, já sabemos que mede $\|\vec{v}\| = \sqrt{14}$.

Lembre-se que a área do paralelogramo definido pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é dado por $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$, isto é

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\vec{i} - \vec{j} + 4\vec{k}$$

E a área do triângulo A_Δ é dada por:

$$A_\Delta = \frac{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}{2} = \frac{\sqrt{(3)^2 + (-1)^2 + (4)^2}}{2}$$

$$\boxed{A_\Delta = \frac{\sqrt{26}}{2}\, u.a.}$$

Concluímos finalmente de (2.1) que a altura relativa ao maior lado $\overline{AC}$ é:

$$altura = \frac{2 \cdot A_\Delta}{base} = \frac{2 \cdot A_\Delta}{\|\vec{v}\|} = \frac{2 \cdot \left(\frac{\sqrt{26}}{2}\right)}{\sqrt{14}}$$

$$= \frac{\sqrt{26}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{13}{7}}$$

$$\boxed{altura \approx 1{,}36277\, u.c.}$$

2.5.2.0.1 Lembrete: Dado o número $\sqrt{a} \in \mathbb{R}$, qualquer, é sempre possível achar dois números naturais consecutivos n e $n+1$, tais que, $n \leq \sqrt{a} \leq n+1$. Por exemplo:

$$3 = \sqrt{9} \leq \sqrt{11} \leq \sqrt{16} = 4$$

2.5.3 *Encontrar um vetor $\vec{w}$ perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.*

Como fazer isso?

1) Lembre-se que o vetor $\vec{u} \times \vec{v}$ é um vetor perpendicular aos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao mesmo tempo, logo ele será o nosso vetor $\vec{w}$;

2) Portanto o vetor procurado será:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{u} \times \vec{v} \\ &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \end{aligned}$$

$$\boxed{\vec{w} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 4\vec{k}}$$

Já determinado no exemplo anterior.

2.5.4 Mostre que $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$ é uma base positiva do $\mathbb{R}^3$.

Como fazer isso?

1) Para verificar que os três vetores formam uma base, basta mostrar que eles são LI;

2) Usando o teorema, basta verificar que a equação $x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w} = \vec{0}$ possui solução única $x = y = z = 0$, ou seja, a solução trivial;

3) Escrevendo a equação em coordenadas temos:

$$x\,(-1,1,1)+y\,(-3,-1,2)+z\,(3,-1,4) = (0,0,0)$$
$$(-x,x,x)+(-3y,-y,2y)+(3z,-z,4z) = (0,0,0)$$
$$(-x-3y+3z, x-y-z, x+2y+4z) = (0,0,0)$$

que resulta no seguinte sistema linear:

$$\begin{cases} -1x & - & 3y & + & 3z & = & 0 \\ 1x & - & 1y & - & 1z & = & 0 \\ 1x & + & 2y & + & 4z & = & 0 \end{cases}$$

4) O sistema possui solução única, pois o determinante da matriz M dos coeficientes dos sistema é diferente de zero, no caso:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 26 \neq 0$$

e como temos a solução trivial, o sistema possui solução única e a trivial.

5) A base é positiva porque $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$.

2.5.5 Calcule o volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

Como fazer isso?

1) Lembre-se que o módulo do produto misto é exatamente o volume pedido.

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 26$$

2) Note que o valor do determinante é o mesmo do sistema do item anterior[5], portanto o volume do paralelepípedo é:

$$V = \left|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]\right| = |26| = 26\, u.v.$$

[5] *Determinante de uma matriz M é igual ao determinante de sua matriz transposta M^t, ou seja,* $\det(M) = \det(M^t)$.

2.5.6 *Escrever o vetor $\vec{a} = (4, 2, 4)$ na base $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}\}$.*

Como fazer isso?

1) Isto significa escrever o vetor $\vec{a}$ como combinação linear dos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$, ou seja:

$$\vec{a} = x\vec{u} + y\vec{v} + z\vec{w}$$

2) Temos que determinar os valores de x, y e z que satisfaçam às equações acima, e escrevendo em coordenadas ficaria:

$$x(-1, 1, 1) + y(-3, -1, 2) + z(3, -1, 4) = (4, 2, 4)$$
$$(-x, x, x) + (-3y, -y, 2y) + (3z, -z, 4z) = (4, 2, 4)$$
$$(-x - 3y + 3z, x - y - z, x + 2y + 4z) = (4, 2, 4)$$

que resulta no sistema

$$\begin{cases} -1x & - & 3y & + & 3z & = & 4 \\ 1x & - & 1y & - & 1z & = & 2 \\ 1x & + & 2y & + & 4z & = & 4 \end{cases}$$

3) Como já sabemos que o sistema possui solução única, pois o determinante da matriz dos coeficientes é 26, podemos resolvê-lo pela regra de Cramer;

4) Usando a regra, temos que determinar os seguintes três determinantes:

$$\det(M_x) = \begin{vmatrix} 4 & -3 & 3 \\ 2 & -1 & -1 \\ 4 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 52$$

$$\Longrightarrow x = \frac{\det(M_x)}{\det(M)} = \frac{52}{26}$$

$$\boxed{x = 2}$$

$$\det(M_y) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 4 & 4 \end{vmatrix} = -26$$

$$\Longrightarrow y = \frac{\det(M_y)}{\det(M)} = \frac{-26}{26}$$

$$\boxed{y = -1}$$

$$\det\left(M_z\right) = \begin{vmatrix} -1 & -3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 26$$

$$\Longrightarrow z = \frac{\det\left(M_z\right)}{\det\left(M\right)} = \frac{26}{26}$$

$$\boxed{z = 1}$$

5) Concluímos então que $\vec{a} = 2\vec{u} - 1\vec{v} + 1\vec{w}$.

Desafio:

Encontre esta mesma resposta para o sistema usando o método do escalonamento.

2.6 *Avaliando o que foi construído*

Foram introduzidas, nesta unidade, noções básicas de vetores, suas características, juntamente com as suas operações básicas de soma e multiplicação por escalar.

Definimos também os três produtos entre vetores:

- Produto interno relacionado com a medida de um comprimento, ou seja, projeção de um vetor em relação à direção do outro;
- Produto vetorial relacionando com a medida de uma área, ou seja, com o cálculo da área de um paralelogramo formado por dois vetores;
- Produto misto relacionado com o volume, ou seja, com o cálculo do volume de um paralelepípedo, definido por três vetores.

E finalmente foram dadas coordenadas aos vetores, trazendo de vez os vetores para o nosso espaço com três dimensões, ou seja, as noções de comprimento, largura, altura, LI, LD e base foram todos tratados algebricamente.