Cônicas

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

(Notas - 18/5/2023)

Sérgio de Albuquerque Souza

Sumário

Sumário **2**

6 Cônicas **3**

6.1 Introdução 3

6.2 Cônicas 5

6.3 Classificação 56

6.4 Avaliando o que foi construído 74

Capítulo 6

Cônicas

6.1 Introdução

Nesta unidade estudaremos e definiremos as cônicas, como por exemplo, circunferências, elipses, hipérboles e parábolas, a partir das suas equações gerais dadas por equações do segundo grau em duas variáveis, usando ferramentas algébricas, como matrizes, determinantes, polinômios característicos, autovalores e autovetores, introduzidos nesta unidade.

6.1.1 Problematizando a Temática

Na classificação da cônica, trataremos de modo algébrico a equação geral, para obter a cônica na forma reduzida, simplificando, desta maneira, a equação para a obtenção dos seus elementos básicos.

Para a visualização das cônicas utilizaremos o programa Geogebra (`geogebra.org`) para exibir as cônicas, bem como resolver exercícios e interagir com as curvas, nele definidas, de maneira simples e agradável.

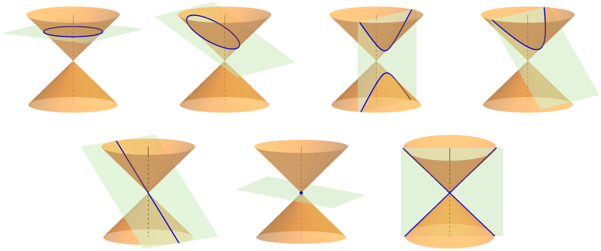
6.1.2 Conhecendo a Temática

O tratamento mais básico, ou seja, considerando as cônicas com o eixo focal paralelo ao eixo x ou ao eixo y, para definir as equações e determinar todos os elementos definidos nas cônicas.

Para a classificação das cônicas, usaremos os conceitos básicos de como encontrar os autovalores e autovetores, associados a uma determinada matriz. A definição e aplicações serão objetos da disciplina Introdução à Álgebra Linear, mas aqui introduzidas parcialmente, apenas para usá-las em nossos estudos.

6.2 Cônicas

As cônicas ou secções cônicas são curvas obtidas pela intersecção de um plano com um cone duplo. Dependendo da inclinação desse plano em relação ao eixo central do cone, a curva interseção será: uma circunferência, uma elipse, uma hipérbole, uma parábola, uma reta, um ponto ou duas retas, visualizados nas figuras abaixo, respectivamente.



Vamos considerar neste texto, para o estudo inicial das cônicas o plano cartesiano, ou seja, o espaço de duas dimensões $\mathbb{R}^2$.

Definição 6.1 (Cônica)
O lugar geométrico dos pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ que satisfazem a equação do segundo grau em duas variáveis:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0} \tag{6.1}$$

*é denominado de **cônica**.*

Observação 6.1 *Da equação cônica (6.1) , temos que:*

- ⋆ *Pelos menos um dos coeficientes A, B ou C deve ser não nulo ($\neq 0$), caso contrário a equação seria a de uma reta em $\mathbb{R}^2$;*
- ⋆ *Os termos:*
  - $\boxed{Ax^2}$ *e* $\boxed{Cy^2}$ *são denominados de termos quadráticos;*
  - $\boxed{Bxy}$ *é denominado de termo quadrático misto;*
  - $\boxed{Dx}$ *e* $\boxed{Ey}$ *são os termos lineares;*

- $\boxed{F}$ *é o termo independente;*

⋆ *A cônica é o lugar geométrico do plano que satisfazem a equação (6.1), ou seja, é o conjunto de pontos:*

$$\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\right\}$$

⋆ *Podemos escrever a equação (6.1) na forma matricial (verifique):*

$$\boxed{\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0}$$

Exemplo 6.1 *Algumas cônicas com suas equações nas formas reduzidas, completas e matriciais, respectivamente. Teste todas essas cônicas no programa Geogebra.*

a) Circunferência: $\boxed{\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 1}$

$$\boxed{\mathcal{C} : 1x^2 + 0xy + 1y^2 + 0x + 0y - 1 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{C} : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 1 = 0}$$

b) Elipse:

$$\boxed{\mathcal{E} : \frac{x^2}{3} + \frac{y^2}{2} = 1} \iff 2x^2 + 3y^2 = 6$$

$$\boxed{\mathcal{E} : 2x^2 + 0xy + 3y^2 + 0x + 0y - 6 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{E} : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0}$$

c) Hipérbole:

$$\boxed{\mathcal{H} : \frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{2} = 1} \Longleftrightarrow 2x^2 - 3y^2 = 6$$

$$\boxed{\mathcal{H} : 2x^2 + 0xy - 3y^2 + 0x + 0y - 6 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{H} : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 6 = 0}$$

d) Parábola:

$$\boxed{\mathcal{P} : x^2 - y = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{P} : 1x^2 + 0xy + 0y^2 + 0x - 1y + 0 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{P} : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 0 = 0}$$

e) Um ponto (circunferência ou elipse degenerada):

$$\boxed{\mathcal{E}_p : x^2 + y^2 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_p : 1x^2 + 0xy + 1y^2 + 0x + 0y + 0 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_p : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 0 = 0}$$

f) Vazio (circunferência ou elipse degenerada):

$$\boxed{\mathcal{E}_v : x^2 + y^2 = -1}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_v : 1x^2 + 0xy + 1y^2 + 0x + 0y + 1 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_v : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0}$$

g) *Uma reta (parábola degenerada):*

$$\boxed{\mathcal{P}_r : (x+y)^2 = 0} \iff x^2 + 2xy + y^2 = 0$$

$$\boxed{\mathcal{P}_r : 1x^2 + 2xy + 1y^2 + 0x + 0y + 0 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_r : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 0 = 0}$$

h) *Duas retas paralelas (parábola degenerada):*

$$\boxed{\mathcal{P}_{rr} : (x+y)(x+y+1) = 0}$$

$$\iff x^2 + 2xy + y^2 + x + y = 0$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{rr} : 1x^2 + 2xy + 1y^2 + 1x + 1y + 0 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{rr} : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 0 = 0}$$

i) Duas retas concorrentes (hipérbole degenerada):

$$\boxed{\mathcal{H}_{rr} : (x + y)(x - y) = 0} \iff x^2 - y^2 = 0$$

$$\boxed{\mathcal{H}_{rr} : 1x^2 + 0xy - 1y^2 + 0x + 0y + 0 = 0}$$

$$\boxed{\mathcal{H}_{rr} : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 0 = 0}$$

Apresentaremos nas próximas seções as quatro principais cônicas e as mais conhecidas, ou seja:

6.2.1 Circunferência $\mathcal{C}$ (Página 14)

6.2.2 Elipse $\mathcal{E}$ (Página 24)

6.2.3 Hipérbole $\mathcal{H}$ (Página 35)

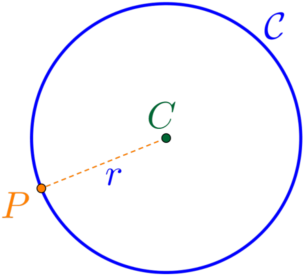
6.2.4 Parábola $\mathcal{P}$ (Página 46)

Serão apresentadas as equações nas formas vetorial, reduzida, paramétrica e matricial, bem como os principais elementos e características dessas 4 cônicas. Para efeito de simplificações será considerado nulo o coeficiente do termo quadrático misto ($B = 0$). Utilizaremos os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ como um ponto qualquer da cônica.

6.2.1 Circunferência

Definição 6.2 (Circunferência $\mathcal{C}$)
Na geometria euclidiana, uma ***circunferência*** $\mathcal{C}$ *é o lugar geométrico dos pontos P de um plano que equidistam de um ponto fixo (Figura 6.1). O ponto fixo C é denominado de* ***centro*** *e a equidistância r é denominada de* ***raio*** *da circunferência.*

Figura 6.1: *Representação de uma circunferência $\mathcal{C}$ de raio r.*



6.2.1.1 *Equações da Circunferência*

Considerando os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e o centro $C = (C_x, C_y)$, temos as seguintes equações:

- Equação vetorial:

$$\boxed{\mathcal{C} : \left\|\overrightarrow{CP}\right\| = r}$$

- Equação na forma reduzida:

$$\boxed{\mathcal{C} : (x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 = r^2}$$

- Considerando $v = {C_x}^2 + {C_y}^2 - r^2$, a equação na forma geral:

$$\boxed{\mathcal{C} : 1x^2 + 0xy + 1y^2 - 2C_x x - 2C_y y + v = 0}$$

- Equação na forma matricial:

$$\boxed{\mathcal{C} : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2C_x & -2C_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v = 0}$$

⋆ Equação na forma paramétrica:

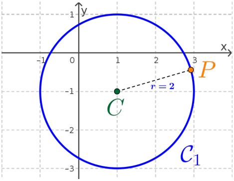
$$\boxed{\mathcal{C}: \begin{cases} x = C_x + r \cdot \cos(\theta) \\ y = C_y + r \cdot \text{sen}(\theta) \end{cases}}$$

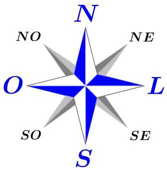
Exemplo 6.2 *Considerando a circunferência $\mathcal{C}_1$ de centro $C = (1, -1)$ e raio $r = 2$, teremos que:*

a) A equação na forma reduzida:

$$\mathcal{C}_1 : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$$

b) Gráfico da circunferência $\mathcal{C}_1$:





c) Os pontos da circunferência $\mathcal{C}_1$ correspondentes aos pontos cardeais Norte, Sul, Leste e Oeste, são:

$$N = (1, 1) \qquad S = (1, -3)$$
$$L = (3, -1) \qquad O = (-1, -1)$$

d) A equação na forma geral:

$$\mathcal{C}_1 : 1x^2 + 0xy + 1y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$$

e) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{C}_1 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 2 = 0$$

Observação 6.2 (Completamento de Quadrados) *O completamento de quadrados é uma técnica para reescrever um polinômio do segundo grau* $p(x) = ax^2 + bx + c$ *na forma:*

$$\boxed{p(x) = a(x - \tau)^2 + \kappa}$$

Para determinar o completamento do quadrado do polinômio, considera-se:

$$\boxed{\tau = -\frac{b}{2a}} \quad e \quad \boxed{\kappa = c - \frac{b^2}{4a}}$$

ou seja:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)}$$

Exemplo 6.3 *Considerando a circunferência $\mathcal{C}_2$ definida pela equação:*

$$\mathcal{C}_2 : x^2 + y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

Teremos que:

a) *Para determinar a equação na forma reduzida:*

⋆ *Agruparemos as variáveis x e y, da forma:*

$$\mathcal{C}_2 : \left[x^2 - 2x\right] + \left[y^2 - 4y\right] + 1 = 0 \tag{6.2}$$

⋆ *Aplicar a técnica de completamento de quadrados nesses agrupamentos, ou seja:*

$$\left[x^2 - 2x\right] = (x - 1)^2 - 1 \tag{6.3}$$

$$\left[y^2 - 4y\right] = (y - 2)^2 - 4 \tag{6.4}$$

⋆ *Substituir os completamentos de quadrados (6.3) e (6.4) na equação da circunferência $\mathcal{C}_2$ (6.2):*

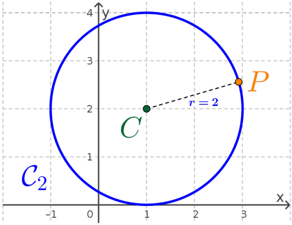
$$\mathcal{C}_2 : \left[(x - 1)^2 - 1\right] + \left[(y - 2)^2 - 4\right] + 1 = 0$$

⋆ *Teremos a equação na forma reduzida:*

$$\boxed{\mathcal{C}_2 : (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4}$$

b) *A circunferência* $\mathcal{C}_2$ *possui centro* $C = (1,2)$ *e raio* $r = 2$.

c) *Gráfico da circunferência* $\mathcal{C}_2$*:*



d) *Os pontos da circunferência* $\mathcal{C}_2$ *correspondentes aos pontos cardeais Norte, Sul, Leste e Oeste, são:*

$$N = (1,4) \qquad S = (1,0)$$
$$L = (3,2) \qquad O = (-1,2)$$

e) A equação na forma geral:

$$\mathcal{C}_2 : 1x^2 + 0xy + 1y^2 - 2x - 4y + 1 = 0$$

f) A equação na forma matricial:

$$\boxed{\mathcal{C}_1 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 & -4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0}$$

Exercício 6.1 *Determinar todos os elementos e as equações reduzidas e completas, considerando as características das cônicas abaixo:*

a) *Circunferência* $\mathcal{C}_a$ *com centro* $C = (2, 1)$ *e raio* $r = 3$.[a]

b) *Circunferência* $\mathcal{C}_b$ *com centro* $C = (3, 2)$ *e que contenha o ponto* $Q = (1, 1)$.[b]

c) *Circunferência* $\mathcal{C}_c$ *com diâmetro dado pelos pontos* $A = (2, 0)$ *e* $B = (-4, 8)$.[c]

[a] $\mathcal{C}_a : (x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$, $\mathcal{C}_a : 1x^2 + 0xy + 1y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$, $N = (2, 4)$, $S = (2, -2)$, $L = (5, 1)$ *e* $O = (-1, 1)$.

[b] $r = \sqrt{5}$, $\mathcal{C}_b : (x-3)^2 + (y-2)^2 = 5$, $\mathcal{C}_b : 1x^2 + 0xy + 1y^2 - 6x - 4y + 8 = 0$, $N = (3, \sqrt{5}+2)$, $S = (3, 2-\sqrt{5})$, $L = (\sqrt{5}+3, 2)$ *e* $O = (3-\sqrt{5}, 2)$.

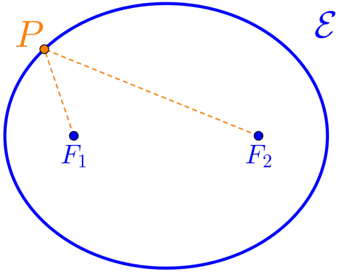
[c] $C = (-1, 4)$, $r = 5$, $\mathcal{C}_c : (x+1)^2 + (y-4)^2 = 25$, $\mathcal{C}_c : x^2 + 0xy + 1y^2 + 2x - 8y - 8 = 0$, $N = (-1, 9)$, $S = (-1, -1)$, $L = (4, 4)$ *e* $O = (-6, 4)$.

6.2.2 *Elipse*

Definição 6.3 (Elipse $\mathcal{E}$)

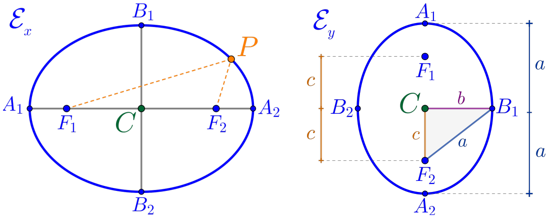
Na geometria euclidiana, uma ***elipse*** $\mathcal{E}$ *é o lugar geométrico dos pontos* P *de um plano cuja a* ***soma*** *das distâncias deste ponto a outros dois pontos fixos* F_1 e F_2 *do plano (Figura 6.2), denominados de* ***focos*** *da elipse, é um valor constante.*

Figura 6.2: *Representação de uma elipse* $\mathcal{E}$.



6.2.2.1 Elementos da Elipse

Principais elementos de uma elipse $\mathcal{E}$ são:



- ⋆ Pontos F_1 e F_2 denominados de **focos**.
- ⋆ Ponto médio C dos focos F_1 e F_2, denominado de **centro**.
- ⋆ Pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 denominados de **vértices**.
- ⋆ Segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ denominados de **raios focais**.
- ⋆ Segmento $\overline{A_1A_2}$ denominado de **eixo maior** (ou **focal**).

- ⋆ Segmento $\overline{B_1B_2}$ denominado de **eixo menor** (ou **transverso**).
- ⋆ O comprimento do eixo maior $2a = \left\|\overline{A_1A_2}\right\|$.
- ⋆ O comprimento do eixo menor $2b = \left\|\overline{B_1B_2}\right\|$.
- ⋆ O comprimento $2c = \left\|\overline{F_1F_2}\right\|$ denominado de **distância focal**.
- ⋆ Vale a relação notável entre os comprimentos

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

- ⋆ A razão $\dfrac{c}{a} = \varepsilon$ denominada **excentricidade** $(0 \leq \varepsilon < 1)$.

6.2.2.2 *Equações da Elipse*

Considerando os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e o centro $C = (C_x, C_y)$, temos as seguintes equações:

⋆ Equação vetorial:

$$\boxed{\mathcal{E} : \left\|\overrightarrow{F_1 P}\right\| + \left\|\overrightarrow{F_2 P}\right\| = 2a}$$

⋆ Equações na forma reduzida:

Com eixo focal paralelo ao eixo x teremos:

$$\boxed{\mathcal{E}_x : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} + \frac{(y - C_y)^2}{b^2} = 1}$$

Com eixo focal paralelo ao eixo y temos:

$$\boxed{\mathcal{E}_y : \frac{(x - C_x)^2}{b^2} + \frac{(y - C_y)^2}{a^2} = 1}$$

⋆ Considerando $v = {C_x}^2 b^2 + {C_y}^2 a^2 - a^2 b^2$, a equação na forma geral:

$$\boxed{\mathcal{E}_x : b^2 x^2 + 0xy + a^2 y^2 - 2C_x b^2 x - 2C_y a^2 y + v = 0}$$

⋆ Equação na forma matricial:

$$\boxed{\mathcal{E}_x : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2C_x b^2 & -2C_y a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v = 0}$$

⋆ Equação na forma paramétrica:

$$\boxed{\mathcal{E} : \begin{cases} x & = & C_x & + & a \cdot \cos(\theta) \\ y & = & C_y & + & b \cdot \operatorname{sen}(\theta) \end{cases}}$$

Exemplo 6.4 *Considerando a elipse* $\mathcal{E}_1$ *com focos* $F_1 = (-4, 0)$ *e* $F_2 = (4, 0)$ *e um dos vértices* $B_1 = (0, 3)$, *teremos que:*

a) *A distância focal* $2c = \left\|\overline{F_1F_2}\right\| = 8$, *logo* $c = 4$.

b) *O centro* C *é o ponto médio dos pontos* F_1 *e* F_2, *ou seja:*

$$C = \left(\frac{-4+4}{2}, \frac{0+0}{2}\right) = (0, 0)$$

c) *Do eixo menor temos que* $b = \left\|\overline{CB_1}\right\| = 3$.

d) *Da relação notável temos que* $a^2 = 3^2 + 4^2 = 25$, *logo* $a = 5$.

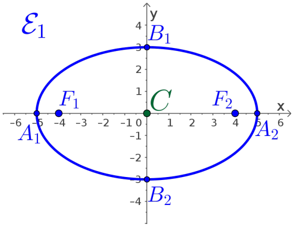
e) *A equação na forma reduzida:*

$$\mathcal{E}_1 : \frac{(x-0)^2}{5^2} + \frac{(y-0)^2}{3^2} = 1$$

$$\mathcal{E}_1 : \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

f) Eixo focal paralelo ao eixo x.

g) Gráfico da elipse $\mathcal{E}_1$:



h) Os vértices da elipse $\mathcal{E}_1$, *são:*

$$A_1 = (-5, 0) \qquad A_2 = (5, 0)$$
$$B_1 = (0, 3) \qquad B_2 = (0, -3)$$

i) A equação na forma geral:

$$\mathcal{E}_1 : 9x^2 + 0xy + 25y^2 + 0x + 0y - 225 = 0$$

j) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{E}_1 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 25 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 225 = 0$$

Exemplo 6.5 *Considerando a elipse $\mathcal{E}_2$ definida pela equação:*

$$\mathcal{E}_2 : 25x^2 + 9y^2 + 100x - 36y - 89 = 0$$

Teremos que:

a) *Para determinar a equação na forma reduzida:*

⋆ *Agruparemos as variáveis x e y, da forma:*

$$\mathcal{E}_2 : \left[25x^2+100x\right]+\left[9y^2-36y\right]-89=0 \quad (6.5)$$

⋆ *Aplicar a técnica de completamento de quadrados nesses agrupamentos, ou seja:*

$$\left[25x^2+100x\right] = 25(x+2)^2 - 100 \quad (6.6)$$

$$\left[9y^2-36y\right] = 9(y-2)^2 - 36 \quad (6.7)$$

⋆ *Substituir os completamentos de quadrados (6.6) e (6.7) na equação da elipse $\mathcal{E}_2$ (6.5):*

$$\mathcal{E}_2 : \left[25(x+2)^2-100\right]+\left[9(y-2)^2-36\right]-89=0$$

$$\mathcal{E}_2 : 25(x+2)^2 + 9(y-2)^2 = 225$$

⋆ *Teremos a equação na forma reduzida:*

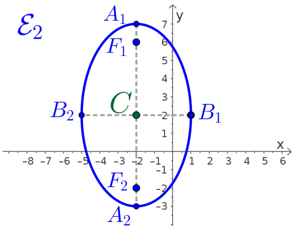
$$\boxed{\mathcal{E}_2 : \frac{(x+2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{25} = 1}$$

b) *A elipse* $\mathcal{E}_2$ *possui centro* $C = (-2, 2)$.

c) *O eixo maior mede* $a = 5$ *(Lembre-se que* $a > b$*) e é paralelo ao eixo* y. *O eixo menor mede* $b = 3$.

d) *Da relação notável temos que* $5^2 = 3^2 + c^2$, *logo a distância focal* $c = 4$.

e) *Gráfico da elipse* $\mathcal{E}_2$*:*



f) Os vértices e os focos da elipse $\mathcal{E}_2$, são:

$$\begin{array}{ll} A_1 = (-2, 7) & A_2 = (-2, -3) \\ B_1 = (1, 2) & B_2 = (-5, 2) \\ F_1 = (-2, 6) & F_2 = (-2, -2) \end{array}$$

g) A equação na forma geral:

$$\mathcal{E}_2 : 25x^2 + 0xy + 9y^2 + 100x - 36y - 89 = 0$$

h) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{E}_2 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 100 & -36 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 89 = 0$$

Exercício 6.2 *Determinar todos os elementos e as equações reduzidas e completas, considerando as características das cônicas abaixo:*

a) *Elipse* $\mathcal{E}_a$ *com centro* $C = (2, 1)$ *e distância focal* $c = 3$ *e eixo maior* $a = 5$ *e paralelo ao eixo* x.[a]

b) *Elipse* $\mathcal{E}_b$ *com centro* $C = (-3, 5)$ *e que tangencia os eixos* x *e* y.[b]

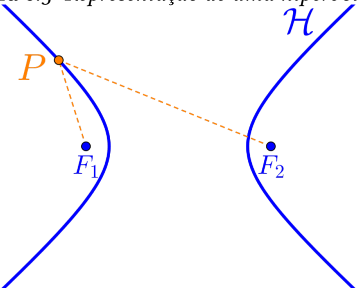
(a) $b = 4$, $\mathcal{E}_a : \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$, *eixo focal paralelo ao eixo* x, $\mathcal{E}_a : 16x^2 + 0xy + 25y^2 - 64x - 50y - 311 = 0$, $F_1 = (5, 1)$, $F_2 = (-1, 1)$, $A_1 = (7, 1)$, $A_2 = (-3, 1)$, $B_1 = (2, 5)$ *e* $B_2 = (2, -3)$.

(b) $a = 5$, $b = 3$, $c = 4$, $\mathcal{E}_b : \frac{(x+3)^2}{9} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1$, *eixo focal paralelo ao eixo* y. $\mathcal{E}_b : 25x^2 + 0xy + 9y^2 + 150x - 90y + 225 = 0$, $F_1 = (-3, 9)$, $F_2 = (-3, 1)$, $A_1 = (-3, 10)$, $A_2 = (-3, 0)$, $B_1 = (0, 5)$ *e* $B_2 = (-6, 5)$.

6.2.3 Hipérbole

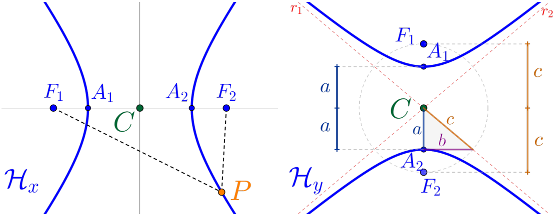
Definição 6.4 (Hipérbole)
*Na geometria euclidiana, uma **hipérbole** é o lugar geométrico dos pontos P de um plano cuja a **diferença** das distâncias deste ponto a outros dois pontos fixos F_1 e F_2 do plano (Figura 6.3), denominados de **focos** da hipérbole, é um valor constante.*

Figura 6.3: *Representação de uma hipérbole $\mathcal{H}$.*



6.2.3.1 *Elementos da Hipérbole*

Principais elementos de uma hipérbole $\mathcal{H}$ são:



- ⋆ Pontos F_1 e F_2 denominados de **focos**.
- ⋆ Ponto médio C dos focos F_1 e F_2, denominado de **centro**.
- ⋆ Pontos A_1 e A_2 denominados de **vértices**.
- ⋆ Segmentos $\overline{PF_1}$ e $\overline{PF_2}$ denominados de **raios focais**.
- ⋆ Segmento $\overline{A_1A_2}$ denominado de **eixo maior** (ou **focal**) e o eixo perpendicular passando pelo C é denominado **eixo imaginário**.

- ⋆ O comprimento do eixo maior $2a = \left\|\overline{A_1A_2}\right\|$.
- ⋆ O comprimento $2c = \left\|\overline{F_1F_2}\right\|$ denominado de **distância focal**.
- ⋆ Vale a relação notável entre os comprimentos

$$\boxed{c^2 = a^2 + b^2}$$

- ⋆ As retas r_1 e r_2 denominadas **assíntotas** com equações:

$$\boxed{r_1 : (y - C_y) = \frac{b}{a}(x - C_x)}$$

$$\boxed{r_2 : (y - C_y) = -\frac{b}{a}(x - C_x)}$$

- ⋆ A razão $\dfrac{c}{a} = \varepsilon$ denominada **excentricidade** $(\varepsilon > 1)$.

6.2.3.2 Equações da Hipérbole

Considerando os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e o centro $C = (C_x, C_y)$, temos as seguintes equações:

- Equação vetorial:

$$\boxed{\mathcal{H} : \left| \left\| \overrightarrow{PF_1} \right\| - \left\| \overrightarrow{PF_2} \right\| \right| = 2a}$$

- Equação na forma reduzida:

  Com eixo focal paralelo ao eixo x teremos:

$$\boxed{\mathcal{H}_x : \frac{(x - C_x)^2}{a^2} - \frac{(y - C_y)^2}{b^2} = 1}$$

  Com eixo focal paralelo ao eixo y temos:

$$\boxed{\mathcal{H}_y : \frac{(y - C_y)^2}{a^2} - \frac{(x - C_x)^2}{b^2} = 1}$$

- Considerando $v = {C_x}^2 b^2 - {C_y}^2 a^2 - a^2 b^2$ a equação na forma geral:

$$\boxed{\mathcal{H}_x : b^2 x^2 + 0xy - a^2 y^2 - 2C_x b^2 x - 2C_y a^2 y + v = 0}$$

⋆ Equação na forma matricial:

$$\boxed{\mathcal{H}_x : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b^2 & 0 \\ 0 & -a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2C_x b^2 & -2C_y a^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v = 0}$$

⋆ Equação na forma paramétrica:

$$\boxed{\mathcal{H} : \begin{cases} x & = & C_x & + & a \cdot \sec(\theta) \\ y & = & C_y & + & b \cdot \tan(\theta) \end{cases}}$$

Exemplo 6.6 *Considerando a hipérbole* $\mathcal{H}_1$ *com focos* $F_1 = (-5, 0)$ *e* $F_2 = (5, 0)$ *e um dos vértices* $A_2 = (3, 0)$*, teremos que:*

a) *O centro* C *é o ponto médio dos pontos* F_1 *e* F_2*, logo*

$$C = \left(\frac{-5+5}{2}, \frac{0+0}{2} \right) = (0, 0)$$

b) *A distância focal* $2c = \left\| \overline{F_1 F_2} \right\| = 10$*, logo* $c = 5$*.*

c) *Do eixo maior temos que* $a = \left\| \overline{C A_2} \right\| = 3$*.*

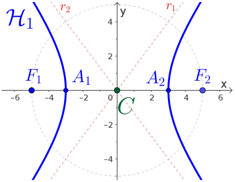
d) *Da relação notável temos que* $5^2 = 3^2 + b^2$*, logo* $b = 4$*.*

e) *A equação na forma reduzida:*

$$\mathcal{H}_1 : \frac{(x-0)^2}{3^2} - \frac{(y-0)^2}{4^2} = 1$$

$$\mathcal{H}_1 : \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$

f) Gráfico da hipérbole $\mathcal{H}_1$:



g) As retas assintotas são:

$$r_1 : y = \frac{4}{3}x \qquad r_2 : y = -\frac{4}{3}x$$

h) A equação na forma geral:

$$\mathcal{H}_1 : 16x^2 + 0xy - 9y^2 + 0x + 0y - 144 = 0$$

i) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{H}_1 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 144 = 0$$

Exemplo 6.7 *Considerando a hipérbole $\mathcal{H}_2$ definida pela equação:*

$$\mathcal{H}_2 : -9x^2 + 16y^2 + 18x - 32y - 137 = 0$$

Teremos que:

a) Para determinar a equação na forma reduzida:

⋆ *Agruparemos as variáveis x e y, da forma:*

$$\mathcal{H}_2 : \left[-9x^2 + 18x\right] + \left[16y^2 - 32y\right] - 137 = 0 \quad (6.8)$$

⋆ *Aplicar a técnica de completamento de quadrados nesses agrupamentos, ou seja:*

$$\left[-9x^2 + 18x\right] = -9(x-1)^2 + 9 \quad (6.9)$$

$$\left[16y^2 - 32y\right] = 16(y-1)^2 - 16 \quad (6.10)$$

⋆ *Substituir os completamentos de quadrados (6.9) e (6.10) na equação da hipérbole $\mathcal{H}_2$ (6.8):*

$$\mathcal{H}_2 : \left[-9(x-1)^2 + 9\right] + \left[16(y-1)^2 - 16\right] - 137 = 0$$

$$\mathcal{H}_2 : -9(x-1)^2 + 16(y-1)^2 = 144$$

⋆ *Teremos a equação na forma reduzida:*

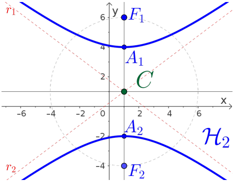
$$\boxed{\mathcal{H}_2 : \frac{(y-1)^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{16} = 1}$$

b) *A hipérbole* $\mathcal{H}_2$ *possui centro* $C = (1,1)$.

c) *Da equação*[c] *temos que* $a = 3$ *e* $b = 4$.

d) *Da relação notável temos que* $c^2 = 3^2 + 4^2$, *logo a distância focal* $c = 5$.

e) *Gráfico da hipérbole* $\mathcal{H}_2$:



[c] *Na equação reduzida de uma hipérbole o valor* a^2 *é sempre o numerador da parte "parte positiva" da equação.*

f) Os vértices e os focos da hipérbole $\mathcal{H}_2$, são:

$$A_1 = (1, 4) \qquad A_2 = (1, -2)$$
$$F_1 = (1, 6) \qquad F_2 = (1, -4)$$

g) As retas assintotas são:

$$r_1 : y - 1 = -\frac{4}{3}(x - 1) \quad r_2 : y - 1 = \frac{4}{3}(x - 1)$$

h) A equação na forma geral:

$$\mathcal{H}_2 : -9x^2 + 0xy + 16y^2 + 18x - 32y - 137 = 0$$

i) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{H}_2 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -9 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 18 & -32 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 137 = 0$$

Exercício 6.3 *Determinar todos os elementos e as equações reduzidas e completas, considerando as características das cônicas abaixo:*

a) *Hipérbole* $\mathcal{H}_a$ *com centro* $C = (2, 1)$ *e distância focal* $c = 5$ *e eixo maior* $a = 4$ *e paralelo ao eixo* x.[a]

b) *Hipérbole* $\mathcal{H}_b$ *com centro* $C = (-1, 1)$, *foco* $F_1 = (-1, 6)$ *e vértice* $A_1 = (-1, 5)$.[b]

[a] $b = 3$, $\mathcal{H}_a : \frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$, $\mathcal{H}_a : 9x^2 + 0xy - 16y^2 - 36x + 32y - 124 = 0$, $F_1 = (7, 1)$, $F_2 = (-3, 1)$, $A_1 = (6, 1)$, $A_2 = (-2, 1)$, $r : (y - 1) = \pm\frac{3}{4}(x - 1)$.

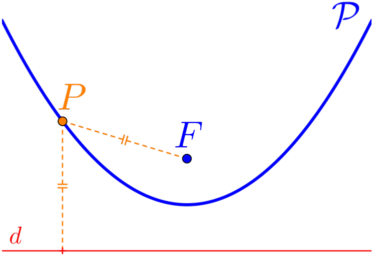
[b] $a = 4$, $b = 3$, $c = 5$, $\mathcal{H}_b : \frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+1)^2}{9} = 1$, *eixo focal paralelo ao eixo* y, $\mathcal{H}_b : -16x^2 + 0xy + 9y^2 - 18x - 32y - 151 = 0$, $C = (-1, 1)$, $F_1 = (-1, 6)$, $F_2 = (-1, -4)$, $A_1 = (-1, 5)$, $A_2 = (-1, -3)$, $r : (y - 1) = \pm\frac{3}{4}(x + 1)$.

6.2.4 Parábola

Definição 6.5 (Parábola)

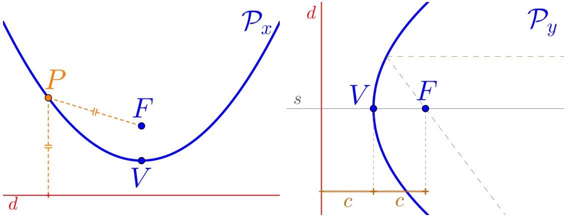
*Na geometria euclidiana, uma **parábola** é o lugar geométrico dos pontos P de um plano que são equidistantes de uma reta fixa d, denominada de **reta diretriz**, e de um ponto fixo F denominado de **foco** da parábola.*

Figura 6.4: *Representação de uma parábola $\mathcal{P}$ com reta diretriz d.*



6.2.4.1 Elementos da Parábola

Principais elementos de uma parábola $\mathcal{P}$ são:



- ⋆ Ponto F denominado de **foco**.

- ⋆ Ponto V denominado **vértice**.

- ⋆ A reta r denominada **reta diretriz**.

- ⋆ A reta s definida pelos ponto F e V denominada de **eixo de simetria**.

- ⋆ O valor $c = \left\|\overline{VF}\right\| = \mathrm{d}\left(V, r\right)$ denominado de **parâmetro** da parábola $\mathcal{P}$.

6.2.4.2 *Equações da Parábola*

Considerando os pontos $P = (x, y) \in \mathbb{R}^2$ e o vértice $V = (V_x, V_y)$, temos as seguintes equações:

- Equação vetorial:

$$\boxed{\mathcal{P} : \left\|\overrightarrow{PF}\right\| = \mathrm{d}\left(P, r\right)}$$

- Equação na forma reduzida:

  Com eixo de simetria paralelo ao eixo y teremos:

$$\boxed{\mathcal{P}_{x^+} : (x - V_x)^2 = 4c(y - V_y)}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{x^-} : (x - V_x)^2 = -4c(y - V_y)}$$

  Com eixo de simetria paralelo ao eixo x teremos:

$$\boxed{\mathcal{P}_{y^+} : (y - V_y)^2 = 4c(x - V_x)}$$

$$\boxed{\mathcal{P}_{y^-} : (y - V_y)^2 = -4c(x - V_x)}$$

⋆ Considerando $v = 4cV_y + {V_x}^2$, a equação na forma geral:

$$\boxed{\mathcal{P}: 1x^2 + 0xy + 0y^2 - 2V_x x - 4cy + v = 0}$$

⋆ Equação na forma matricial:

$$\boxed{\mathcal{P}: \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2V_x & -4c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + v = 0}$$

⋆ Equação na forma paramétrica:

$$\boxed{\mathcal{P}: \begin{cases} x & = & V_x & + & 2\tau \\ y & = & V_y & + & c\tau^2 \end{cases}}$$

Exemplo 6.8 *Considerando a parábola $\mathcal{P}_1$ de vértice $V = (0,0)$, foco $F = (0,4)$ e reta diretriz $d : y = -4$, teremos que:*

a) *O parâmetro da parábola* $c = \left\|\overline{VF}\right\| = 4.$

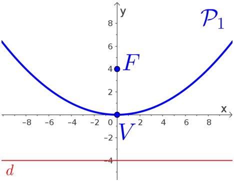
b) *Eixo de simetria é o eixo y, ou seja,* $s : x = 0.$

c) *A equação na forma reduzida:*

$$\mathcal{P}_1 : (x-0)^2 = 4 \cdot 4 \cdot (y-0)$$

$$\mathcal{P}_1 : x^2 = 16y$$

d) *Gráfico da hipérbole $\mathcal{P}_1$:*



e) *A equação na forma geral:*

$$\mathcal{P}_1 : 1x^2 + 0xy - 0y^2 + 0x - 16y + 0 = 0$$

f) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{P}_1 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 0 = 0$$

Exemplo 6.9 *Considerando a parábola* $\mathcal{P}_2$ *definida pela equação:*

$$\mathcal{P}_2 : y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

Teremos que:

a) Para determinar a equação na forma reduzida:

- ⋆ *Agruparemos a variável* y*, da forma:*

$$\mathcal{P}_2 : \left[y^2 - 2y\right] - 4x + 1 = 0 \qquad (6.11)$$

- ⋆ *Aplicar a técnica de completamento de quadrados nesse agrupamento, ou seja:*

$$\left[y^2 - 2y\right] = (y-1)^2 - 1 \qquad (6.12)$$

- ⋆ *Substituir o completamento de quadrados (6.12) na equação da parábola* $\mathcal{P}_2$ *(6.11):*

$$\mathcal{P}_2 : \left[(y-1)^2 - 1\right] - 4x + 1 = 0$$

$$\mathcal{P}_2 : (y-1)^2 - 4x = 0$$

⋆ *Teremos a equação na forma reduzida:*

$$\boxed{\mathcal{P}_2 : (y-1)^2 = 4(x-0)}$$

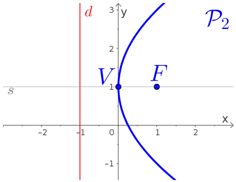
b) *O vértice* $V = (0,1)$.

c) *Eixo de simetria paralelo ao eixo* x.

d) *O parâmetro da parábola* $c = 1$.

e) *O foco* $F = (1,1)$.

f) *Gráfico da parábola* $\mathcal{P}_2$*:*



g) *As retas diretriz* d *e de simetria* s *são:*

$$d : x = -1 \qquad s : y = 1$$

h) A equação na forma geral:

$$\mathcal{P}_2 : 0x^2 + 0xy + 1y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

i) A equação na forma matricial:

$$\mathcal{P}_2 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 1 = 0$$

Exercício 6.4 *Determinar todos os elementos e as equações reduzidas e completas, considerando as características das cônicas abaixo:*

a) *Parábola* $\mathcal{P}_a$ *definida pela equação* $y = x^2$.[a]

b) *Parábola* $\mathcal{P}_b$ *com foco* $F = (-2, -2)$ *que tangencia o eixo* x.[b]

c) *Parábola* $\mathcal{P}_c$ *com reta diretriz* $d : x = 2$, *eixo de simetria* $s : y = 1$ *e com o vértice pertencente ao eixo* y.[c]

[a] $V = (0, 0)$, $F = (0, 1/4)$, $c = 1/4$, *eixo de simetria paralelo ao eixo* y, $\mathcal{P}_a : 1x^2 + 0xy + 0y^2 + 0x - 1y + 0 = 0$, $d : y = -1/4$, $s : x = 0$.

[b] $V = (-2, 0)$, $c = 2$, *eixo de simetria paralelo ao eixo* y, $\mathcal{P}_b : (x + 2)^2 = -8(y - 0)$, $\mathcal{P}_b : 1x^2 + 0xy + 0y + 4x + 8y + 4 = 0$, $d : y = 2$, $s : x = -2$.

[c] $V = (0, 1)$, $F = (-2, 1)$, $c = 2$, *eixo de simetria paralelo ao eixo* x, $\mathcal{P}_c : (y - 1)^2 = -8(x - 0)$, $\mathcal{P}_c : 0x^2 + 0xy + 1y^2 + 8x - 2y + 1 = 0$.

6.3 Classificação

Para a classificação das cônicas nos casos na qual a equação geral da cônica não conste do termo quadrático misto, ou seja, o coeficiente $B = 0$, tal classificação dar-se-á através de operações como completamento de quadrados e operações algébricas básicas obtendo as equações na forma reduzida.

Caso a equação geral da cônica contenha o termo misto ($B \neq 0$), utilizaremos ferramentas algébricas dos autovalores e autovetores para determinar os novos eixos das cônicas, em relação aos eixos coordenados, a partir da equação geral, eliminando desta forma o termo quadrático misto. O detalhamento e o uso mais intensivo desta teoria será tema da disciplina Introdução à Álgebra Linear.

6.3.1 Autovalores e Autovetores

As definições a seguir são para matrizes quadradas de qualquer ordem, porém nos utilizaremos apenas com as matrizes 2×2, que serão nosso principal elemento produzido pelas equações matriciais das cônicas.

Definição 6.6 (Polinômio Característico) *Chamaremos de* ***polinômio característico*** *de uma matriz $A_{n\times n}$ ao polinômio definido por:*

$$\boxed{p(\lambda) = \det\left(A - \lambda \cdot I_n\right)}$$

sendo I_n a matriz identidade $n \times n$.

Exemplo 6.10 *Considere a matriz $A_{2\times 2}$:*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

O polinômio característico da matriz A será o determinante da matriz

$$\begin{aligned} A - \lambda\cdot I_2 &= \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ou seja,

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda\cdot I_2) \\ &= \begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2 & 8-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 \end{aligned}$$

$$\boxed{p(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 36}$$

Definição 6.7 (Autovalores)
Chamaremos de ***autovalores*** *de uma matriz* $A_{n\times n}$ *as raízes, caso existam, do polinômio característico da matriz, ou seja, as soluções da equação:*

$$\boxed{p(\lambda) = 0}$$

Exemplo 6.11 *Considere a matriz no exemplo anterior*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

com o seu polinômio característico dado por $p(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 36$. *Portanto os autovalores da matriz* A, *isto é, as raízes do polinômio* $p(\lambda)$ *são:* $\lambda_1 = 4$ *e* $\lambda_2 = 9$.

Definição 6.8 (Autovetor)
Chamaremos de ***autovetor*** *o vetor não nulo* $\vec{v}_\lambda$ *associado ao autovalor* λ *de uma matriz* $A_{n\times n}$*, a uma solução do seguinte sistema linear:*

$$\boxed{A\cdot X = \lambda\cdot X}$$

Sendo $X = [x_1\ x_2\ \cdots x_n]^t$ *a matriz coluna composta de* n *variáveis. A solução* X_0 *da equação matricial acima, nos dá as coordenadas do vetor* $\vec{v}_\lambda$ *em relação a uma base de* $\mathbb{R}^n$*.*

Exemplo 6.12 *Considere os autovalores* $\lambda_1 = 4$ *e* $\lambda_2 = 9$ *da matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

do exemplo anterior. Logo:

⋆ *Para o autovalor* $\boxed{\lambda_1 = 4}$, *teremos:*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = 4 \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} 4x \\ 4y \end{bmatrix}$$

Após a multiplicação das matrizes resulta no seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 4x \\ -2x + 8y = 4y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -2x + 4y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{x = 2y}$$

Obtendo os autovetores associados:

$$\vec{v}_{\lambda_1} = (2y, y)$$

com $y \neq 0$.

Logo, um autovetor unitário será dado por:

$$\boxed{\vec{v}_{\lambda_1} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}} \right)}$$

considerando $y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

⋆ *Para o autovalor* $\boxed{\lambda_2 = 9}$, *teremos:*

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = 9 \underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X} = \begin{bmatrix} 9x \\ 9y \end{bmatrix}$$

Após a multiplicação das matrizes resulta no seguinte sistema homogêneo:

$$\begin{cases} 5x - 2y = 9x \\ -2x + 8y = 9y \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} 4x - 2y = 0 \\ -2x - y = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \boxed{y = -2x}$$

Obtendo os autovetores associados:

$$\vec{v}_{\lambda_2} = (x, -2x)$$

com $x \neq 0$.

Logo, um autovetor unitário será dado por

$$\boxed{\vec{v}_{\lambda_2} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)}$$

considerando $x = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

6.3.2 *Classificando as Cônicas*

Para a classificação e esboço de uma cônica $\mathcal{C}$, devemos seguir os seguintes procedimentos:

1º Escrever a equação da cônica $\mathcal{C}$

$$\mathcal{C} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

na forma matricial:

$$\mathcal{C} : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + F = 0$$

2º Determinar os autovetores unitários $\vec{u}$ e $\vec{v}$ associados aos dois autovalores da matriz M, formada pelos termos quadráticos:

$$M = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

obtendo-se a direção dos novos eixos coordenados para a cônica $\mathcal{C}$;

3º Considerando os autovetores unitários $\vec{u} = (u_x, u_y)$ e $\vec{v} = (v_x, v_y)$ associados aos autovalores $\lambda_{\vec{u}}$ e $\lambda_{\vec{v}}$ respectivamente, definir as seguintes matrizes auxiliares:

$$M' = \begin{bmatrix} \lambda_{\vec{u}} & 0 \\ 0 & \lambda_{\vec{v}} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad P = \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix}$$

4º Escrever a nova equação da cônica $\mathcal{C}$ a partir da equação matricial, utilizando a mudança das variáveis x e y por X e Y, ou seja,

$$\mathcal{C} : \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \lambda_{\vec{u}} & 0 \\ 0 & \lambda_{\vec{v}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} D & E \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_x & v_x \\ u_y & v_y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + F = 0$$

5º Esboçar o gráfico da cônica $\mathcal{C}$ considerando os "novos" eixos dados pelos autovetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Proposição 6.1 *Considerando a cônica $\mathcal{C}$ definida pela equação*

$$\mathcal{C} : Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

com os autovalores λ_1 e λ_2 da matriz dos termos quadráticos

$$M = \begin{bmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{bmatrix}$$

então teremos $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = A \cdot C - B^2/4$ e

- ⋆ *Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, então a cônica é uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio;*
- ⋆ *Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, então a cônica é uma hipérbole ou um par de retas concorrentes;*
- ⋆ *Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 0$, temos duas possibilidades:*

  (1ª) $\lambda_1 \neq 0$ *ou* $\lambda_2 \neq 0$ *então a cônica é uma parábola, ou um par de retas paralelas ou uma reta ou o conjunto vazio;*

  (2ª) $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ *então a cônica é uma reta.*

Observação 6.3 *Só utilizaremos este método de classificação nos casos em que o coeficiente do termo misto for diferente de zero* ($B \neq 0$)*.*

Exemplo 6.13 *Para classificar e esboçar a cônica*

$$\mathcal{C}_1 : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 36 = 0$$

e como a equação possui o termo quadrático misto $B = -4$ *utilizaremos o procedimento via autovalores e autovetores, para determinar uma equação na forma reduzida em um novo sistema de eixos, ou seja:*

- *Completando a equação temos*

$$\mathcal{C}_1 : 5x^2 - 4xy + 8y^2 + 0x + 0y - 36 = 0$$

logo a equação na forma matricial será:

$$\mathcal{C}_1 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} - 36 = 0$$

- *Para determinar os autovetores unitários* $\vec{u}$ *e* $\vec{v}$ *da matriz dos termos quadráticos*

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

temos que determinar o polinômio característico, que é dado por:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 13\lambda + 36$$

com os autovalores da matriz sendo $\lambda_1 = 4$ *e* $\lambda_2 = 9$*, portanto com os autovetores unitários:*

$$\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad e \quad \vec{v} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

respectivamente (ver exemplos anteriores);

⋆ *Considerando as matrizes auxiliares:*

$$M' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

⋆ *Escrever a nova equação da cônica* $\mathcal{C}_1$ *a partir da equação matricial, utilizando a mudança das variáveis* x *e* y *por* X *e* Y*, ou seja,*

$$\mathcal{C}_1: \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} - 36 = 0$$

Obtemos a equação da cônica $\mathcal{C}_1$ *dada pela equação*

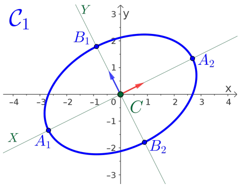
$$\mathcal{C}_1 : 4X^2 + 9Y^2 - 36 = 0$$

no novo sistema de eixos X *e* Y*, que após uma simples divisão, obtemos a cônica na forma reduzida:*

$$\boxed{\mathcal{C}_1 : \frac{X^2}{9} + \frac{Y^2}{4} = 1}$$

que é uma elipse com eixo focal paralelo ao eixo X*;*

⋆ *Gráfico da elipse* $\mathcal{C}_1$*:*



Exemplo 6.14 *Para classificar e esboçar a cônica*

$$\mathcal{C}_2 : 5x^2 - 4xy + 8y^2 + \frac{20}{\sqrt{5}}x - \frac{80}{\sqrt{5}}y + 4 = 0$$

e como a equação possui o termo quadrático misto $B = -4$ *utilizaremos o procedimento via autovalores e autovetores, para determinar uma equação na forma reduzida em um novo sistema de eixos, ou seja:*

- ⋆ *Observe que a equação* $\mathcal{C}_2$ *já está na forma completa, logo a equação na forma matricial será:*

$$\mathcal{C}_2 : \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + 4 = 0$$

- ⋆ *Como é a mesma matriz dos termos quadráticos do exemplo anterior, ou seja,*

$$M = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 8 \end{bmatrix}$$

os autovalores da matriz são $\lambda_1 = 4$ *e* $\lambda_2 = 9$, *portanto com os autovetores unitários:*

$$\vec{u} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \quad e \quad \vec{v} = \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$$

⋆ *Considerando as matrizes auxiliares:*

$$M' = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \quad e \quad P = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

⋆ *Escrever a nova equação da cônica* $\mathcal{C}_2$ *a partir da equação matricial, utilizando a mudança das variáveis* x *e* y *por* X *e* Y, *ou seja,*

$$\mathcal{C}_1 : \begin{bmatrix} X & Y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{20}{\sqrt{5}} & \frac{-80}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} X \\ Y \end{bmatrix} + 4 = 0$$

Obtemos a equação da cônica $\mathcal{C}_2$ *dada pela equação:*

$$\mathcal{C}_2 : 4X^2 + 9Y^2 - 8X - 36Y + 4 = 0$$

no novo sistema de eixos X *e* Y;

⋆ *Transformando a equação* $\mathcal{C}_2$ *e completando os quadrados, obtemos:*

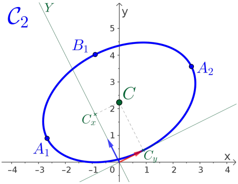
$$\mathcal{C}_2 : 4(X-1)^2 + 9(Y-2)^2 - 36 = 0$$

Após uma simples divisão, obtemos a cônica na forma reduzida:

$$\mathcal{C}_2 : \frac{(X-1)^2}{9} + \frac{(Y-2)^2}{4} = 1$$

que é uma elipse com eixo focal paralelo ao eixo X *e com centro é* $C_{XY} = (1, 2)$ *no sistema de eixos* X *e* Y.

⋆ *Gráfico da elipse* $\mathcal{C}_2$*:*



6.4 *Avaliando o que foi construído*

- Foram mostradas as quatro cônicas principais, com as suas respectivas equações vetoriais, reduzidas e paramétricas.

- Foram introduzidas noções básicas de autovalores e autovetores, como ferramentas utilizadas para a classificação de uma cônica que não está na sua forma reduzida, dando um roteiro de como, a partir de uma equação do segundo grau em duas variáveis que define uma cônica, achar novos eixos, de tal forma que a equação se reduza a uma forma conhecida.

- Todos os exemplos e exercícios propostos nas aulas terão um apelo ao visual e usando o Geogebra (`geogebra.org`).