Planos

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

(Notas - 27/3/2023)

Sérgio de Albuquerque Souza

Sumário

Capítulo 4

Planos

4.1 Introdução

Neste capítulo estudaremos e definiremos os planos, através de suas equações vetoriais e algébricas, utilizando de vetores e de suas operações e produtos.

Sempre que possível, tente desenhar, fazer um esboço, de um plano, como será mostrado aqui, mas mesmo se não tiver habilidades no desenho, imagine sempre planos, aqueles que estão ao seu redor, como paredes, chão, teto, telhados, pois será muito importante observar, ou pensar, de como esses planos podem estar dispostos no espaço tridimensional.

4.2 *Problematizando a Temática*

Trataremos vários problemas geométricos, como por exemplo, posições relativas entre os planos, bem como calcularemos o ângulo, distâncias e interseções entre estes elementos, utilizando as facilidades dadas pelas propriedades encontradas nos vetores e suas operações elementares e seus produtos, com suas respectivas características geométricas e algébricas.

4.3 O Plano

Vamos definir um plano, nas seções a seguir, de três modos diferentes, porém equivalentes, ou seja:

(1) Por 3 pontos ou

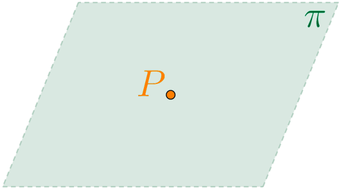
(2) Um ponto e dois vetores não nulos ou

(3) Um ponto e um vetor perpendicular ao plano.

Isto é, vamos encontrar uma relação que um ponto $P \in \mathbb{R}^3$ qualquer do espaço tridimensional, tenha que satisfazer para que pertença a um plano definido por um dos modos acima. Sempre em mente que utilizaremos as ferramentas e ideias dadas pelos vetores (e sistemas) estudados nas capítulos anteriores.

Vamos representar um plano graficamente por um "pedaço", usualmente na forma de um paralelogramo, pois seria impossível representa-lo em um espaço limitado, pois o plano é infinito, veja na figura 4.1.

Figura 4.1: *Representação de um ponto* $P \in \pi$.



Utilizaremos uma das letras gregas minúsculas para designar/representar os planos no nosso texto. Segue na Tabela 4.1 as letras gregas e os seus respectivos nomes.

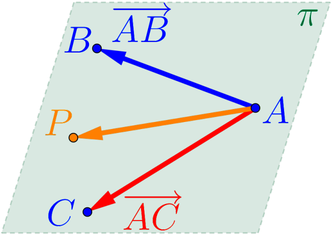
Tabela 4.1: *Letras gregas e seus nomes.*

Letra	Nome	Letra	Nome	Letra	Nome
α	Alfa	ι	Iota	ρ, ϱ	Rô
β	Beta	κ	Capa	$\sigma, \varsigma, \Sigma$	Sigma
γ, Γ	Gama	λ, Λ	Lambda	τ	Tau
δ, Δ	Delta	μ	Mi	υ, Υ	Upsilon
ϵ, ε	Épsilon	ν	Ni	φ, φ, Φ	Fi
ζ	Zeta	ξ, Ξ	Csi	χ	Qui
η	Eta	o	Ômicron	ψ, Ψ	Psi
$\theta, \vartheta - \Theta$	Teta	π, Π	Pi	ω, Ω	Ômega

4.3.1 Três Pontos

Considere o plano π definido pelos três pontos A, B e C quaisquer não colineares, isto é, que formam um triângulo do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$, conforme a Figura 4.2.

Figura 4.2: *Representação de um plano π definido por três pontos.*



As condições para um ponto $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ qualquer, pertencer ao plano π, são:

• Os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ estão "contidos" no plano π, na realidade são paralelos ao plano π, portanto o volume do paralelepípedo formado por estes 3 vetores é nulo, ou seja, o módulo do produto misto é zero, portanto:

$$\boxed{\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = 0} \tag{4.1}$$

• Os vetores $\overrightarrow{AP}$, $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$ são linearmente dependentes (LD), logo existe uma combinação linear do vetor $\overrightarrow{AP}$ em relação aos vetores $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AC}$, ou seja, existem dois números reais κ_1 e κ_2, tais que:

$$\boxed{\overrightarrow{AP} = \kappa_1 \overrightarrow{AB} + \kappa_2 \overrightarrow{AC}} \tag{4.2}$$

Definição 4.1 (Equação vetorial do plano)
A equação (4.2) é chamada de ***equação vetorial do plano*** π *e os dois vetores* $\overrightarrow{AB}$ *e* $\overrightarrow{AC}$ *são chamados de* ***vetores diretores do plano****.*

Em um sistema de coordenadas do espaço tridimensional $\mathbb{R}^3$ considerando o plano π definido por 3 pontos não colineares dados por:

$$\begin{aligned} A &= (A_x, A_y, A_z) \\ B &= (B_x, B_y, B_z) \\ C &= (C_x, C_y, C_z) \end{aligned}$$

e um ponto genérico $P = (x, y, z)$ do plano π. Definindo os vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AP}$ teremos:

$$\begin{aligned} \vec{u} = \overrightarrow{AB} &= (u_x, u_y, u_z) \\ \vec{v} = \overrightarrow{AC} &= (v_x, v_y, v_z) \\ \overrightarrow{AP} &= (x - A_x, y - A_y, z - A_z) \end{aligned}$$

• Utilizando o fato do volume do paralelepípedo formado por esses 3 vetores ser nulo, temos do produto misto (4.1) que:

$$\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \left[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v}\right]$$

$$= \begin{vmatrix} x - A_x & y - A_y & z - A_z \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo o determinante acima teremos:

$$\begin{aligned} (x - A_x)\underbrace{(u_y v_z - v_y u_z)}_{a} + \\ + (y - A_y)\underbrace{(v_x u_z - u_x v_z)}_{b} + \\ + (z - A_z)\underbrace{(u_x v_y - v_x u_y)}_{c} = 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Substituindo os valores definidos por:

$$\begin{aligned} a &= (u_y v_z - v_y u_z) \\ b &= (v_x u_z - u_x v_z) \\ c &= (u_x v_y - v_x u_y) \\ d &= -\left(aA_x + bA_y + cA_z\right) \end{aligned}$$

na equação (4.3), teremos a chamada **equação geral**, ou **equação normal**, ou simplesmente **equação do plano** π definido como:

$$\boxed{\pi : ax + by + cz + d = 0} \tag{4.4}$$

• Utilizando o fato que esses 3 vetores são LD, temos da equação vetorial (4.2) que:

$$\underbrace{(x - A_x, y - A_y, z - A_z)}_{\overrightarrow{AP}} = \kappa_1 \underbrace{(u_x, u_y, u_z)}_{\vec{u}} + \kappa_2 \underbrace{(v_x, v_y, v_z)}_{\vec{v}}$$

ou seja, escrevendo cada coordenada como uma equação:

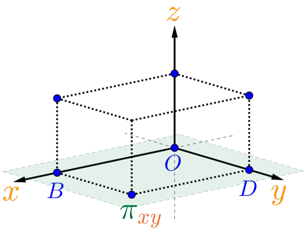
$$\begin{cases} x - A_x = u_x\kappa_1 + v_x\kappa_2 \\ y - A_y = u_y\kappa_1 + v_y\kappa_2 \\ z - A_z = u_z\kappa_1 + v_z\kappa_2 \end{cases}$$

logo isolando as variáveis x, y e z, temos o seguinte sistema de equações, chamado de **sistemas de equações paramétricas do plano** π ou simplesmente de

equações paramétricas do plano:

$$\pi : \begin{cases} x = A_x + u_x\kappa_1 + v_x\kappa_2 \\ y = A_y + u_y\kappa_1 + v_y\kappa_2 \\ z = A_z + u_z\kappa_1 + v_z\kappa_2 \end{cases} \tag{4.5}$$

Exemplo 4.1 *Considerando o paralelepípedo* $ABCDEFGH$*, definido anteriormente, de dimensões* $5 \times 4 \times 3$*, conforme a figura abaixo.*



teremos que o plano π_{xy} *que contem a origem* O *e os eixos* x *e* y*, pode ser definido pelos pontos não colineares:*

$$O = (0,0,0) \qquad B = (5,0,0) \qquad D = (0,4,0)$$

Seja $P = (x, y, z)$ *um ponto qualquer do plano* π_{xy} *e vamos considerar os vetores:*

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{OB} &= (5-0, 0-0, 0-0) = (5,0,0)\\
\overrightarrow{OD} &= (0-0, 4-0, 0-0) = (0,4,0)\\
\overrightarrow{OP} &= (x-0, y-0, z-0) = (x,y,z)
\end{aligned}$$

• *Como esses* 3 *vetores são LD, temos da equação vetorial (4.2) que:*

$$\underbrace{(x,y,z)}_{\overrightarrow{OP}} = \kappa_1 \underbrace{(5,0,0)}_{\overrightarrow{OB}} + \kappa_2 \underbrace{(0,4,0)}_{\overrightarrow{OD}}$$

que resulta nas equações paramétricas do plano π_{xy}*:*

$$\boxed{\pi_{xy} : \begin{cases} x = 0 + 5\kappa_1 + 0\kappa_2 \\ y = 0 + 0\kappa_1 + 4\kappa_2 \\ z = 0 + 0\kappa_1 + 0\kappa_2 \end{cases}}$$

ou simplificado:

$$\boxed{\pi_{xy} : \begin{cases} x &= 5\kappa_1 \\ y &= 4\kappa_2 \\ z &= 0 \end{cases}} \Longleftrightarrow \boxed{\pi_{xy} : \begin{cases} x &= \tau_1 \\ y &= \tau_2 \\ z &= 0 \end{cases}}$$

Isto significa que qualquer ponto P que tenha a terceira coordenada igual a 0, pertence ao plano π_{xy}, ou seja $P = (x, y, 0) \in \pi_{xy}$.

• *Como o volume do paralelepípedo formado por esses 3 vetores é nulo, temos do produto misto (4.1) que:*

$$\left[\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}\right] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

resultando na seguinte equação normal do plano π_{xy}*:*

$$\boxed{\pi_{xy} : \ 0x + 0y + 20z + 0 = 0}$$

ou simplificado:

$$\boxed{\pi_{xy} : z = 0}$$

Esse plano π_{xy} *é chamado de plano coordenado* xOy *ou simplesmente plano* xy.

Exercício 4.1 *Determine as equações dos outros dois planos cartesianos* xOz *e* yOz, *ou seja dos planos* xz *e* yz.

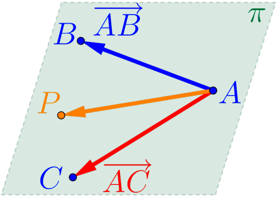
Exercício 4.2 *Determinar as equações paramétricas e a equação normal do plano* π *que contém os pontos:*

$$A = (3, 0, 1) \quad B = (2, 1, 2) \quad C = (0, -1, 3)$$

e verificar se o ponto $D = (1, -6, 1)$ *e a origem do sistema pertencem ao plano* π*.*

Solução: Seja $P = (x, y, z)$ um ponto qualquer do plano π e definindo os vetores:

$$\overrightarrow{AB} = (2-3, 1-0, 2-1) = (-1, 1, 1)$$
$$\overrightarrow{AC} = (0-3, -1-0, 3-1) = (-3, -1, 2)$$
$$\overrightarrow{AP} = (x-3, y-0, z-1) = (x-3, y, z-1)$$



• Como esses 3 vetores são LD, temos da equação vetorial (4.2) que:

$$\underbrace{(x-3, y, z-1)}_{\overrightarrow{AP}} = \kappa_1 \underbrace{(-1, 1, 1)}_{\overrightarrow{AB}} + \kappa_2 \underbrace{(-3, -1, 2)}_{\overrightarrow{AC}}$$

resultando nas equações paramétricas do plano π:

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x & = & 3 & - & 1\kappa_1 & - & 3\kappa_2 \\ y & = & 0 & + & 1\kappa_1 & - & 1\kappa_2 \\ z & = & 1 & + & 1\kappa_1 & + & 2\kappa_2 \end{cases}}$$

• Como o volume do paralelepípedo formado por esses 3 vetores é nulo, temos do produto misto (4.1) que:

$$\left[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right] = \begin{vmatrix} (x-3) & y & (z-1) \\ -1 & 1 & 1 \\ -3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

resultando na seguinte equação normal do plano π:

$$\boxed{\pi : 3x - 1y + 4z - 13 = 0}$$

• Para verificar que o ponto $D = (1, -6, 1)$ e a origem $O = (0, 0, 0)$ pertencem ou não ao plano π, basta substituir as três coordenadas de cada um dos pontos na equação do plano π. Se a igualdade for satisfeita, o ponto pertence ao plano, caso contrário, não pertence, logo

- Para o ponto $D = (1, -6, 1)$ temos:

$$3\underbrace{(1)}_{x} - 1\underbrace{(-6)}_{y} + 4\underbrace{(1)}_{z} - 13 = 0$$

  logo D pertence ao plano π.

- Para a origem do sistema de coordenadas, o ponto $O = (0, 0, 0)$ temos:

$$3\underbrace{(0)}_{x} - 1\underbrace{(0)}_{y} + 4\underbrace{(0)}_{z} - 13 = -13 \neq 0$$

  logo a origem O **não** pertence ao plano π.

Observação 4.1 *Em relação às características das equações paramétricas dos planos:*

- *Note que, nas equações paramétricas do plano* π *determinadas no exercício anterior, as coordenadas do ponto* $A = (1,2,3)$*, estão "soltas" em uma coluna e as coordenadas dos dois vetores* $\overrightarrow{AB} = (-1,1,1)$ *e* $\overrightarrow{AC} = (-3,-1,2)$ *também estão nas colunas, porém multiplicadas pelos dois parâmetros* κ_1 *e* κ_2*.*

- *Substituindo os parâmetros* κ_1 *e* κ_2 *por valores especiais nas equações paramétricas do plano* π*, teremos:*

  - *Para* $\kappa_1 = 0$ *e* $\kappa_2 = 0$*, temos:*

$$\begin{cases} x = 3 - 1\cdot 0 - 3\cdot 0 \\ y = 0 + 1\cdot 0 - 1\cdot 0 \\ z = 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = & 3 \\ y = & 0 \\ z = & 1 \end{cases}$$

ou seja, são as coordenadas do ponto A*.*

- *Para* $\kappa_1 = 1$ *e* $\kappa_2 = 0$, *temos:*

$$\begin{cases} x = 3 - 1\cdot 1 - 3\cdot 0 \\ y = 0 + 1\cdot 1 - 1\cdot 0 \\ z = 1 + 1\cdot 1 + 2\cdot 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = & 2 \\ y = & 1 \\ z = & 2 \end{cases}$$

ou seja, são as coordenadas do ponto B.

- *Para* $\kappa_1 = 0$ *e* $\kappa_2 = 1$, *temos:*

$$\begin{cases} x = 3 - 1\cdot 0 - 3\cdot 1 \\ y = 0 + 1\cdot 0 - 1\cdot 1 \\ z = 1 + 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = & 0 \\ y = & -1 \\ z = & 3 \end{cases}$$

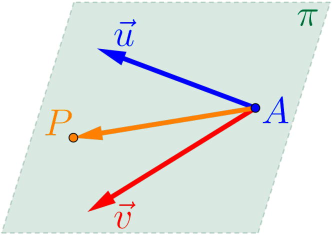
ou seja, são as coordenadas do ponto C.

- *Para cada par de parâmetros* κ_1 *e* κ_2 *correspondem a um único ponto do plano e para cada ponto* P *do plano corresponde um único par de parâmetros.*

4.3.2 Um Ponto e Dois Vetores

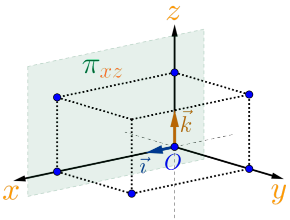
Considere um ponto A qualquer do espaço tridimensional e dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, não paralelos, ou seja, linearmente independentes, como na Figura 4.3. As condições para que um ponto qualquer $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertença ao plano π são as mesmas utilizadas anteriormente para planos definidos por três pontos, pois só foram utilizados o ponto A e os vetores diretores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ e $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Figura 4.3: *Representação de um plano π definido por um ponto e dois vetores.*



Exemplo 4.2 *Considerando o paralelepípedo*

$ABCDEFGH$, *definido anteriormente, de dimensões* $5 \times 4 \times 3$, *conforme a figura abaixo.*



teremos que o plano π_{xz} *que contem a origem* O *e os eixos* x *e* z, *pode ser definido por um ponto e dois vetores:*

$$O = (0,0,0) \qquad \vec{\imath} = (1,0,0) \qquad \vec{k} = (0,0,1)$$

Seja $P = (x, y, z)$ *um ponto qualquer do plano* π_{xz} *e vamos considerar o vetor:*

$$\overrightarrow{OP} = (x-0, y-0, z-0) = (x, y, z)$$

• *Como esses* 3 *vetores são LD, temos da equação vetorial (4.2) que:*

$$\underbrace{(x, y, z)}_{\overrightarrow{OP}} = \kappa_1 \underbrace{(1, 0, 0)}_{\vec{i}} + \kappa_2 \underbrace{(0, 0, 1)}_{\vec{k}}$$

resultando nas equações paramétricas do plano π_{xz}*:*

$$\boxed{\pi_{xz} : \begin{cases} x & = & 0 & + & 1\kappa_1 & + & 0\kappa_2 \\ y & = & 0 & + & 0\kappa_1 & + & 0\kappa_2 \\ z & = & 0 & + & 0\kappa_1 & + & 1\kappa_2 \end{cases}}$$

ou simplificado:

$$\boxed{\pi_{xz} : \begin{cases} x & = & \kappa_1 \\ y & = & 0 \\ z & = & \kappa_2 \end{cases}}$$

Isto significa que qualquer ponto P *que tenha a segunda coordenada igual a* 0*, pertence ao plano* π_{xz}*, ou seja* $P = (x, 0, z) \in \pi_{xz}$.

• *Como o volume do paralelepípedo formado por esses 3 vetores é nulo, temos do produto misto (4.1) que:*

$$\left[\overrightarrow{OP}, \vec{\imath}, \vec{k}\right] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

resultando na seguinte equação normal do plano π_{xz}*:*

$$\boxed{\pi_{xz} : 0x + 1y + 0z + 0 = 0}$$

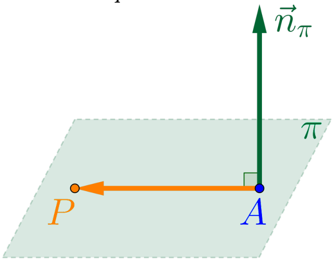
ou simplificado:

$$\boxed{\pi_{xz} : y = 0}$$

4.3.3 *Um Ponto e Um Vetor Perpendicular*

Considere um ponto A qualquer do espaço tridimensional e um vetor $\vec{n}_\pi$ (chamado de **vetor normal**), não nulo, perpendicular ao plano π, como na Figura 4.4.

Figura 4.4: *Representação de um plano* π *definido por um ponto e um vetor perpendicular ao plano.*



Note que a condição para um ponto qualquer $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertencer ao plano π, é que os vetores $\vec{n}_\pi$ e $\overrightarrow{AP}$ sejam perpendiculares, ou seja, $\vec{n}_\pi \perp \overrightarrow{AP}$

e portando o produto interno entre eles é nulo:

$$\boxed{\vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{AP} = 0} \tag{4.6}$$

Logo se o plano π é definido pelo ponto $A = (A_x, A_y, A_z)$ e pelo vetor normal $\vec{n}_\pi = (a, b, c)$, então pela condição (4.6), temos:

$$\begin{aligned} \overbrace{(a, b, c)}^{\vec{n}_\pi} \cdot \overbrace{\left(x - A_x, y - A_y, z - A_z\right)}^{\overrightarrow{AP}} &= 0 \\ a\left(x - A_x\right) + b\left(y - A_y\right) + c\left(z - A_z\right) &= 0 \\ ax + by + cz - \left(aA_x + bA_y + cA_z\right) &= 0 \end{aligned}$$

Considerando $d = -\left(aA_x + bA_y + cA_z\right)$, temos a equação geral do plano π, dada por:

$$\boxed{\pi : ax + by + cz + d = 0}$$

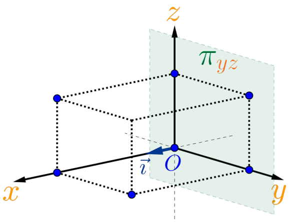
Observação 4.2 *Os coeficientes das variáveis* x, y *e* z *da equação geral de um plano qualquer, definido por*

$$\boxed{\pi : ax + by + cz + d = 0}$$

são exatamente, na ordem, as coordenadas de um vetor normal ao plano π, *ou seja,*

$$\boxed{\overrightarrow{n}_\pi = (a, b, c)}$$

Exemplo 4.3 *Considerando o paralelepípedo* $ABCDEFGH$*, definido anteriormente, de dimensões* $5 \times 4 \times 3$*, conforme a figura abaixo.*



teremos que o plano π_{yz} *que contem a origem* O *e os eixos* y *e* z*, pode ser definido por um ponto e um vetor perpendicular ao plano:*

$$O = (0, 0, 0) \qquad \vec{\imath} = (1, 0, 0)$$

Seja $P = (x, y, z)$ *um ponto qualquer do plano* π_{yz} *e vamos considerar os vetores:*

$$\overrightarrow{OP} = (x - 0, y - 0, z - 0) = (x, y, z)$$
$$\vec{n}_{\pi} = \vec{n}_{\pi_{yz}} = \vec{\imath} = (1, 0, 0)$$

• *Como esses vetores são perpendiculares, temos do produto interno (4.6) que:*

$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{n}_\pi = 0$$

Logo

$$\begin{aligned} \overbrace{(x, y, z)}^{\overrightarrow{OP}} \cdot \overbrace{(1, 0, 0)}^{\vec{n}_\pi} &= 0 \\ 1\,(x) + 0\,(y) + 0\,(z) &= 0 \\ 1x + 0y + 0z + 0 &= 0 \end{aligned}$$

resultando na seguinte equação normal do plano π_{yz}*:*

$$\boxed{\pi_{yz} : \ 1x + 0y + 0z + 0 = 0}$$

ou simplificado:

$$\boxed{\pi_{yz} : x = 0}$$

Isto significa que qualquer ponto P *que tenha a primeira coordenada igual a* 0*, pertence ao plano* π_{yz}*, ou seja* $P = (0, y, z) \in \pi_{yz}$.

Exercício 4.3 *Determinar as equações paramétricas e a equação normal do plano* φ *que contém o ponto* $S = (1, 1, 1)$ *e é perpendicular ao vetor* $\vec{w} = (2, 1, 3)$.

Solução: Vamos primeiro, determinar a equação geral do plano, considerando como vetor normal do plano φ o vetor $\vec{n}_\varphi = \vec{w} = (2, 1, 3)$, portanto um ponto $P = (x, y, z)$ para pertencer ao plano φ, tem que satisfazer à equação $\vec{n}_\varphi \cdot \overrightarrow{SP} = 0$, logo:

$$\begin{aligned} \overbrace{(2,1,3)}^{\vec{n}_\varphi} \cdot \overbrace{(x-1, y-1, z-1)}^{\overrightarrow{SP}} &= 0 \\ 2(x-1) + 1(y-1) + 3(z-1) &= 0 \\ 2x + 1y + 3z - (2\cdot 1 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1) &= 0 \end{aligned}$$

que resulta na equação do plano φ:

$$\boxed{\varphi : 2x + 1y + 3z - 6 = 0}$$

A partir dessa equação, para achar as equações paramétricas do plano, podemos:

- Determinar outros dois pontos, recaindo em um plano definido por três pontos, atribuindo valores para duas das três variáveis encontrando, desta forma, pontos que satisfaçam à equação do plano φ, como por exemplo, os pontos $R = (0,0,2)$, $T = (3,0,0)$, $Q = (2,4,0)$, etc.

- A outra maneira, bastante algébrica, seria considerar duas variáveis da equação do plano φ igual a dois parâmetros τ_1 e τ_2 quaisquer, como por exemplo, considere $x = \tau_1$ e $z = \tau_2$, logo da equação normal do plano φ teremos que:

$$y = 6 - 2x + 3z$$

as equações paramétricas do plano φ seriam

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcl} x & = & \tau_1 \\ y & = & 6 - 2\tau_1 - 3\tau_2 \\ z & = & \tau_2 \end{array} \right.$$

ou na forma completa

$$\varphi : \left\{ \begin{array}{lcccccc} x & = & 0 & + & 1\tau_1 & + & 0\tau_2 \\ y & = & 6 & - & 2\tau_1 & - & 3\tau_2 \\ z & = & 0 & + & 0\tau_1 & + & 1\tau_2 \end{array} \right.$$

4.4 Posição Relativa entre Planos

Para o estudo de posições relativas, é importante "enxergar" os planos, juntamente com os elementos que o definem, ou seja, FAÇA vários esboços, por exemplo, dois planos paralelos, dois planos não paralelos e dois planos concorrentes, etc.

Para resolver problemas, como ângulos, distâncias e interseções, envolvendo planos, não como eles estão definidos pelas suas equações, mas genericamente, é necessário saber como eles estão colocados no espaço, ou seja, em que posição um está em relação ao outro.

Existem três possibilidades para a posição relativa entre dois planos e para efeito de estudos das posições relativas, vamos considerar os seguintes planos:

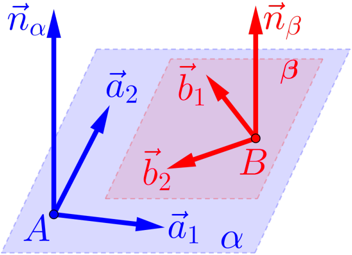
- O plano α definido pelo ponto A e pelo vetor normal $\vec{n}_\alpha$, ou pelo ponto A e dois vetores diretores $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$.

- O plano β definido pelo ponto B e pelo vetor normal $\vec{n}_\beta$, ou pelo ponto B e dois vetores diretores $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$.

4.4.1 Planos Coincidentes

Observando os dois planos coincidentes α e β, na Figura 4.5, concluímos que:

Figura 4.5: *Representação de dois planos coincidentes α e β com seus correspondentes elementos.*



- Os vetores normais $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são paralelos, ou seja,

$$\boxed{\vec{n}_\alpha = \tau \vec{n}_\beta} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \vec{0}}$$

- O ponto $\boxed{A \in \beta}$ e o ponto $\boxed{B \in \alpha}$;

- O vetor $\overrightarrow{AB}$ é perpendicular aos vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$;

- Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ são LD, bem como os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$ são LD;

- O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ ou pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$ é nulo, ou seja,

$$\left[\overrightarrow{AB}, \vec{a}_1, \vec{a}_1\right] = 0 = \left[\overrightarrow{AB}, \vec{b}_1, \vec{b}_2\right]$$

- Os vetores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$, podem, três a três, ser representados em um plano, logo qualquer conjunto com três destes vetores é LD;

- O ângulo entre os planos α e β é nulo, ou seja,

$$\boxed{(\alpha, \beta) = 0^o}$$

- A interseção entre os planos α e β é o próprio plano α (ou β), ou seja,

$$\boxed{\alpha \cap \beta = \alpha(\equiv \beta)}$$

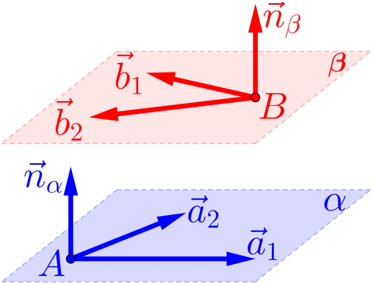
- A distância entre planos α e β é nula, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\left(\alpha, \beta\right) = 0}$$

4.4.2 *Planos Paralelos*

Observando os dois planos paralelos e distintos α e β, na figura 4.6, concluímos que:

Figura 4.6: *Representação de dois planos paralelos α e β com seus correspondentes elementos.*



- Os vetores normais $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ são paralelos, ou seja,

$$\boxed{\vec{n}_\alpha = \tau \vec{n}_\beta} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \vec{0}}$$

- O ponto $\boxed{A \notin \beta}$ e o ponto $\boxed{B \notin \alpha}$;

- O vetor $\overrightarrow{AB}$ **não é** perpendicular aos vetores $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$;

- Os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ são LI, bem como os vetores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$ são LI;

- O volume do paralelepípedo formado pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{a}_1$ e $\vec{a}_2$ ou pelos vetores $\overrightarrow{AB}$, $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$ é positivo, ou seja,

$$\left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{a}_1, \vec{a}_2\right]\right| > 0 \text{ e } \left|\left[\overrightarrow{AB}, \vec{b}_1, \vec{b}_2\right]\right| > 0$$

- Os vetores $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$, $\vec{b}_1$ e $\vec{b}_2$, podem, três a três, ser representados em um plano, logo são LD;

- O ângulo entre os planos α e β é nulo, ou seja,

$$\boxed{(\alpha, \beta) = 0^o}$$

- A interseção entre os planos α e β é vazia, ou seja,

$$\boxed{\alpha \cap \beta = \{\ \} = \emptyset}$$

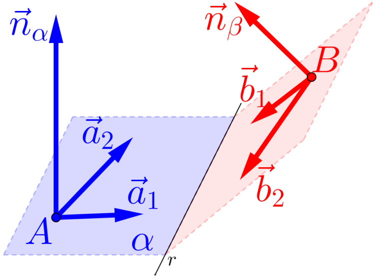
- A distância entre planos α e β é positiva, ou seja,

$$\boxed{\mathrm{d}\,(\alpha, \beta) > 0}$$

4.4.3 Planos Concorrentes

Observando os dois planos concorrentes (não paralelos) α e β, na Figura 4.7, concluímos que:

Figura 4.7: *Representação de dois planos concorrentes* α *e* β *com seus correspondentes elementos.*



- Os vetores normais $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$ **não são** paralelos, logo

$$\boxed{\vec{n}_\alpha \neq \tau \vec{n}_\beta} \quad \text{ou} \quad \boxed{\vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta \neq \vec{0}}$$

- A interseção entre os planos α e β é uma reta, ou seja,

  $$\boxed{\alpha \cap \beta = r}$$

  a ser determinada posteriormente na definição de uma reta por dois planos do próximo capítulo;

- O ângulo entre os planos α e β é positivo, ou seja,

  $$\boxed{(\alpha, \beta) > 0}$$

- A distância entre planos α e β é nula, ou seja,

  $$\boxed{\mathrm{d}\left(\alpha, \beta\right) = 0}$$

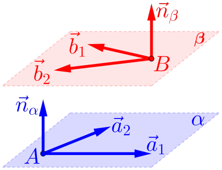
4.5 *Ângulos*

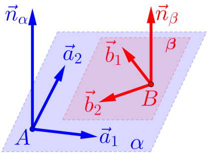
Para determinar ângulos entre planos, é necessário primeiro, saber qual é a posição relativa entre eles, pois dependendo do caso, o ângulo é nulo e nada para se calcular, mas quando não for nulo, o ângulo será calculando, usando o cálculo do ângulo entre os dois vetores normais dos planos.

4.5.1 *Ângulo Nulo*

O ângulo entre os planos α e β será **nulo**, ou seja, $(\alpha, \beta) = 0^o$, quando:

- Os planos α e β forem paralelos, ou
- Os planos α e β forem coincidentes.

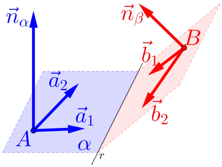




4.5.2 Ângulo Não Nulo

O ângulo entre os planos α e β será **não nulo**, ou seja, $(\alpha, \beta) \neq 0^o$, quando:

- Os planos α e β forem concorrentes.



Neste caso, o ângulo entre os planos α e β é igual ao ângulo definido pelos vetores normais $\vec{n}_\alpha$ e $\vec{n}_\beta$, ou seja:

$$\boxed{(\alpha, \beta) = \left(\vec{n}_\alpha, \vec{n}_\beta\right)}$$

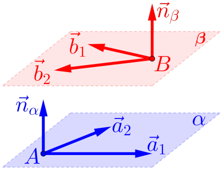
4.6 Interseções

As interseções entre planos, depende da posição relativa. Se a interseção for vazia, nada a de ser calculado e se não for vazia deve-se, basicamente, resolver sistemas, para encontrar a solução.

4.6.1 Interseção Vazia

A interseção entre os planos α e β será **vazia**, ou seja, $\alpha \cap \beta = \{ \}$, quando:

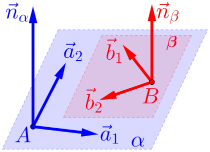
- Os planos α e β forem paralelos distintos.



4.6.2 Interseção Não Vazia

A interseção entre os planos α e β será **não vazia**, ou seja, $\alpha \cap \beta \neq \{\ \}$, quando:

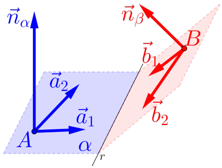
- Os planos α e β forem paralelos coincidentes.



Neste caso a interseção será o próprio plano α ou β, ou seja:

$$\boxed{\alpha \cap \beta = \alpha \equiv \beta}$$

- Os planos α e β forem concorrentes.



Neste caso a interseção será uma reta r, ou seja:

$$\boxed{\alpha \cap \beta = r}$$

Essa reta r será definida no próximo capítulo.

4.7 Distâncias

As distâncias entre dois planos e entre um ponto e um plano, também depende da posição relativa desses objetos pois, se a distância for nula nada a ser calculado e se for positiva, deve-se, basicamente, calcular comprimentos (produto interno) e/ou volume (produto misto).

Observação 4.3 *A distância entre dois pontos A e B, quaisquer é calculado com a norma do vetor $\overrightarrow{AB}$, ou seja,*

$$d(A, B) = \left\| \overrightarrow{AB} \right\|$$

4.7.1 Distância Nula

A distância entre um ponto Q e o plano α será **nula**, ou seja, $d(Q, \alpha) = 0$, quando:

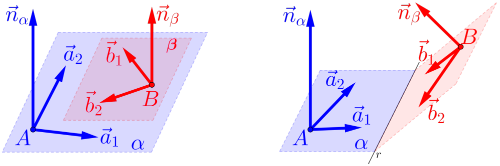
- O ponto Q qualquer **pertencer** ao plano α, ou seja, $Q \in \alpha$:

$$\boxed{d(Q, \alpha) = 0}$$

E a distância entre os planos α e β será **nula**, ou seja, $\mathrm{d}\left(\alpha, \beta\right) = 0$, quando:

- Os planos α e β forem coincidentes ou concorrentes.

$$\boxed{\mathrm{d}\left(\alpha, \beta\right) = 0}$$

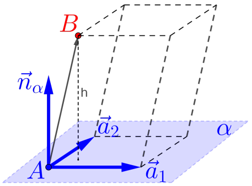


4.7.2 Distância Positiva

A distância entre um ponto B e o plano α será **positiva**, ou seja, $\mathrm{d}\left(B,\alpha\right) > 0$, quando:

- O ponto B qualquer **não pertencer** ao plano α, ou seja, $B \notin \alpha$:

$$\boxed{\mathrm{d}\left(B,\alpha\right) > 0}$$



A distância entre um ponto B e um plano α, será encontrada através do cálculo de um determinado volume.

- Lembre-se: o volume de um paralelepípedo é igual a área da base vezes altura.

- Da figura acima, temos que volume do paralelepípedo é dado pelo módulo do produto misto

$$\underbrace{\left|\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}\right]\right|}_{\text{Volume}} = \underbrace{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|}_{\text{Área da base}} \cdot \underbrace{h}_{\text{Altura}}$$

  logo a distância entre o ponto B e o plano α é dado por:

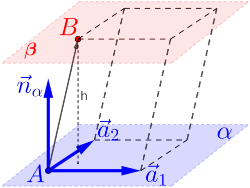
$$\text{Altura} = \frac{\text{Volume}}{\text{Área da base}}$$

$$\boxed{d(B, \alpha) = \frac{\left|\left[\vec{a}_1, \vec{a}_2, \overrightarrow{AB}\right]\right|}{\|\vec{a}_1 \times \vec{a}_2\|}}$$

Observação 4.4 *Se considerarmos $\vec{n}_\alpha = \vec{a}_1 \times \vec{a}_2$, teremos:*

$$\boxed{d(B, \alpha) = \frac{\left|\vec{n}_\alpha \cdot \overrightarrow{AB}\right|}{\|\vec{n}_\alpha\|}}$$

A outra possibilidade de distância entre os planos α e β ser **positiva**, ou seja, $\mathrm{d}(\alpha, \beta) > 0$ é quando os planos α e β forem paralelos.



Portanto a distância entre o plano α e o plano β é igual à distância do ponto $A \in \alpha$ ao plano β, ou igual à distância do ponto $B \in \beta$ ao plano α, ou seja:

$$\boxed{\mathrm{d}(\alpha, \beta) = \mathrm{d}(A, \beta) = \mathrm{d}(B, \alpha)}$$

4.8 Exemplos

A partir deste momento iremos revisar, via exercícios e exemplos, todos os conhecimentos anteriores, como definir planos e determinar a posição relativa, a interseção, o ângulo e a distância entre eles, sempre considerando o sistema de coordenadas do $\mathbb{R}^3$ definido.

Em todos os exemplos a seguir, vamos considerar os seguintes pontos:

$$\boxed{A = (1, 2, 3)} \quad \boxed{B = (2, 3, 4)} \quad \boxed{C = (3, -1, 1)}$$

e ponto genérico $P = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

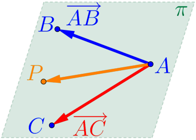
Exemplo 4.4 *Determinar o plano π que passa pelos pontos A, B e C.*

Para determinar o plano π, ou seja, determinar as equações deste plano, você terá que escolher um dos pontos e dois vetores LI e paralelos ao plano, por exemplo o ponto A e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, isto é:

$$\pi : \begin{cases} \text{Pontos: } A, B \text{ e } C \\ \text{Vetores: } \vec{u} = \overrightarrow{AB} \text{ e } \vec{v} = \overrightarrow{AC} \end{cases}$$

Como fazer isso?

- Esboce um plano com 3 pontos e um ponto genérico P;



- Represente e determine os 3 vetores $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AP}$ no plano π:

$$\begin{aligned}
\vec{u} &= (2-1, 3-2, 4-3) = (1, 1, 1) \\
\vec{v} &= (3-1, -1-2, 1-3) = (2, -3, -2) \\
\overrightarrow{AP} &= (x-1, y-2, z-3)
\end{aligned}$$

- Observe que o volume V do paralelepípedo formado pelos 3 vetores deve ser zero;

Porque o volume é zero?

$$\begin{aligned}
V &= \left| \left[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \vec{v} \right] \right| = 0 \\
&= \begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z-3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 0
\end{aligned}$$

- Logo a equação normal do plano π é dada por:

$$\boxed{\pi : 1x + 4y - 5z + 6 = 0}$$

Vamos verificar que os 3 pontos pertencem ao plano π:

$A = (1, 2, 3) \in \pi$?

Sim, pois as coordenadas do ponto A satisfazem a equação do plano.

$$1(\overset{\overset{x}{\shortparallel}}{1}) + 4(\overset{\overset{y}{\shortparallel}}{2}) - 5(\overset{\overset{z}{\shortparallel}}{3}) + 6 \overset{?}{=} 0$$

$$1 + 8 - 15 + 6 = 0 \checkmark$$

$B = (2, 3, 4) \in \pi$?

Sim, pois as coordenadas do ponto B satisfazem a equação do plano.

$$1(\overset{\overset{x}{\shortparallel}}{2}) + 4(\overset{\overset{y}{\shortparallel}}{3}) - 5(\overset{\overset{z}{\shortparallel}}{4}) + 6 \overset{?}{=} 0$$

$$2 + 12 - 20 + 6 = 0 \checkmark$$

$C = (3, -1, 1) \in \pi$?

Sim, pois as coordenadas do ponto C satisfazem a equação do plano.

$$1(\overset{x}{\overset{\shortparallel}{3}}) + 4(\overset{y}{\overset{\shortparallel}{-1}}) - 5(\overset{z}{\overset{\shortparallel}{1}}) + 6 \overset{?}{=} 0$$
$$3 - 4 - 5 + 6 = 0 \checkmark$$

- Para escrever as equações paramétricas do plano π partindo de sua equação normal, temos pelo menos duas possibilidades:

1ª Determinar dois vetores diretores do plano π, para tanto, determinaremos outros dois pontos do plano π, como por exemplo os pontos

$$C_1 = (3, 4, 5) \quad \text{e} \quad C_2 = (2, -2, 0)$$

e encontrando os dois vetores diretores:

$$\overrightarrow{AC_1} = (2, 2, 2) \quad \text{e} \quad \overrightarrow{AC_2} = (1, -4, -3)$$

logo teremos uma equação paramétrica do plano π dada por:

$$\boxed{\pi : \begin{cases} x &= 1 + 2\tau_1 + 1\tau_2 \\ y &= 2 + 2\tau_1 - 4\tau_2 \\ z &= 3 + 2\tau_1 - 3\tau_2 \end{cases}}$$

2ª Considerar $y = \kappa_1$ e $z = \kappa_2$, logo da equação normal do plano π, teremos que

$$x = -6 - 4y + 5z$$

logo teremos uma equação paramétrica do plano π dada por:

$$\pi : \begin{cases} x &= -6 - 4\kappa_1 + 5\kappa_2 \\ y &= \kappa_1 \\ z &= \kappa_2 \end{cases}$$

ou na forma completa:

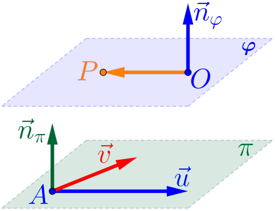
$$\boxed{\pi : \begin{cases} x &= -6 - 4\kappa_1 + 5\kappa_2 \\ y &= 0 + 1\kappa_1 + 0\kappa_2 \\ z &= 0 + 0\kappa_1 + 1\kappa_2 \end{cases}}$$

Exemplo 4.5 *Determinar a equação normal do plano* φ *que contenha o ponto a origem* $O = (0,0,0)$ *e seja paralelo ao plano* π.

Para determinar a equação normal do plano φ, você terá que determinar um vetor normal do plano $\vec{n}_\varphi$, ou dois vetores diretores do plano.

Como fazer isso?

- Esboce os dois planos paralelos φ e π;



- Represente o ponto A e o vetor normal $\vec{n}_\pi$ no plano π e os pontos O e P no plano φ;

- Observe que, para definir o plano φ, só falta determinar um vetor normal $\vec{n}_\varphi$;

- Escolha como vetor normal do plano φ o mesmo do plano π, ou seja, $\boxed{\vec{n}_\varphi = \vec{n}_\pi}$

Porque posso escolher esse vetor?

Como $\pi : 1x + 4y - 5z + 6 = 0$, temos que o vetor normal será $\vec{n}_\pi = (1, 4, -5)$.

- Temos, portanto, que o plano φ é definido pelo ponto O e um vetor normal $\vec{n}_\varphi$, ou seja,

$$\varphi : \begin{cases} \text{Ponto: } O = (0,0,0) \\ \text{Vetor normal: } \vec{n}_\varphi = \vec{n}_\pi = (1,4,-5) \end{cases}$$

- Como o vetor $\vec{n}_\varphi$ é ortogonal à $\overrightarrow{OP}$, temos que o produto interno $\vec{n}_\varphi \cdot \overrightarrow{OP} = 0$, ou seja:

$$\overbrace{(1,4,-5)}^{\vec{n}_\varphi} \cdot \overbrace{(x,y,z)}^{\overrightarrow{OP}} = 1x + 4y - 5z = 0$$

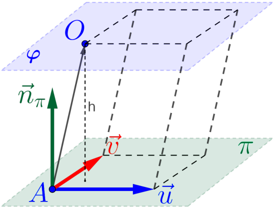
- Logo a equação normal do plano φ será dado por:

$$\boxed{\varphi : 1x + 4y - 5z = 0}$$

Exemplo 4.6 *Determinar a distância entre os dois planos paralelos π e φ.*

Para determinar a distância entre os planos π e φ, vamos de fato calcular um volume.

- Esboce dois planos paralelos π e o ponto 0 no plano φ



- Represente o ponto A e o vetor normal $\vec{n}_\pi$ no plano π e o ponto 0 no plano φ;
- Represente o vetor $\overrightarrow{AO}$;
- Observe que, o vetor $\vec{n}_\pi$ pode representar o produto vetorial de dois vetores diretores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ do plano π, ou seja, $\vec{n}_\pi = \vec{u} \times \vec{v}$;

- O volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\overrightarrow{AO}$ será o módulo do produto misto, ou seja:

$$V = \left| \left[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{AO} \right] \right| = \left| \vec{u} \times \vec{v} \cdot \overrightarrow{AO} \right|$$

Logo:

$$\begin{aligned} V &= \left| \vec{n}_\pi \cdot \overrightarrow{AO} \right| \\ &= \left| (1, 4, -5) \cdot (-1, -2, -3) \right| \\ &= \left| (1)(-1) + (4)(-2) + (-5)(-3) \right| \\ &= |-1 - 8 + 15| = 6 \ u.v. \end{aligned}$$

Lembre-se: volume de um paralelepípedo é área da base vezes altura.

- A área da base (A_{base}) do paralelepípedo é gerado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, ou seja, é dada por:

$$A_{base} = \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \|\vec{n}_\pi\| = \sqrt{42} \ u.a.$$

- A distância entre os planos φ e πé igual a distância entre o ponto O e o plano π , que corresponde a altura (h) do paralelepípedo, ou seja:

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(\varphi, \pi) &= \mathrm{d}(O, \pi) \\ &= h = \frac{\text{Volume}}{A_{base}} \end{aligned}$$

$$\boxed{\mathrm{d}(\varphi, \pi) = \frac{6}{\sqrt{42}}\ u.c.}$$

4.9 *Avaliando o que foi Construído*

- Foram introduzidos, neste capitulo os planos e como olhar este elemento de uma maneira geométrica.

- Definimos também as equações paramétricas dos planos, bem como a equação a equação geral de um plano.

- Foi bastante enfatizado que determinar a posição relativa entre os planos é, de fato, muito importante, pois facilita a compreensão dos problemas e principalmente a sua resolução.

- Mostramos também como determinar ângulos e distâncias entre planos deixando as interseções para o próximo capítulo.