MATEMÁTICA PARA O ENSINO BÁSICO IV

2º Período	Carga horária: 60 horas	Créditos: 04

Prof. Ms. José Elias dos Santos Filho
E-mail: elias@dcx.ufpb.br

Prof. Dr. Turíbio José Gomes dos Santos
E-mail: turibio@mat.ufpb.br

Ambiente Virtual de Aprendizagem: Moodle (www.ead.ufpb.br)
Site do Curso: www.mat.ufpb.br/ead
Site/UFPBVIRTUAL: www.virtual.ufpb.br
Telefone/UFPBVIRTUAL: (83) 3216 7257

EMENTA

Matrizes, Determinantes, Sistemas de Equações Lineares e Geometria Analítica.

DESCRIÇÃO

Nesta disciplina trabalharemos os conceitos de Matrizes, Sistemas Lineares, Determinantes e Geometria Analítica, conceitos estes já vistos no ensino médio. Usaremos uma metodologia que permita ao aluno analisar e interpretar criticamente as informações apresentadas.

Iniciaremos o conteúdo sempre baseados em uma situação-problema, devido ao fato de estarmos diariamente em contato com conceitos matemáticos, seja assistir ou ler um jornal, acompanhar a tabela do campeonato brasileiro de futebol, percorrer uma trilha ecológica com o auxilio de um GPS, entre outras situações.

A situação-problema é o ponto de partida e não uma definição. Desta forma o aluno é levado a pensar nos conceitos, nas idéias e nos métodos matemáticos que envolvem tais problemas, para que possa desenvolver algum tipo de estratégia na resolução de problemas.

O programa desta disciplina está dividido em cinco unidades. Iniciamos, na unidade I, pelo estudo das Matrizes enfatizando as operações básicas e suas propriedades, devido ao fato de estarmos freqüentemente em contato com tabelas e planilhas eletrônicas no nosso dia-a-dia e poucas situações-problemas que envolvam Sistemas Lineares. Na segunda unidade trataremos do estudo dos Sistemas Lineares, embora muitos autores do ensino médio apresentem este conteúdo após o estudo de Matrizes e Determinantes. Nesta segunda unidade enfatizaremos o método por escalonamento na resolução de Sistemas Lineares de qualquer ordem por considerarmos o método mais eficaz.

Julgamos ser mais oportuno apresentar o conteúdo de Determinantes na terceira unidade, pois esse conceito surge naturalmente pela necessidade de tornar mais prática a resolução de Sistemas Lineares. Nela, além de aprendermos a calcular o determinante de uma matriz quadrada de qualquer ordem, mostraremos que é possível, através do determinante, classificar um Sistema Linear de n equações e n incógnitas, bem como determinar se uma matriz quadrada possui inversa. Estudaremos também algumas de suas propriedades, buscando facilitar a resolução dos problemas propostos.

O estudo da Geometria Analítica será apresentado nas unidades IV e V. Na unidade IV dedicamos ao estudo do Ponto e da Reta. O estudo das cônicas (Circunferência, Parábola, Elipse e Hipérbole) está contemplado na unidade V, na qual apresentaremos alguns métodos práticos para construção de algumas cônicas.

OBJETIVOS

- Conhecer os conceitos apresentados sobre Matrizes, Sistemas Lineares, Determinantes e Geometria Analítica;
- Desenvolver habilidade na resolução de problemas dos conteúdos apresentados;
- Relacionar observações do mundo real com os conceitos matemáticos apresentados;
- Identificar e classificar as cônicas por meio de suas equações;
- Representar o problema “real” através do modelo matemático que corresponde a um sistema linear.

METODOLOGIA

A metodologia do curso dar-se-á a partir do método da Problematização dos temas realizada através de unidades assistidas por tutores no Moodle. O conteúdo do livro será apresentado no ambiente virtual, acompanhado de atividades de aprendizagem em que o aluno poderá se responsabilizar pelo desenvolvimento de sua própria aprendizagem, construindo a autonomia acadêmica. As atividades do Moodle deverão ser complementadas com pesquisas (bibliográfica, trabalho coletivo, consultas à internet e aos tutores).

PROCESSO DE AVALIAÇÃO

A avaliação desenvolver-se-á a partir da modalidade qualitativa de forma contínua em que o conjunto das atividades será somadas e ponderadas, considerando a participação de cada aluno no Moodle e a realização das atividades que desenvolverão conforme a programação das unidades. No decorrer do processo das aprendizagens a avaliação se processará a partir dos seguintes critérios:

- Logicidade na exposição das idéias ao participar das atividades no moodle;
- Participação nos debates e atividades do moodle;
- Execução e entrega dos exercícios no prazo estabelecido;
- Posicionamento crítico frente ao debate das temáticas.

Unidades Temáticas Integradas

Unidade 1 **Matrizes**

Conceito e Definições;
Matrizes Quadradas;
Matrizes Triangulares;
Matriz Identidade;
Igualdade de Matrizes;
Operações com Matrizes;
Matrizes Especiais.

Unidade 2 **Sistemas de Equações Lineares**

Definição de Sistemas Lineares;
Classificação de um Sistema Linear;
Resolução de um Sistema Linear.

Unidade 3 **Determinantes**

Conceitos e Definições;
Menor Complementar;
Cofator;
Teorema de Laplace;
Propriedades dos Determinantes;
Aplicações do Determinante.

Unidade 4 **Geometria Analítica I: Estudo do Ponto e da Reta**

Cálculo da Distância entre dois Pontos;
Coordenadas do Ponto Médio;
Equações da Reta;
Posições Relativas entre duas Retas;
Estudo Complementar da Reta.

Unidade 5 **Geometria Analítica II: Estudo das Cônicas**

Circunferência;
Posição de um Ponto em Relação a uma Circunferência;
Posições Relativas entre Reta e Circunferência;
Posições Relativas entre duas Circunferências.
Parábola;
Elipse;
Hipérbole.

Unidade 1

Matrizes

1 Situando a Temática

Nesta unidade faremos um estudo através de situações-problemas, onde construiremos e apresentaremos os conceitos sobre matrizes, necessários para podermos fazer operações com matrizes, com a finalidade de apresentar soluções para os problemas propostos. Por exemplo, ao acompanharmos o Campeonato Brasileiro de Futebol lidamos com a tabela dos jogos que é atualizada a cada rodada, como também problemas que utilizam tabelas do tipo de fabricação de peças para caminhão ou mesmo de material para venda em uma loja, ou seja, nossos alunos estão constantemente em contato com o conceito de matriz. Mas a finalidade é apresentar soluções para os mais variados problemas propostos.

2 Problematizando a Temática

No nosso dia-a-dia vemos freqüentemente em jornais e revistas a presença de tabelas relativas aos mais variados assuntos, apresentando números dispostos em linhas e colunas. Desta forma as matrizes constituem um importante instrumento de cálculo com aplicações em Matemática, Engenharia, Administração, Economia e outras ciências.

Observe por exemplo a seguinte situação:

Para a fabricação de caminhões, uma indústria montadora precisa de eixos e rodas para seus três modelos de caminhões, com as seguintes especificações:

Componentes/Modelos	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Tabela I

Para os três primeiros meses do ano, a meta de produção da fábrica deverá seguir a tabela abaixo:

Modelo/ Meses	Jan	Fev	Mar
A	30	20	25
B	25	18	20
C	20	15	10

Tabela II

Aqui, utilizaremos o estudo sobre matrizes para descobrir quantos eixos e rodas são necessários, em cada um dos meses, para que a montadora atinja a meta de produção planejada.

3 Conhecendo a Temática

3.1 Conceito e Definições

Chamamos de matriz $m \times n$ (lê-se m por n) com $m,n \in \mathbb{N}^*$ qualquer tabela de números dispostos em m linhas e n colunas. Tal tabela será representada entre parênteses $(\ )$, entre colchetes $[\ ]$ ou entre barras duplas $\|\ \|$.

Exemplos 1: De acordo com a tabela I, descrita anteriormente, podemos construir uma matriz M do tipo 2×3 da forma

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}.$$

Analogamente, utilizando a tabela II temos a seguinte matriz

$$N = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

que representa uma matriz do tipo 3×3. Observe que a meta de produção de cada modelo no mês fevereiro está representada na segunda coluna. O elemento posicionado na terceira linha e primeira coluna da matriz N, a_{31} indica que a meta de produção do modelo C no mês de janeiro é de 20 unidades.

Representação de uma matriz *M* do tipo $m \times n$:

$$M_{mxn} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ ou } M = \left[a_{ij}\right]_{mxn} \text{ com } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Tipos de matrizes:

I) Quando uma matriz possuir um única linha, ela recebe o nome de matriz linha.

II) Quando uma matriz possuir uma única coluna, ela recebe o nome de matriz coluna.

III) Quando todos os elementos a_{ij} da matriz são iguais a zero, ela recebe o nome de matriz nula.

Algumas matrizes recebem nomes especiais devido às suas características específicas como a matriz linha e a matriz coluna, já vistas. A seguir veremos algumas dessas matrizes.

3.2 Matrizes Quadradas

Quando em uma matriz $M = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ tivermos $m = n$, diz-se que a matriz é uma matriz quadrada de ordem n.

Exemplo 2: No exemplo anterior vemos que a matriz $N = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$ é uma matriz quadrada de ordem 3.

Numa matriz quadrada $M = \left[a_{ij}\right]_{nxn}$, os elementos a_{ij} tais que $i = j$ formam a diagonal principal da matriz, e os elementos a_{ij} tais que $i + j = n + 1$ formam a diagonal secundária, onde *n é a ordem da matriz*..

Desta forma temos o seguinte exemplo:

Elementos da Diagonal principal: $a_{11} = 30,\ a_{22} = 18,\ a_{33} = 10$
Elementos da Diagonal secundária: $a_{13} = 25,\ a_{22} = 18,\ a_{31} = 20$

$$N = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$$

Diagonal secundária **Diagonal principal**

3.3 Matrizes Triangulares

Quando em uma matriz quadrada de ordem n, tivermos todos os elementos acima ou abaixo da diagonal principal nulos, dizemos que a matriz é triangular.

Desta forma, em uma matriz triangular, $a_{ij} = 0$ para $i > j$ ou $a_{ij} = 0$ para $i < j$.

Atenção

Caso os elementos a_{ij} de uma matriz triangular sejam tais que $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, tal matriz é chamada de matriz diagonal.

Exemplo 3:

I) As matrizes $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 5 & -2 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $D = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ são exemplos de matrizes triangulares de ordem 3

3.4 Matriz Identidade

Uma matriz quadrada de ordem *n* em que todos os elementos da diagonal principal são iguais a 1 e os demais são nulos, ou seja, $a_{ij} = 1$ se $i = j$ e $a_{ij} = 0$ para $i \neq j$, é denominada matriz identidade e será representada por I_n.

$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a matriz identidade de ordem 4.

3.5 Igualdade de Matrizes

Dadas duas matrizes de mesmo tipo, $M = \left[a_{ij}\right]_{mx\,n}$ e $N = \left[b_{ij}\right]_{mx\,n}$, dizemos que $M = N$ se, e somente se, $a_{ij} = b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Praticando para Aprender

Exercício 1:Escreva cada matriz $\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ de acordo com a lei de formação dos elementos a_{ij} em cada caso.

$a)\, A = \left[a_{ij}\right]_{3\times 2};\ a_{ij} = 2i - j \qquad b)\, B = \left[b_{ij}\right]_{2\times 4};\ b_{ij} = i + 3j$

$c)\, C = \left[c_{ij}\right]_{3\times 3};\ c_{ij} = -3i + 2j \qquad d)\, D = \left[d_{ij}\right]_{3\times 2};\ d_{ij} = \begin{cases} 2i + j, & se\ i = j \\ 0, & se\ i \neq j \end{cases}$

Exercício 2: Dê exemplos de matrizes de acordo com cada item abaixo:

a) matrizes quadrada de ordem 3, 5 e 7.

b) matrizes triangulares superiores de ordem 4.

c) matrizes triangulares inferiores de ordem 5.

d) matrizes diagonais de ordem 2, 4 e 5.

e) matrizes diagonais de ordem 2, 3 e 4.

3) Julgue cada afirmação verdadeira (V) ou falsa (F).

a)Toda matriz quadrada nula é triangular.

b) A matriz identidade é um exemplo de matriz diagonal.

c) Toda matriz quadrada é triangular superior.

No Moodle

Acesse a plataforma e você encontrará uma lição denominada: Estudando as Matrizes. Acesse a plataforma e faça a PARTE 01 da sua lição e você encontrará vídeos aula e exercícios resolvidos sobre o conteúdo visto até esse momento.

3.6 Operações com Matrizes

Uma empresa especializada em calçados é formada por duas lojas A e B. Realizado um estudo sobre a aceitação de dois novos modelos de calçados nos quatro primeiros dias de dezembro, foram obtidos os resultados representados nas seguintes tabelas:

Quantidade Vendida na Loja A				
	1º Dia	2º Dia	3º Dia	4º Dia
Modelo 1	2	3	1	5
Modelo 2	1	2	5	3

Tabela I

Quantidade Vendida na Loja B				
	1º Dia	2º Dia	3º Dia	4º Dia
Modelo 1	3	0	2	3
Modelo 2	4	2	4	5

Tabela II

Como já foi visto anteriormente, as tabelas acima podem ser representadas pelas respectivas matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2x4} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2x4}.$$

Note que a matriz A acima descreve o desempenho da loja A, de modo que cada elemento a_{ij} é o número de unidades vendidas do modelo i no dia j; por exemplo, o elemento $a_{23} = 5$ informa que foram vendidas cinco unidades do modelo 2 no 3º dia.

Sabendo que o modelo 1 é vendido por R$ 62,00 e o modelo 2 por R$65,00, que poderíamos representar pela matriz $P = \begin{bmatrix} 62 & 65 \end{bmatrix}_{1x2}$. Como representaríamos matricialmente, a quantidade faturada diariamente pela empresa na venda dos modelos de calçados em estudo?

3.6.1 Adição de Matrizes

Definição: A soma de duas matrizes do mesmo tipo $A = \left[a_{ij}\right]_{mxn}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{mxn}$, que se indica por $A + B$ é a matriz $C = \left[c_{ij}\right]_{mxn}$ tal que $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ para todo $1 \leq i \leq m$ e $1 \leq j \leq n$.

Exemplo 4: Considerando as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2x4} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2x4}$,

obtidas do problema proposto anteriormente, temos que:

$$C = A + B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

Note que, através da soma das matrizes $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 3\end{bmatrix}_{2x4}$ e $B=\begin{bmatrix}3 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 4 & 5\end{bmatrix}_{2x4}$ obtemos a matriz $C=\begin{bmatrix}5 & 3 & 3 & 8\\ 5 & 4 & 9 & 8\end{bmatrix}$ que descreve o desempenho das duas lojas da empresa na venda dos dois modelos de calçados. Desta forma, por exemplo, o elemento $c_{23}=9$ informa que foram vendidas nove unidades do modelo 2 no 3º dia.

3.6.1.1 Propriedades da Adição de Matrizes

Sendo A, B e C matrizes do mesmo tipo, é possível verificar que as seguintes propriedades são válidas.

I) Comutatividade: ***A* + *B* = *B* + *A***.

II) Associatividade: ***(A + B) + C= A + (B + C)***.

III) Elemento Neutro: ***A + 0 = 0 + A = A***, em que ***0*** representa a matriz nula do mesmo tipo que ***A***.

IV) Elemento Oposto: Para toda matriz ***A*** existe a matriz oposta, denominada ***–A***, tal que

A + (–A) = (–A) + A = 0, onde ***0*** (zero) é a matriz nula

Observações importantes para você

I) A matriz oposta de uma matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$ é a matriz $-A=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ tal que $b_{ij}=-a_{ij}$ com $1\le i\le m$ e $1\le j\le n$.

II) Denomina-se diferença entre as matrizes do mesmo tipo *A* e *B*, e representada por *A – B*, como sendo a soma da matriz *A* pela matriz oposta de *B*, ou seja, *A – B = A + (–B)*.

3.6.2 Multiplicação de um Número por uma Matriz

Definição: O produto de um número k por uma matriz $A=\left[a_{ij}\right]_{m\times n}$, que se indica por kA, é a matriz $B=\left[b_{ij}\right]_{m\times n}$ tal que $b_{ij}=ka_{ij}$ com $1\le i\le m$ e $1\le j\le n$.

Exemplo 5: Sabemos que $C=A+B=\begin{bmatrix}2 & 3 & 1 & 5\\ 1 & 2 & 5 & 3\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}3 & 0 & 2 & 3\\ 4 & 2 & 4 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & 3 & 3 & 8\\ 5 & 4 & 9 & 8\end{bmatrix}$. Note que, $2C=\begin{bmatrix}10 & 6 & 6 & 16\\ 10 & 8 & 18 & 16\end{bmatrix}$ que nada mais é do que a soma $2A+2B$ (verifique você mesmo), ou seja, $2C=2(A+B)=2A+2B$ que nada mais é do que umas das propriedades da multiplicação de um número por uma matriz, como veremos abaixo.

3.6.2.1 Propriedades da Multiplicação de um Número por uma Matriz

Sendo A e B matrizes do mesmo tipo $m \times n$, com α e β números reais, temos as seguintes propriedades:

$$I)\ (\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A; \qquad II)\ \alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B;$$
$$IIII)\ \alpha(\beta A) = (\alpha.\beta)A; \qquad IV)\ 1.A = A \ \ e \ \ (-1).A = -A.$$

3.6.3 Multiplicação entre Duas Matrizes

A multiplicação de matrizes não é uma operação tão simples como as outras já estudadas. Vamos introduzi-la por meio do problema proposto nesta unidade.

No início da seção 3.6, obtivemos as seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \end{bmatrix}_{2\times 4} \quad e \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 4 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 4}.$$

Através da soma entre as matrizes A e B obtemos a matriz $C = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 3 & 8 \\ 5 & 4 & 9 & 8 \end{bmatrix}$ (ver exemplo 4), a qual representa o desempenho das duas lojas da empresa na venda dos dois modelos de calçados. A matriz $P = \begin{bmatrix} 62 & 65 \end{bmatrix}_{1\times 2}$ nos diz que o modelo 1 é vendido por R$62,00 enquanto o modelo 2 é vendido por R$65,00.

Sabemos que o faturamento na venda de certo produto é dado pela multiplicação entre o preço e a quantidade vendida. Observe que, pela matriz C, no primeiro dia foram vendidas 5 unidades do modelo 1 e 5 unidades do modelo 2 e desta forma podemos afirmar que no primeiro dia a empresa obteve um faturamento de 62•5 + 65•5 = 635 reais na venda dos dois novos modelos de calçados.

Desta forma utilizando este raciocínio, obteremos a matriz

$$F = [62\cdot 5 + 65\cdot 5 \quad 62\cdot 3 + 65\cdot 4 \quad 62\cdot 3 + 65\cdot 9 \quad 62\cdot 8 + 65\cdot 8] = [635 \quad 446 \quad 771 \quad 1.016]$$

que representa o faturamento diário com a venda dos dois modelos de calçados pela empresa, apresentado pela tabela

Faturamento com os modelos 1 e 2 de calçados em Dezembro.				
Dia	1º	2º	3º	4º
Valor (R$)	635,00	446,00	771,00	1.016,00

Esse problema sugere como deve ser feita a multiplicação de matrizes. Observe a relação que existe entre as ordens das matrizes P_{1x2} . $C_{2x4} = F_{1x4}$.

Vejamos agora a definição matemática da multiplicação de matrizes:

Definição: Dadas as matrizes $M = \left[a_{ij}\right]_{m\times p}$ e $N = \left[b_{ij}\right]_{p\times n}$, o produto de M por N é a matriz $M.N = \left[c_{ij}\right]_{m\times n}$, tal que o elemento c_{ij} é calculado multiplicando-se ordenadamente os elementos da linha i, da matriz M, pelos elementos da coluna j, da matriz N, e somando-se os produtos obtidos.

Observação importante para você

Note que só definimos o produto $M.N$ de duas matrizes quando o número de colunas de $M_{m\times p}$, que é p, for igual ao número de linhas de $N_{p\times n}$, que também é p. Além disso, note ainda que o produto $M.N$ é uma matriz do tipo $m\times n$, ou seja, possui o número de linhas de $M_{m\times p}$ e o número de colunas de $N_{p\times n}$.

Exemplo 6: Dada as matrizes $M_{2\times3} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$ e $N_{3\times3} = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$, determinar a matriz $M.N = \left[c_{ij}\right]_{2\times3}$.

Primeiramente vemos que $M_{2\times3}$ é uma matriz 2×3 e $N_{3\times3}$ é uma matriz 3×3 e assim o número de colunas de $M_{2\times3}$ é igual ao número de linhas de $N_{3\times3}$. Portanto o produto $M.N$ é possível e será uma matriz 2×3.

Logo, $M.N = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 30 & 20 & 25 \\ 25 & 18 & 20 \\ 20 & 15 & 10 \end{bmatrix}$

Tem-se assim:

c_{11}: usa-se a 1º linha de *M* e a 1º coluna de *N* 2·30 + 3·25 + 4·20 = 215	c_{12}: usa-se a 1º linha de *M* e a 2º coluna de *N* 2·20 + 3·18 + 4·15 = 174	c_{13}: usa-se a 1º linha de *M* e a 3º coluna de *N* 2·25 + 3·20 + 4·10 = 150
c_{21}: usa-se a 2º linha de *M* e a 1º coluna de *N* 4·30 + 6·25 + 8·20 = 430	c_{22}: usa-se a 2º linha de *M* e a 2º coluna de *N* 4.20+6.18+8.15 = 308	c_{23}: usa-se a 2º linha de *M* e a 3º coluna de *N* 4·25 + 6·20 + 8·10 = 300

Desta forma obtemos $M.N = \begin{bmatrix} 215 & 174 & 150 \\ 430 & 308 & 300 \end{bmatrix}$.

No início da unidade I, seção 2, descrevemos o problema de uma indústria montadora de caminhões, cujo objetivo é responder a seguinte questão: quantos eixos e rodas a montadora deve encomendar em cada um dos meses, para atingir a meta estabelecida?

O problema apresentava as seguintes tabelas

Componentes/Modelos	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

Tabela I

Modelo/ Meses	Jan	Fev	Mar
A	30	20	25
B	25	18	20
C	20	15	10

Tabela II

as quais representamos pelas matrizes $M_{2\times3}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 4\\ 4 & 6 & 8\end{bmatrix}$ e $N_{3\times3}=\begin{bmatrix}30 & 20 & 25\\ 25 & 18 & 20\\ 20 & 15 & 10\end{bmatrix}$.

Realizando o produto $M.N$ e obtemos a matriz $M.N=\begin{bmatrix}215 & 174 & 150\\ 430 & 308 & 300\end{bmatrix}$ que representa a seguinte tabela:

Peças/Mês	Jan	Fev	Mar
Eixos	215	174	150
Rodas	430	308	300

3.6.3.1 Propriedades da Multiplicação entre Duas Matrizes

Verificadas as condições de existência para a multiplicação de matrizes, são válidas as seguintes propriedades:

I) Associatividade: ***(M·N) ·P = M·(N·P)***

II) Distributiva em relação a soma: ***M·(N + P) = M·N + M·P* e *(M + N) ·P = M·P + N·P***

III) Elemento Neutro: ***M·I$_n$ = I$_n$·M = M*** onde ***I$_n$*** é a matriz identidade de ordem *n*.

Observações importantes para você

(I) Não é válida a propriedade Comutativa, pois, em geral $M.N \neq N.M$ ou até pode existir $M.N$ e não existir $N.M$. Por exemplo, se $M_{2\times3}$ for 2×3 e $N_{3\times4}$ for 3×4 existe o produto $[M]_{2\times3}.[N]_{3\times4}=[P]_{2\times4}$ que será uma nova matriz 2×4, no entanto não existe o produto $[N]_{3\times4}.[M]_{2\times3}$.

(II) Não é válida a propriedade do cancelamento, isto é, se $M, N\ e\ P$ são matrizes tais que $M.N=M.P$, não podemos garantir que $N=P$.

(III) Não é válida a propriedade do anulamento, isto é, se $M_{m\times p}$ e $N_{p\times n}$ são matrizes tais que $M_{m\times p}.N_{p\times n}=0_{m\times n}$ não podemos garantir que uma delas *(M ou N)* seja a matriz nula.

3.7 Algumas Matrizes Especiais

3.7.1 Matriz Transposta

Definição: Seja M uma matriz $m \times n$. Chamamos de matriz transposta de M, e denotamos por M^t, a matriz $n \times m$ cujas linhas são, ordenadamente, as colunas de M.

Considere a seguinte tabela:

Componentes/Modelos	A	B	C
Eixos	2	3	4
Rodas	4	6	8

$$Matriz\ associada: \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 6 & 8 \end{bmatrix}_{2\times 3}$$

Se transformarmos as linhas dessa tabela em colunas e as colunas em linhas obtemos uma nova tabela dada por:

Modelos/Componentes	Eixo	Rodas
A	2	4
B	3	6
C	4	8

$$Matriz\ associada: \quad M^t = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}_{3\times 2}$$

Observe que as informações dadas por ambas as tabelas não se modificam, no entanto a representação matricial de cada uma das tabelas são matrizes diferentes.

3.7.1.1 Propriedades da Matriz Transposta

Seja M uma matriz $m \times n$.

$(I)\left(M^t\right)^t = M;$ $\qquad (II)\left(k.M\right)^t = k.M^t,\ onde\ k \in IR;$

$(III)\left(M+N\right)^t = M^t + N^t;$ $\qquad (IV)\left(M.N\right)^t = N^t.M^t.$

3.7.1.2 Matriz Simétrica

Definição : Dada uma matriz quadrada M de ordem n, dizemos que M é uma matriz simétrica se, e somente se, $M = M^t$.

Exemplo 7: Observe que a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & -2 & 5 \end{bmatrix}$ é tal que $M = M^t$, logo M é uma matriz simétrica.

3.7.1.2 Matriz Inversa

Definição : Dada uma matriz quadrada M de ordem n, se existir uma matriz X, de mesma ordem, tal que $M.X = X.M = I_n$, então X é denominada matriz inversa de M e é denotada por M^{-1}.

Exemplo 8: Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ é a matriz $X = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$. Note que, $M.X = X.M = I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Portanto, a matriz inversa M^{-1}, de M, é a matriz $M^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 \\ -1 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Observação importante para você

Quando existir a matriz inversa de *M*, dizemos que *M* é invertível ou não singular. A existência ou não da matriz inversa e sua determinação, quando existir, será estudada e analisada nas unidades posteriores.

No Moodle

Acesse a plataforma e você encontrará uma lição denominada: Estudando as Matrizes. Acesse a plataforma e você encontrará uma Lição sobre o Estudo das Matrizes e lá você encontrará vídeos aula e exercícios resolvidos sobre o conteúdo visto até esse momento.

Praticando para Aprender

Exercício 3: Uma matriz possui 50 elementos, e a quantidade de colunas é o dobro da quantidade de linhas. Qual é a ordem dessa matriz?

Exercício 4: Na matriz $C = \begin{bmatrix} 0{,}9 & 0{,}8 & 1{,}1 \\ 5 & 7 & 8 \end{bmatrix}$, a 1ª linha indica a quantidade de tecido (em metros quadrados), e a 2ª linha indica a quantidade de botões utilizados na confecção de 3 modelos de camisa, correspondentes a cada uma das colunas. Escreva a matriz que indica a quantidade necessária desses materiais para a confecção de 18 camisas de cada modelo.

Exercício 5: Sejam as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{3\times 2}$ e $B = \left[b_{ij}\right]_{m\times 4}$.

a) Determine o valor de m para que exista o produto $A.B$.

b) Considerando o valor de m obtido no item (a), qual é a ordem da matriz $C = A.B$?

Exercício 6: Considere as matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$, onde $a_{ij} = 2i - j$, $B = \left[b_{ij}\right]_{2\times 3}$, onde $b_{ij} = i + 3j$, $C = \left[c_{ij}\right]_{3\times 3}$, onde $c_{ij} = 2i - 3j$ e $D = \left[c_{ij}\right]_{3\times 4}$, onde $d_{ij} = \begin{cases} i + j,\ se\ i = j \\ i - j,\ se\ i \neq j \end{cases}$.

a) Descreva cada uma das matrizes $A = \left[a_{ij}\right]_{2\times 3}$, $B = \left[b_{ij}\right]_{2\times 3}$, $C = \left[c_{ij}\right]_{3\times 3}$ e $D = \left[c_{ij}\right]_{3\times 4}$.

b) Determine as matrizes $2A - B$, $2(A + B)$ e $B - A$.

c) Determine os produtos $A.B$, $B.C$, $A.C$ e $C.D$.

Exercício 7: Dada as matrizes $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$, mostre que . $M.N \neq N.M$.

Exercício 8: Dadas as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ e $P = \begin{bmatrix} 11 & 2 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$. Mostre que $M.N = M.P$ mesmo que sabendo que $N \neq P$.

Exercício 9: Dada as matrizes $M = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ e $N = \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$, Mostre que $M.N$ é a matriz nula $0_{2\times 2}$, mesmo que sabendo que $M \neq 0$ e que $N \neq 0$.

Exercício 10: Sendo $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 7 & -1 \end{bmatrix}$ determine a matriz X tal que a igualdade $A - 3B + X = \begin{bmatrix} 3 & -8 \\ -14 & 5 \end{bmatrix}$.

No Moodle

Acesse a plataforma e você encontrará um fórum de discussão sobre o conteúdo estudado e assim você poderá tirar suas dúvidas bem como contribuir com os colegas do curso sobre o conteúdo estudado até agora. Participe e dê sua contribuição.

4 Avaliando o que foi Construído

Nesta Unidade tivemos a oportunidade de apresentar o conceito de matrizes por meio de algumas situações problemas. Conhecemos e discutimos ainda algumas matrizes especiais bem como realizamos operações com as mesmas.

Através da Lição e dos exercícios disponibilizados na plataforma Moodle, tivemos oportunidade não só de resolver problemas, mas discutir ideias nos fóruns disponíveis na plataforma para que possam ser utilizadas em sala de aula.

Resumo da Unidade 1

Pontos que eu considero importantes:

- ✓ ____
  ____
- ✓ ____
  ____
- ✓ ____
  ____

Ideias que posso aplicar nos meus estudos	O que eu não posso esquecer!!
	•
	•
	•
Ideias que posso aplicar no meu trabalho	•
	•
	•
	•

Minha Agenda

Atividades no Moodle	Data de encerramento

Unidade 2

Sistemas de Equações Lineares

1 Situando a Temática

Sistema de Equações Lineares é um tema que tem aplicações dentro de muitas áreas do conhecimento, além da matemática. Para a resolução dos sistemas, apresentaremos algumas técnicas, como por exemplo, para sistemas lineares de ordem 2×2 ou 3×3, a regra de Cramer, que exige o conhecimento prévio de determinantes, será trabalhada na próxima unidade que trata do estudo dos determinantes.

Muitos autores apresentam o conteúdo sobre determinante de uma matriz antes de discutir sistemas lineares devido ao fato, ao nosso ver, de que muitos problemas que envolvem sistemas lineares no Ensino Médio são equacionados através de sistemas lineares com no máximo três equações e três variáveis ou incógnitas. Desta forma, muitos alunos ficam condicionados a trabalhar apenas sistemas 2×2 ou 3×3 e assim muitos apresentam dificuldades na resolução de problemas de sistemas lineares nos quais o número de incógnitas é diferente do número de equações. Para sanar essas dificuldades, ou seja, resolver tais sistemas, iremos apresentar um método denominado de Escalonamento de Matrizes.

2 Problematizando a Temática

Inicialmente iremos recorrer a um exemplo prático para mostrar o quanto são freqüentes, em nosso dia-a-dia, os sistemas de equações. Os mais comuns são os sistemas de equações lineares do 1º grau que ilustraremos com o seguinte problema:

Antes de assumir o caixa em um supermercado, Maria recebe de seu gerente uma sacola contendo moedas, onde está indicado que existem 250 moedas no valor de R$40,00. Ao abrir a sacola ela percebe que existem moedas de 25 centavos e de 10 centavos. Quantas moedas de cada espécie Maria recebeu de seu gerente?

Tal problema pode ser representado pelo sistema de equações do 1º grau

$$\begin{cases} x+y=250 \\ 0,25x+0,10y=40 \end{cases}$$

onde *x* e *y* são, respectivamente, as quantidades de moedas de 25 centavos e de 10 centavos.

Para um estudo geral de sistemas de equações lineares, necessitamos de algumas noções preliminares.

3 Conhecendo a Temática

3.1 Definições e Notação de Sistemas Lineares

Definição: Chama-se equação linear nas variáveis ou incógnitas $x_1, x_2, \cdots, x_n$ toda equação sob a forma:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

em que $a_1, a_2, \cdots, a_n, b$ são constantes reais.

Observações importantes para você

I) As constantes $a_1, a_2, \cdots, a_n$ são chamadas de coeficientes enquanto a constante b é denominada termo independente.

II) Se $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0$, denominaremos como equação homogênea.

Definição: Um sistema **S** de equações lineares, ou simplesmente sistema linear $m \times n$, é um conjunto de m equações com n variáveis é denotado na forma:

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}.$$

Lembrando-se da definição de produto de matrizes, notamos que o sistema linear *S* pode ser escrito na forma matricial $C.X = B$, veja:

$$S:\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

A matriz $C = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$ é chamada matriz principal do sistema e é

formada pelos coeficientes das variáveis do sistema linear *S.*

O sistema *S* também pode ser representado pela matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & | \, b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & | \, b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & | \, \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & | \, b_m \end{bmatrix}$$

denominada matriz ampliada do sistema *S.*

Exemplo 1: Uma herança de R$134.000,00 deve ser repartida entre três herdeiros, de maneira que o 1º receba mais R$40.000,00 do que o 2º, e este, mais R$ 20.000,00 do que o 3º. Qual a quota de cada herdeiro?

Resolução: Seja x, y e z, respectivamente, o valor da quota que cada herdeiro deve receber.

Como o total da herança é de R$134.000,00 então $x + y + z = 134.000$, enquanto que $x = y + 40.000$ e $y = z + 20.000$.

Desta forma temos um sistema linear $(*)\begin{cases} x + y + z = 134.000 \\ x - y = 40.000 \\ y - z = 20.000 \end{cases}$ que é um sistema 3×3, que pode ser representada da forma $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 134.000 \\ 40.000 \\ 20.000 \end{bmatrix}$ ou pela sua matriz ampliada $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & |134.000 \\ 1 & -1 & 0 & | \, 40.000 \\ 0 & 1 & -1 & | \, 20.000 \end{bmatrix}$.

Nosso objetivo é apresentar uma solução aos problemas apresentados e assim passamos a um estudo mais detalhado de um sistema linear.

Definição: Dado um sistema de equações lineares

$$S : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + \ a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad\qquad \vdots & \ \ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

dizemos que $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in IR$ é solução desse sistema quando $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ é solução de cada uma das equações do sistema.

Para ilustrar apresentaremos um sistema linear 2×2, utilizando dois métodos, tais como: Método de Adição e Método de Substituição.

Exemplo 2: Considere o sistema linear $2\times 2,$ dado por $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$. Vamos determinar uma solução para esse sistema utilizando dois métodos diferentes.

1º- Método da Adição: Somando-se membro a membro as duas equações, obteremos $3x=3$. Logo, $x=1$. Agora, substituindo o valor de $x=1$ em qualquer equação, encontraremos $y=2$. Portanto, a solução do sistema será dada por $x=1$ e $y=2$.

2º- Método da Substituição: Escolhendo a equação $x+y=3$ temos que $y=3-x$. Agora, substituindo o valor de $y=3-x$ na outra equação teremos, $2x-(3-x)=0$ o que nos dá $2x-3+x=0$ e resolvendo essa equação obtemos $x=1$ e substituindo o valor de $x=1$ na equação $y=3-x$, nos dará $y=2$. Portanto, a solução será dada por $x=1$ e $y=2$.

3.2 Classificação de um Sistema Linear

Um sistema linear é classificado de acordo com o número de soluções. Desta forma um sistema linear pode ser:

i) **SPD**- Sistema Possível e Determinado, ou seja, admite uma única solução;

ii) **SPI**- Sistema Possível e Indeterminado, ou seja, admite mais de uma solução;

iii) **SI**- Sistema Impossível, ou seja, não admite solução alguma.

Para ilustrar melhor a classificação de um sistema linear resolveremos alguns exemplos. Você com certeza já resolveu algum sistema linear 2×2 utilizando alguns métodos tais como adição e substituição. Reveja o exemplo 2 e observe a resolução do sistema $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{cases}$.

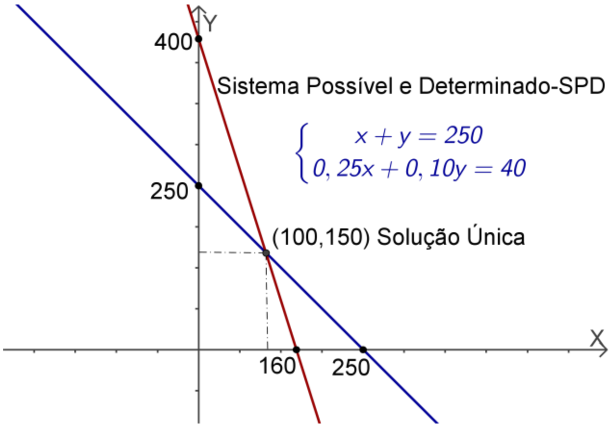
Exemplo 3: Vamos retornar ao problema das moedas no caixa de Maria. (Reveja seção 2)

Chegamos ao seguinte sistema linear $\begin{cases} x+y=250 & (I) \\ 0,25x+0,10y=40 & (II) \end{cases}$.

Isolando a variável x pela equação (I), temos que $x=250-y$ e substituindo em (II) teremos $0,25(250-y)+0,10y=40$, o que nos dá $y=150$. Pela equação (I), teremos $x=100$.

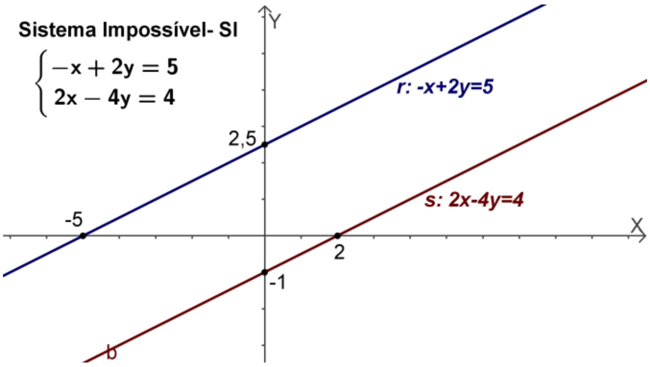
Portanto, (100,150) é o único par que é solução do sistema e assim dizemos que esse sistema é um sistema SPD- Sistema Possível e Determinado cuja solução é $x=100$ e $y=150$.

A seguir veremos uma ilustração geométrica do sistema estudado nesse exemplo e que ilustrará a representação geométrica de um sistema **SPD**-Sistema Possível e Determinado.



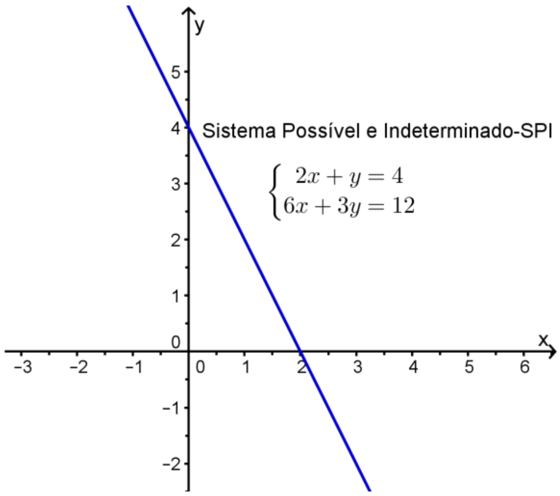
Exemplo 4: Observe a representação geométrica das seguintes retas:

$$r: -x+2y=5 \;\; e \;\; s: 2x-4y=4.$$



Como as retas ***r*** e ***s*** são paralelas, o sistema $\begin{cases} -x+2y=5 \\ 2x-4y=4 \end{cases}$ não possui nenhuma solução e assim dizemos que ele é um sistema **SI**- Sistema Impossível.

Exemplo 5: O sistema $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 6x+3y=12 \end{cases}$ possui infinitas soluções. Note que se dividirmos a segunda equação por 3 obteremos o sistema $\begin{cases} 2x+y=4 \\ 2x+y=4 \end{cases}$, ou seja, termos apenas a equação $2x+y=4$ e assim, obtemos soluções da forma $y=4-2x$ e $x\in\mathbb{R}$. Note que as duas retas $r: 2x+y=4$ e $s: 6x+3y=12$ são coincidentes e assim teremos infinitos pontos em comum. Portanto, esse sistema é **SPI**- Sistema Possível e Indeterminado.



Observação importante para você

Note que o sistema linear homogêneo

$$S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

possui pelo menos a solução nula, ou seja, $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. Desta forma **todo sistema homogêneo** é um sistema possível, podendo ser determinado(SPD) ou indeterminado(SPI).

No Moodle

Acesse a plataforma e você encontrará uma lição denominada: Estudando Sistemas Lineares. Acesse a plataforma e faça a PARTE 01 e 02 da sua lição e você encontrará vídeos aula e exercícios resolvidos sobre o conteúdo visto até esse momento.

3.3 Resolução de um Sistema Linear via Escalonamento

Resolver um sistema linear significa obter o conjunto solução do sistema. Dentre os vários métodos existentes para a resolução de um sistema, veremos inicialmente o método de resolução por escalonamento.

Método por escalonamento é considerado por muitos como sendo um processo longo e trabalhoso, o qual exige muita concentração e dedicação por parte dos alunos, bem como paciência e planejamento dos professores. No entanto, todos concordam que o método por escalonamento é o único que é capaz de resolver qualquer sistema linear, diferentemente de outros métodos considerados mais simples, os quais teremos a oportunidade de discutir posteriormente.

3.3.1 Sistemas Equivalentes

Definição: Dois sistemas lineares S_1 e S_2 são ditos equivalentes se, e somente se, admitem o mesmo conjunto solução.

Exemplo 6: Os sistemas lineares $S_1:\begin{cases} 3x+6y=42 \\ 2x-4y=12 \end{cases}$ e $S_2:\begin{cases} x+2y=14 \\ x-2y=6 \end{cases}$ são equivalentes porque admitem a mesma solução, a saber $x=10$ e $y=2$. Observe que, se multiplicarmos a 1º linha do sistema S_1 por 1/3 e a 2º linha por 1/2, teremos o sistema linear S_2.

3.3.2 Resolução Via Escalonamento do Sistema Linear

Definição: Um sistema linear $S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ é dito escalonado se, e somente se:

i) todas as equações apresentam as incógnitas numa mesma ordem;

ii) em cada equação existe pelo menos um coeficiente, de alguma incógnita, não-nulo;

iii) existe uma ordem para as equações, tal que o número de coeficientes nulos que precedem o primeiro não-nulo de cada equação aumenta de uma equação para outra.

Exemplo 7: Os seguintes sistemas lineares abaixo estão escalonados.

$$a)\begin{cases} x+y+3z=1 \\ 0x+y-z=4 \\ 0x+0y+2z=5 \end{cases} \quad \text{matriz ampliada} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 5 \end{bmatrix};$$

$$b)\begin{cases} 4x-y+z+t+w=1 \\ 0x+0y+z-t+w=0 \\ 0x+0y+0z+2t-w=1 \end{cases} \quad \text{matriz ampliada} \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$c)\begin{cases} 3x+4y=4 \\ 0x+5y=1 \end{cases} \quad \text{matriz ampliada} \begin{bmatrix} 3 & 4 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Exemplo 8: O sistema linear $\begin{cases} 4x+3y+z=1 \\ 0x+5y-z=3 \\ 0x+3y-2z=5 \end{cases}$ não está escalonado, pois não satisfaz o item (iii) da definição.

Exemplo 9: O sistema $\begin{cases} 6x+y+3z=6 \\ 0x+4y+5z=4 \\ 0x+0y+0z=10 \end{cases}$ não está escalonado, pois a última equação apresenta todos os coeficientes nulos. Na verdade, observe que esse sistema não possui solução, pois não existem $x, y, z \in IR$ tais que *0 = 10.* Portanto tal sistema é impossível.

A ideia principal do método do escalonamento é a seguinte: Dado um sistema linear S_1 determinar, a partir de S_1, um sistema S_2 equivalente a S_1, tal que a solução do sistema seja trivial.

Você deve estar se perguntando agora como se faz para escalonar um sistema linear *S*. Vamos agora estudar uma técnica para transforma um sistema linear *S* em um sistema escalonado. Essa técnica é fundamentada nas três seguintes operações elementares que veremos a seguir:

Operações Elementares com Linhas

1º Operação Elementar- PERMUTAÇÃO: Permutando-se entre si duas ou mais equações de um sistema linear S_1, teremos um novo sistema S_2, que é equivalente a S_1. Denotaremos esta operação da forma $L_i \leftrightarrow L_j$ (linha L_i permutada com a linha L_j).

Exemplo 10: Considere o sistema linear $S_1: \begin{cases} x+2y+z=9 & L_1 \\ 2x+y-z=3 & L_2 \\ 3x-y-2z=-4 & L_3 \end{cases}$. Permutando a primeira linha L_1 com a terceira linha L_3, ou seja, fazendo $L_1 \leftrightarrow L_3$ obtemos o sistema $S_2: \begin{cases} 3x-y-2z=-4 \\ 2x+y-z=3 \\ x+2y+z=9 \end{cases}$

que é equivalente ao sistema S_1.

2º Operação Elementar- PRODUTO POR ESCALAR: Multiplicando-se (ou dividindo-se) ambos os membros de uma equação de um sistema linear S_1 por uma constante $k \neq 0$, obtém-se um novo sistema S_2 equivalente a S_1. Denotaremos esta operação da forma $L_i \to kL_i$ (linha L_i torna-se kL_i).

Exemplo 11: Considere o sistema linear $S_1: \begin{cases} x+2y+z=9 & L_1 \\ 2x+y-z=3 & L_2 \\ 3x-y-2z=-4 & L_3 \end{cases}$. Multiplicando a segunda linha, L_2, por $-\frac{1}{2}$, ou seja, fazendo $L_2 \to -\frac{1}{2}L_2$ obtemos o sistema $S_2: \begin{cases} x+2y+z=9 \\ -x-\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z=-\frac{3}{2} \\ 3x-y-2z=-4 \end{cases}$

que é equivalente ao sistema S_1.

3º Operação Elementar- SUBSTITUIÇÃO PELA SOMA: Substituindo-se uma equação de um sistema linear S_1 pela soma, membro a membro, dela com outra equação desse sistema, obtém-se um novo sistema S_2, equivalente a S_1. Denotaremos esta operação da forma $L_i \to L_i + kL_j$ (linha L_i será substituída pela soma $L_i + kL_j$).

Exemplo 12: Considere o sistema linear $S_1:\begin{cases} x+2y+z=9 & L_1 \\ 2x+y-z=3 & L_2 \\ 3x-y-2z=-4 & L_3 \end{cases}$. Substituindo a segunda linha, L_2, pela soma $L_2+(-2)L_1$, ou seja, fazendo $L_2 \to L_2+(-2)L_1$ obtemos o sistema $S_2:\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x-3y-3z=-15 \\ 3x-y-2z=-4 \end{cases}$ que é equivalente ao sistema S_1.

Faremos agora um exemplo de como podemos usar essas três operações elementares para obter um sistema linear escalonado.

Exemplo 13: Vamos escalonar e classificar o seguinte sistema: $S_1:\begin{cases} x+2y+z=9 & (I) \\ 2x+y-z=3 & (II) \\ 3x-y-2z=-4 & (III) \end{cases}$

RESOLUÇÃO:

Primeiramente volte no início da seção 3.3.2 e veja a definição de um sistema escalonado.

Temos:

(1º Passo) $\begin{cases} x+2y+z=9 & (I) \\ 2x+y-z=3 & (II) \\ 3x-y-2z=-4 & (III) \end{cases} \quad L_2 \to L_2+(-2)L_1 \;\Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x-3y-3z=-15 \\ 3x-y-2z=-4 \end{cases}$

A operação $L_2 \to L_2+(-2)L_1$ significa que a linha L_2 foi substituída pela soma $L_2+(-2)L_1$, tal soma resulta em $0x-3y-3z=-15$.

(2º Passo) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x-3y-3z=-15 \\ 3x-y-2z=-4 \quad L_3 \to L_3+(-3)L_1 \;\Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x-3y-3z=-15. \\ 0x-7y-5z=-31 \end{cases}$

A operação $L_3 \to L_3+(-3)L_1$ significa que a linha L_3 foi substituída pela soma $L_3+(-3)L_1$, tal soma resulta em $0x-7y-5z=-31$.

(3º Passo) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x-3y-3z=-15 \\ 0x-7y-5z=-31 \end{cases} \quad L_2 \to (-\frac{1}{3})L_2 \;\Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x-7y-5z=-31 \end{cases}$.

A operação $L_2 \to \left(-\frac{1}{3}\right)L_2$ significa que a linha L_2 foi substituída pela operação $\left(-\frac{1}{3}\right)L_2$, tal operação resulta em $y+z=5$.

(4º Passo) $\begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x-7y-5z=-31 \quad L_3 \to L_3+7.L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x+0y+2z=4 \end{cases}$.

A operação $L_3 \to L_3+7.L_2$ significa que a linha L_3 foi substituída pela soma $L_3+7.L_2$, cujo resultado é $0x+0y+2z=4$.

O novo sistema linear $S_2: \begin{cases} x+2y+z=9 \\ 0x+y+z=5 \\ 0x+0y+2z=4 \end{cases}$ está na forma escalonada e é um sistema equivalente ao sistema S_1, ou seja, a solução de S_2 é também solução de S_1.

Pela terceira equação, $2z=4$, teremos $z=2$ e assim, substituindo nas demais equações, obtemos $x=1$ e $y=3$, e desta forma o sistema S_1 é um sistema **SPD**- Sistema Possível e Determinado cuja solução é $x=1$, $y=3$ e $z=2$.

Exemplo 14: Vamos escalonar e classificar o sistema linear $S: \begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 3x+3y+z+2t=0 \\ 2x+y+z-2t=4 \end{cases}$.

Resolução:

Vamos, inicialmente, conseguir os zeros necessários nos coeficientes de x.

$$\begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 3x+3y+z+2t=0 \quad L_2 \to L_2+(-3)L_1 \\ 2x+y+z-2t=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 0x+0y+10z-t=-3 \\ 2x+y+z-2t=4 \quad L_3 \to L_3+(-2)L_1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 0x+0y+10z-t=-3 \\ 0x-y+7z-4t=2 \end{cases}$$

Vamos agora permutar $L_2 \leftrightarrow L_3$ e assim teremos $\begin{cases} x+y-3z+t=1 \\ 0x-y+7z-4t=2 \\ 0x+0y+10z-t=-3 \end{cases}$ o qual é um sistema escalonado.

Se fizermos $t=\alpha$ na terceira equação obtemos:

$$x=\frac{2+26\alpha}{10},\ y=\frac{-1-33\alpha}{10},\ z=\frac{-3+\alpha}{10} \text{ e } t=\alpha, \text{onde } \alpha \in IR.$$

Portanto, o Sistema possui infinitas soluções, isto é, o sistema linear é **SPI**-Sistema Possível e Indeterminado.

Exemplo 15: Vamos escalonar e classificar o sistema $S_1:\begin{cases} x-y+z=4 \\ 3x+2y+z=0 \\ 5x+5y+z=-4 \end{cases}$.

Resolução:

Temos

$$\begin{cases} x-y+z=4 \\ 3x+2y+z=0 \quad L_2 \to L_2+(-3)L_1 \Rightarrow \\ 5x+5y+z=-4 \end{cases} \begin{cases} x-y+z=4 \\ 0x+5y-2z=-12 \\ 5x+5y+z=-4 \quad L_3 \to L_3+(-5)L_1 \Rightarrow \end{cases}$$

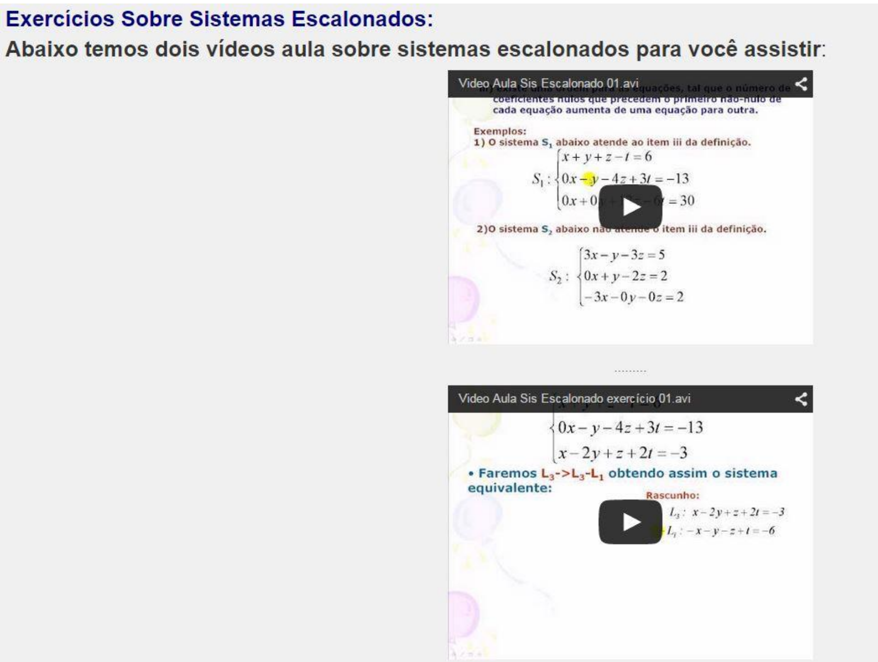
$$\begin{cases} x-y+z=4 \\ 0x+5y-2z=-12 \\ 0x+10y-4z=-24 \;\; L_3 \to L_3+(-2)L_2 \Rightarrow \end{cases} \begin{cases} x-y+z=4 \\ 0x+5y-2z=-12. \\ 0x+0y+0z=0 \end{cases}$$

A última equação de S_2 pode ser abandonada, pois ela é satisfeita para quaisquer valores de x, y e z.

Desta forma $S_2:\begin{cases} x-y+z=4 \\ 0x+5y-2z=-12 \end{cases}$ e fazendo $z=\alpha$ teremos a solução: $x=\dfrac{8-3\alpha}{5}, y=\dfrac{-12+2\alpha}{5}$ e $z=\alpha$, onde $\alpha \in IR$ e assim o sistema S_1 é **SPI**- Sistema Possível e Indeterminado.

No Moodle

Acessando a plataforma você vai encontrar uma Lição sobre Sistemas Lineares onde poderá assistir aos vídeos aula sobre sistemas escalonados.



3.3.2.1 Resolução de um Sistema Linear via Escalonamento de sua Matriz Ampliada

Já sabermos que um sistema de equações lineares $S:\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$

pode ser representado na forma matricial $S:\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$ ou através de

sua matriz ampliada do sistema $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & b_m \end{bmatrix}$.

No exemplo 13 da seção anterior conseguimos escalonar o sistema linear $S_1:\begin{cases} x + 2y + z = 9 \quad (I) \\ 2x + y - z = 3 \quad (II) \\ 3x - y - 2z = -4 \quad (III) \end{cases}$ e obtemos um sistema escalonado equivalente ao sistema S_1 dado por $S_2:\begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 0x + y + z = 5 \\ 0x + 0y + 2z = 4 \end{cases}$. Através do sistema S_2 podemos determinar a solução do sistema original S_1. Pela terceira equação, $2z = 4$, teremos $z = 2$ e assim, substituindo nas demais equações, obtemos $x = 1$ e $y = 3$, e desta forma o sistema *S₁* é um sistema **SPD**- Sistema Possível e Determinado cuja solução é $x = 1$, $y = 3$ e $z = 2$.

Observe agora que a matriz ampliada do sistema linear S_1 é a matriz $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{bmatrix}$ e a matriz ampliada do sistema S_2 é $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Vamos utilizar as operações elementares vistas na seção anterior para determinar a matriz $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ partindo da matriz ampliada $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}$.

Vejamos como se faz:

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - 2L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix} L_3 \to \frac{1}{2}L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$L_1 \to L_1 + L_3 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - L_3 \Rightarrow A_3 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Observe agora que a matriz ampliada $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ representa o sistema linear

$S_3 : \begin{cases} x + 0y + 0z = 1 \\ 0x + y + 0z = 3 \\ 0x + 0y + z = 2 \end{cases}$ na qual podemos determinar facilmente a solução desse sistema linear que

é $x = 1$, $y = 3$ e $z = 2$, ou seja, o sistema S_3 é equivalente ao sistema S_1.

A matriz $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é denominada matriz escalonada à forma **escada** .

Definição: Dizemos que uma matriz M é escalonada à forma **escada** se:

I) O primeiro elemento de cada linha é 1. Chamaremos de piloto a este elemento.

Exemplo para entender melhor: $A_3 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}$

II) Cada coluna que possue um elemento piloto de alguma das linhas contém todos os demais elementos da coluna nulos.

Exemplo para entender melhor: $A_3 = \begin{bmatrix} \boxed{1} & \underline{0} & \underline{0} & 1 \\ \underline{0} & \boxed{1} & \underline{0} & 3 \\ \underline{0} & \underline{0} & \boxed{1} & 2 \end{bmatrix}$

III) O piloto de cada linha ocorre em colunas progressivas.

Exemplo para entender melhor: $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

IV) Linhas nulas ocorrem abaixo de todas as demais.

Exemplo para entender melhor: A matriz A_3 não possui linhas nulas. Caso A_3 possuísse alguma linha nula essa linha nula estarei abaixo da linha 3 (L_3).

Exemplo 16: Vejamos mais algumas matrizes escalonadas à forma escada.

$$1^o)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad 2^o)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad 3^o)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 4^o)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo 17: Vamos classificar o sistema linear $S_1 : \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$, escalonando a matriz ampliada do sistema, $A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix}$, á forma escada.

Vejamos como se faz :

$$A_1 = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} L_1 \leftrightarrow L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -1 & 1 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 - 3.L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & -14 \end{bmatrix} L_2 \to -\frac{1}{7}.L_2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - 2.L_2 \Rightarrow A_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{(Matriz escalonada à forma escada)}$$

Logo o sistema linear equivalente ao sistema S_1 associado á matriz $A_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ é o sistema $S_2 : \begin{cases} 1x + 0y = 1 \\ 0x + 1y = 2 \end{cases}$ ou simplesmente $\begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases}$, que é a solução do sistema. Portanto, o sistema original $S_1 : \begin{cases} 3x - y = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$ é um sistema **SPD**- Sistema Possível e Determinado.

Exemplo 18 : Vamos classificar o sistema linear $S_1 : \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$.

A matriz ampliada do sistema linear $S_1 : \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$ é dada por $A_1 : \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right]$.

Vamos escalonar a matriz A_1 à forma escada.

Vejamos como se faz isso:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots\, 9 \\ 2 & 1 & -1 & \vdots\, 3 \\ 3 & -1 & -2 & \vdots\, -4 \end{bmatrix} \begin{cases} L_2 \to L_2 - 2.L_1 \\ L_3 \to L_3 - 3.L_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots\, 9 \\ 0 & -3 & -3 & \vdots\, -15 \\ 0 & -7 & -5 & \vdots\, -31 \end{bmatrix} L_2 \to -\frac{1}{3} L_2 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & \vdots\, 9 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots\, 5 \\ 0 & -7 & -5 & \vdots\, -31 \end{bmatrix} \begin{cases} L_1 \to L_1 - 2.L_2 \\ L_3 \to L_3 + 7.L_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots\, -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots\, 5 \\ 0 & 0 & 2 & \vdots\, 4 \end{bmatrix} L_3 \to \frac{1}{2} L_3 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & \vdots\, -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots\, 5 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots\, 2 \end{bmatrix} \begin{cases} L_2 \to L_2 - 1.L_3 \\ L_1 \to L_1 + 1.L_3 \end{cases} \Rightarrow A_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots\, 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots\, 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots\, 2 \end{bmatrix} \text{(Matriz Escalonada à forma Escada)}$$

O sistema linear associado a matriz à forma escada $A_2 : \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots\, 1 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots\, 3 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots\, 2 \end{bmatrix}$ é o sistema $S_2 : \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \\ z = 2 \end{cases}$ o que nos dá a solução do sistema original $S_1 : \begin{cases} x + 2y + z = 9 \\ 2x + y - z = 3 \\ 3x - y - 2z = -4 \end{cases}$.

Portanto o sistema S_1 é **SPD**- Sistema Possível e Determinando cuja solução é $x = 1,\ y = 3$ e $z = 2$.

No Moodle

Acesse a plataforma e você encontrará um fórum de discussão sobre o conteúdo estudado e assim você poderá tirar suas dúvidas bem como contribuir com os colegas do curso sobre o conteúdo estudado até agora. Participe e dê sua contribuição.

4 Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade você teve a oportunidade de conhecer e classificar sistemas lineares bem como discutir as propriedades utilizadas na resolução de um sistema linear. Através dos exercícios disponibilizados na plataforma Moodle, praticamos e amadurecemos no que diz respeito à resolução de problemas de sistemas lineares.

Resumo da Unidade 2

Pontos que eu considero importantes:

✓ ____

____

✓ ____

____

✓ ____

____

Ideias que posso aplicar nos meus estudos

O que eu não posso esquecer!!

-
-
-
-
-
-
-

Ideias que posso aplicar no meu trabalho

Minha Agenda

Atividades no Moodle	Data de encerramento

Unidade 3

Determinantes

1 Situando a Temática

A teoria dos determinantes teve origem em meados do século XVII, quando eram estudados processos para resolução de sistemas lineares. Hoje em dia, embora não seja um instrumento para resolução de sistemas, os determinantes são utilizados, por exemplo, no estudo da análise vetorial, hoje essencial em todas as áreas que dependem das ciências exatas.

Nesta unidade, iremos conceituar determinante de uma matriz quadrada de ordem n, para qualquer valor de n, bem como retomar a discussão de um sistema linear através do determinante da matriz principal. Desenvolveremos ainda, o cálculo para encontrar a matriz inversa de uma determinada matriz quadrada.

2 Problematizando a Temática

Na unidade II, discutimos e resolvemos sistemas lineares pelo método do escalonamento. Desta forma, considere o sistema linear $S_1 : \begin{cases} ax + by = p \\ cx + dy = q \end{cases}$.

Utilizando algumas operações elementares do método de escalonamento, obteremos o sistema linear $S_2 : \begin{cases} ax + by = p \\ (ad - cb)y = aq - cp \end{cases}$, que é equivalente ao sistema S_1 cuja matriz principal é $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$.

Note que pela segunda equação de S_2, só haverá um único valor para a incógnita y se, somente se, o coeficiente de y, $ad - cb$, for diferente de zero e conseqüentemente haverá um único valor para a incógnita x satisfazendo o sistema, e assim, o sistema será SPD- sistema possível e determinado.

Observe que o coeficiente de $ad - cb$ nada mais é do que a diferença entre o produto dos elementos da diagonal principal pelo produto dos elementos da diagonal secundária da matriz, $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$. O coeficiente $ad - cb$ é chamado determinante da matriz principal $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ do sistema linear S_1.

3 Conhecendo a Temática

3.1 Definição de Determinante e Exemplos

Seja $M=\left[a_{ij}\right]_{n\times n}$, uma matriz quadrada de ordem n. Denotaremos, ao logo desse texto, o determinante da matriz M da forma $\det M=\det\left[M\right]$.

Definição: O determinante de uma matriz quadrada $M=\left[a_{11}\right]$ de ordem 1 é igual ao número real a_{11}, ou seja, $\det M=a_{11}$.

Essa definição provém do sistema 1×1, $S: a_{11}x_1=b_1$, cuja solução depende do coeficiente a_{11}. Note ainda que a matriz principal do sistema S é $M=\left[a_{11}\right]$.

Definição: O determinante de uma matriz quadrada de ordem 2, $M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, é dado por: $\det M=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Exemplo 1: Considere a matriz $M=\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$. O determinante da matriz M é $\det M=2.4-5.(-1)=8-5=3$.

Na seção anterior, vimos que o número real $\det M=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ está ligado a solução do sistema $S:\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2 \end{cases}$.

Vimos até agora a definição de determinante associada às matrizes de ordem 1 ou ordem 2. De modo geral, na resolução de um sistema linear $n\times n$, verifica-se um cálculo padrão que se mantém para qualquer valor de n. O número resultante desse cálculo é chamado de determinante.

O matemático francês Marquês de Laplace descobriu que, dada uma matriz quadrada de ordem n, é possível calcular seu determinante usando determinantes de matrizes de ordem $n-1$. Assim, a partir dos determinantes de matrizes de ordem dois, calculamos os de ordem três, com os determinantes de ordem três calculamos os determinantes de ordem quatro e assim sucessivamente.

Para facilitar o entendimento sobre o teorema de Laplace, vamos conhecer algumas definições para podermos entender melhor como calcular determinantes de matrizes de ordem $n\geq 2$.

3.2 Menor Complementar

Definição: Seja M uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. O menor complementar do elemento a_{ij} de M, denotada por MC_{ij}, é o determinante da matriz quadrada que se obtém eliminando a linha *i* e a coluna *j* da matriz M.

Exemplo 2: Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

i) O menor complementar do elemento a_{11} (retirando a 1° linha e a 1° coluna de M) é o determinante da matriz $D_{11} = [3]$, ou seja, $MC_{11} = 3$.

ii) O menor complementar do elemento a_{12} é o determinante da matriz $D_{12} = [-1]$, ou seja, $MC_{12} = -1$.

Exemplo 3: Considere agora a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 3 \\ -4 & 0 & 1 \\ -2 & -1 & -4 \end{bmatrix}$.

- O menor complementar do elemento a_{23} é o determinante da matriz $D_{23} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$, ou seja, $MC_{23} = 8$ (perceba que foi eliminada a 2ª linha e a 3ª coluna da matriz M).
- O menor complementar do elemento a_{32} é o determinante da matriz $D_{32} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}$, ou seja, $MC_{32} = 14$.

3.3 Cofator

Definição: Seja M uma matriz quadrada de ordem $n \geq 2$. O cofator do elemento a_{ij} de M é o número real $A_{ij} = (-1)^{i+j}.MC_{ij}$, em que MC_{ij} é o menor complementar de a_{ij}.

Exemplo 4: Se $M = \begin{bmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \\ -1 & 6 & -2 \end{bmatrix}$, então:

- Cofator de a_{21}: temos que $MC_{21} = \det \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} = -2$ e assim

$$A_{21} = (-1)^{2+1}.MC_{21} = (-1)^3.(-2) = 2$$

- Cofator de a_{13}: temos que $MC_{13} = \det\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 6 \end{bmatrix} = 1$ e assim

$$A_{13} = (-1)^{1+3}.MC_{13} = (-1)^4.(1) = 1.$$

Observação importante para você

Note que teremos sempre $A_{ij} = MC_{ij}$ se $i+j$ é par e teremos $A_{ij} = -MC_{ij}$ se $i+j$ é ímpar.

3.4 Teorema de Laplace

Teorema de Laplace: O determinante associado a uma matriz quadrada M de ordem $n \geq 2$ é o número que se obtém pela soma dos produtos dos elementos de uma linha i (ou coluna j) qualquer pelos respectivos cofatores, ou seja,

$$\det M = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}.A_{ij} = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + \cdots a_{in}.A_{in}.$$

Exemplo 5: Considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}$. Já sabemos que $\det M = 2.3 - 1.(-4) = 10$.

Vamos utilizar o teorema de Laplace para calcular $\det M$.

Primeiramente iremos escolher qualquer linha desta matriz. Escolhamos a 1º linha.

Daí $\det M = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12}$, onde A_{11} e A_{12} são os cofatores de a_{11} e a_{12} respectivamente.

Temos que:

- $A_{11} = (-1)^{1+1}.MC_{11} = (-1)^2.3 = 3.$
- $A_{12} = (-1)^{1+2}.MC_{12} = (-1)^3.(-4) = 4.$
-

Portanto, pelo Teorema de Laplace, o determinante da matriz é dado por

$$\det M = 2.3 + 1.4 = 10.$$

Exemplo 6: Vamos calcular o determinante da matriz $M=\begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$.

Aplicaremos o teorema de Laplace utilizando a 3º linha.

Sabemos que $\det M = a_{31}.A_{31}+a_{32}.A_{32}+a_{33}.A_{33}$ onde:

- $A_{31}=(-1)^{3+1}.MC_{31}=(-1)^{4}.\det\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}=(1).10=10$;
- $A_{32}=(-1)^{3+2}.MC_{32}=(-1)^{5}.\det\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=(-1).(-4)=4$;
- $A_{33}=(-1)^{3+3}.MC_{33}=(-1)^{6}.\det\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}=(1).8=8$.

Portanto, pelo teorema de Laplace, $\det M = 0.10+5.4+6.8=68$.

3.4.1 Regra de Sarrus

O matemático francês Pierre Frédéric Sarrus (1798-1861) estudou a seguinte situação:

Dada uma matriz quadrada $M=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$ de ordem 3 , e aplicando o teorema de Laplace na 1º linha de M teremos:

$$\det M = a_{11}.A_{11}+a_{12}.A_{12}+a_{13}.A_{13}=$$
$$=\left(a_{11}.a_{22}.a_{33}+a_{12}.a_{23}.a_{31}+a_{13}.a_{21}.a_{32}\right)-\left(a_{13}.a_{22}.a_{31}.+a_{11}.a_{23}.a_{32}+a_{12}.a_{21}.a_{33}\right)$$

Pierre Sarrus observou que as seis parcelas do cálculo de $\det M_{3\times 3}$ podem ser obtidas da seguinte forma:

i) Repetimos as duas primeiras colunas ao lado da 3º coluna de M ;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

ii) Realizamos a soma dos produtos dos elementos que estão na direção paralela a diagonal principal;

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\underbrace{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}}$$

Paralelas da diagonal principal

iii) Realizamos a soma dos produtos dos elementos que estão na direção paralela a diagonal secundária;

$$\left[\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}\right]\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$\underbrace{a_{13}a_{22}a_{31} + a_{11}a_{23}a_{32} + a_{12}a_{21}a_{33}}$$

Paralelas da diagonal secundária

iv) o determinante é a diferença entre o número obtido no passo **(ii)** e o número obtido no passo **(iii)**, ou seja,

$$\det M = \underbrace{\left(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}\right)}_{\text{Paralelas da diagonal principal}} - \underbrace{\left(a_{13}.a_{22}.a_{31}. + a_{11}.a_{23}.a_{32} + a_{12}.a_{21}.a_{33}\right)}_{\text{Paralelas da diagonal secundária}}.$$

Exemplo 7: Vimos no exemplo 6 que o determinante da matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ é $\det M = 68$.

Utilizaremos a regra de Sarrus para encontrar o valor de $\det M_{3\times 3}$.

Temos:

$$\left[\begin{matrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{matrix}\right]\begin{matrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \\ 0 & 5 \end{matrix}$$

$0+20 + (-36)=$ **-16** $\quad 12 + 0 + 40 =$ **52**

Portanto, $\det M = 52 - (-16) = 68$.

Trocando Experiência com você...

A regra de Sarrus é bastante utilizada em sala de aula. Muitos professores apresentam primeiramente esta regra para depois introduzir o teorema de Laplace, o qual vimos ser necessário para o cálculo de determinante de matrizes de ordem maior que 3. Na verdade, os problemas propostos no que diz respeito ao cálculo do determinante são em sua maioria problemas envolvendo, no máximo, matrizes quadradas de ordem 3. O mesmo acontece com sistemas de equações lineares e assim muitos dos nossos alunos sentem dificuldades em encontrar o determinante de uma matriz de ordem quatro por exemplo, ou resolver um sistema linear com 4 incógnitas e 3 equações.

No Moodle

Acesse a plataforma e acesse a lição denominada: Estudando Determinantes. Nesta lição você encontrará vídeos aula e exercícios resolvidos sobre o conteúdo visto até esse momento.

Praticando para Aprender

Exercício 1: Calcule o determinante das matrizes identidades I_2, I_3 e I_4. Qual é o valor do determinante de I_n, para qualquer $n \geq 1$? Você consegue provar este resultado?

Exercício 2: Se uma matriz tem uma fila (linha ou coluna) toda nula, qual é o valor do seu determinante ? Prove a sua afirmação.

Exercício 3: Calcule o determinante das matrizes

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 7 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad e \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 0 & -1 & 9 \end{bmatrix}.$$

O que estas matrizes têm de peculiar?

Exercício 4: Prove que $\det M = \det M^t$.

Exercício 5: Calcule o determinante das matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad e \quad N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Qual a relação entre as duas matrizes? Qual a relação entre os seus determinantes?

Exercício 6: Calcule o determinante das matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} e \; N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 8 \\ 0 & 4 & 6 & -8 \\ 0 & 0 & 9 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Qual a conclusão que você pode tirar?

3.5 Propriedades dos Determinantes

O estudo das propriedades dos determinantes facilitará, em muitos casos, o cálculo dos determinantes. Nos exercícios de 1 a 6, você deduziu algumas propriedades dos determinantes de matrizes. Veremos agora estas propriedades de maneira formal.

Propriedades Dos Determinantes

P1) Se uma matriz quadrada M possui uma fila (linha ou coluna) nula, seu determinante é zero.

O exercício 2 é um exemplo da aplicação desta propriedade.

P2) Se os elementos correspondentes de duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada *M* forem iguais, seu determinante será nulo, isto é, $\det M = 0$.

A matriz M do exercício 3 é um exemplo da aplicação desta propriedade.

P3) Se uma matriz possui duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, seu determinante será nulo.

Dizer que duas linhas são proporcionais significa dizer que os elementos de uma delas são *k* $(k \neq 0)$ vezes os elementos correspondentes da outra. O exercício 3 é um exemplo desta proposição.

Exercício 7: Calcule o determinante das matrizes:

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} \; e \; N = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 14 & 10 \\ 2 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Qual a relação entre as duas matrizes? Qual a relação entre os seus determinantes?

P4) Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha (ou uma coluna) por um número real k, o determinante da nova matriz é o determinante da matriz original multiplicado por k.

Como aplicação de P4, temos a seguinte propriedade.

P5) Se uma matriz quadrada M de ordem n é multiplicada por um número real k, então $\det(kM) = k^n \det M$.

No exercício 4 você provou a seguinte proposição:

P6) O determinante de uma matriz quadrada M é igual ao determinante de sua transposta, isto é, $\det M = \det(M^t)$.

O exercício 5 ilustra a proposição a seguir:

P7) Se trocarmos de posição entre si duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da nova matriz é o determinante da matriz original com o sinal invertido.

Os exercícios 1 e 6 referem-se à seguinte propriedade:

P8) O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos da diagonal principal.

P9) (Teorema de Binet) Sejam M e N duas matrizes quadradas de mesma ordem. Então $\det(MN) = \det M . \det N$.

P10) (Teorema de Jacobi) Se somarmos a uma linha (ou coluna) de uma matriz quadrada uma outra linha (ou coluna) multiplicada por um número qualquer, o determinante da matriz não se altera.

Por exemplo, dada a matriz $M = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, o seu determinante é 68. Substituindo

a 2º linha de M pela soma desta linha com o produto da 1º linha por -3, isto é,

($L_2 \to L_2 + (-3)L_1$) obteremos: $N = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -8 & -8 & -10 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ e $\det N = 68 = \det M$.

3.6 Aplicações do Determinante

3.6.1 Determinação da Matriz Inversa

Como vimos na unidade II uma matriz quadrada M de ordem n é invertível se, e somente se, existe uma matriz M^{-1} tal que: $M.M^{-1} = M^{-1}.M = I_n$, em que I_n é a matriz identidade de ordem n.

Praticando para Aprender

Exercício 8: Mostre que a matriz inversa da matriz $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ é a matriz $B=\begin{bmatrix}1 & -2/3 & 1/3\\ 0 & 1/3 & -2/3\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

Exercício 9: Calcule os determinantes das matrizes *A* e *B* do exercício anterior. Qual a relação que existe entre $\det A$ e $\det B$?

Vamos estabelecer uma maneira que nos permita o cálculo de matriz inversa utilizando o nosso conhecimento de sistemas lineares. Para isso necessitamos do seguinte teorema.

Teorema: Uma matriz quadrada A de ordem n é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Demonstração:

Sendo A de ordem n, então A é invertível $\Leftrightarrow$ existe A^{-1} tal que $A^{-1}.A = A.A^{-1} = I_n \Leftrightarrow \det\left(A^{-1}.A\right) = \det\left(I_n\right) \Leftrightarrow \det\left(A^{-1}\right).\det\left(A\right) = \det\left(I_n\right)$, veja propriedade 9 (P9).

Como $\det I_n = 1$, teremos que: $\det\left(A^{-1}\right).\det A = 1 \Leftrightarrow \det\left(A^{-1}\right) = \dfrac{1}{\det A} \Leftrightarrow \det A \neq 0$.

Portanto a matriz quadrada A de ordem n é invertível se, e somente se, $\det A \neq 0$.

Observação importante para você

Note que, durante o processo de demonstração do teorema, obtivemos que $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$. Desta forma, podemos concluir que matrizes inversas têm determinantes inversos. Volte ao exercício 9 acima e verifique tal afirmação.

Exemplo 8: Verifique se a matriz $M=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 3 & 5\end{bmatrix}$ é invertível. Em caso afirmativo determine M^{-1}.

Resolução: Como $\det M = 5-3 = 2 \neq 0$, então, pelo teorema anterior, *M* admite uma matriz inversa

$M^{-1}=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ e mais $\det M^{-1} = \dfrac{1}{\det M} = \dfrac{1}{2}$.

Assim, temos: $A^{-1}.A = I_2$, ou seja,

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} a+3b & a+5b \\ c+3d & c+5d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} a+3b=1 \\ a+5b=0 \\ c+3d=0 \\ c+5d=1 \end{cases}$$

o qual é um sistema linear onde podemos, neste caso, resolver os sistemas $(I)\begin{cases} a+3b=1 \\ a+5b=0 \end{cases}$ e $(II)\begin{cases} c+3d=0 \\ c+5d=1 \end{cases}$, separadamente.

Pelo sistema (I) encontramos $a = \frac{5}{2}$ e $b = \frac{-1}{2}$ e, através do sistema (II), encontramos $c = \frac{-3}{2}$ e $d = \frac{1}{2}$. Portanto $M^{-1} = \begin{bmatrix} 5/2 & -1/2 \\ -3/2 & 1/2 \end{bmatrix}$.

Você já deve ter notado, pelo exemplo anterior, como iremos verificar se uma matriz quadrada M de ordem *3* admite uma matriz inversa M^{-1} de ordem 3 e, além disso, M^{-1} será determinada resolvendo o sistema linear obtido através da equação matricial $M^{-1}.M = I_n$, ou seja a matriz inversa será da forma $M^{-1} = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$, que nos dará um sistema com 9 (nove) variáveis e portanto muito trabalhoso. Sendo assim daremos uma outra opção para o caso da matriz inversa de M, via escalonamento de matrizes, a qual será obtida do seguindo alguns procedimentos.

Forma Pratica para Determinação da Matriz Inversa

Passo 1: Construa uma matriz com os elementos da matriz M, juntamente com os elementos da matriz identidade I_n, onde n é a ordem da matriz M, ou seja, uma matriz da forma $[M \ I_n]$.

Como exemplo para você entender melhor, considere a matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$. Como M é de ordem 2, então iremos construir uma nova matriz $[M \ I_2]$, ou seja, uma matriz dada forma

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Matriz M *Matriz Identidade*

Passo 2: Com base na nova matriz obtida no passo 1, utilize as operações elementares, vista na seção 3.3.2 da Unidade 2, para obter uma nova matriz da forma $[I_n \ N]$. A matriz N obtida após as operações elementares, nada mais é do que a matriz inversa da matriz M, ou seja, $N = M^{-1}$.

Para você entender melhor, note que anteriormente, construímos uma nova matriz com base na matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$, essa matriz é $\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{matrix}}_{Matriz\ M} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{Matriz\ Identidade} \end{bmatrix}$. Utilizando as operações elementares vamos obter uma matriz da forma $[I_2 \ N] = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} & \underbrace{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}}_{N} \end{bmatrix}$. A matriz $N = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nada mais é do que a matriz inversa da matriz $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Exemplo 9: Vamos determinar a matriz inversa de $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Antes de tudo, veja que $\det M = 2 \neq 0$ e assim, M admite uma matriz inversa M^{-1}.

<u>Passo 1:</u> Vamos construir a matriz $[M \ I_2]$ que é a matriz $\begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{matrix}}_{Matriz\ M} & \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{Matriz\ Identidade} \end{bmatrix}$.

<u>Passo 2:</u> Vamos utilizar as operações elementares vistas na seção 3.3.2 da Unidade2 para determinar a matriz $[I_2 \ N] = \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} & \underbrace{\begin{matrix} a & b \\ c & d \end{matrix}}_{N} \end{bmatrix}$.

Observe cada passo dado nas operações elementares nas linhas da matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Temos:

$$[M \ I_2] = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{bmatrix} L_2 \to L_2 + (-3)L_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} L_2 \to \left(\frac{1}{2}\right) L_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} L_1 \to L_1 - 1.L_2 \Rightarrow \begin{bmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}_{I_2} & \underbrace{\begin{matrix} \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{matrix}}_{N=M^{-1}} \end{bmatrix}$$

Portanto, a matriz $N=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ nada mais é do que a matriz inversa de $M=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

Vejamos, $N.M=\begin{bmatrix} \frac{5}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{-3}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

No Moodle

Acesse a plataforma e participe do fórum de discussão para ampliar seu conhecimento sobre a matriz inversa,

3.6.2 Resolução de um Sistema Linear através da Regra de Cramer

Considere o sistema linear 2×2, $S:\begin{cases} 3x+y=7 \\ -2x+4y=-14 \end{cases}$ que é um sistema possível e determinado cuja solução é $x=3$ e $y=-2$.

O sistema *S* pode ser representado na forma matricial $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}$, onde a matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz principal do sistema. Note que $\det A=14\neq 0$.

- Substituindo a 1ª coluna de A pela única coluna de B teremos a matriz

  $A_x=\begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -14 & 4 \end{bmatrix}$ e assim $\det A_x=42$.

- Substituindo a 2ª coluna de A pela única coluna de B teremos a matriz $A_y=\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -14 \end{bmatrix}$ e assim $\det A_y=-28$.

A regra de Cramer, as quais descreveram logo após, estabelece que:

$x=\dfrac{\det A_x}{\det A}$ e $y=\dfrac{\det A_y}{\det A}$. Portanto $x=\dfrac{42}{14}=3$ e $y=\dfrac{-28}{14}=-2$, que nada mais é do que a solução do sistema *S*.

A Regra de Cramer

Dado um sistema linear $n \text{ x } n$, $S = \begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$, onde $A = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}$ é denominada matriz principal do sistema S, é possível e determinado se, e somente se, $\det A \neq 0$ e a sua única solução é dada por:

$$x_1 = \frac{\det A_{x1}}{\det A}, \; x_2 = \frac{\det A_{x2}}{\det A}, \cdots, x_n = \frac{\det A_{xn}}{\det A},$$

onde $A_{x1}, A_{x2}, \cdots, A_{xn}$ são as matrizes obtidas substituindo-se, respectivamente, a coluna dos coeficientes de $x_1, x_2, \ldots x_n$ pela coluna dos termos independentes.

A regra de Cramer decorre do fato de que podemos representar o sistema *S* na forma matricial $A.X = B$, onde *A* é a matriz principal (ou dos coeficientes), *X* matriz das incógnitas e *B* matriz dos termos independentes.

Se $\det A \neq 0$ então a matriz *A* admite uma inversa A^{-1} e assim:

$$A.X = B \Rightarrow A^{-1}.(A.X) = A^{-1}.B \Rightarrow \left(A^{-1}.A\right).X = A^{-1}.B \Rightarrow I_n.X = A^{-1}.B \Rightarrow X = A^{-1}.B.$$

Logo, concluímos que existe uma única matriz X que é solução de $AX = B$, e, portanto, o sistema *S* é possível e determinado.

Observação importante para você

Com base na regra de Cramer podemos classificar um sistema linear $n \times n$.

I) Quando $\det A \neq 0$, o sistema é SPD- Sistema Possível e Determinado.

II) Quando $\det A = 0$ e $\det A_{x1} = \det A_{x2} = \cdots = \det A_{xn} = 0$, o sistema é SPI- Sistema Possível e Indeterminado.

III) Quando $\det A = 0$ e pelo menos um dos determinantes, $\det A_{x1}, \ldots, \det A_{xn}$, for diferente de zero, o sistema SI- Sistema Impossível.

Exemplo 10 : Considere o sistema linear 2×2 $S: \begin{cases} 3x + y = 7 \\ -2x + 4y = -14 \end{cases}$ que é um sistema possível e determinado cuja solução é $x = 3$ e $y = -2$.

Resolução: O sistema *S* pode ser representado na forma matricial $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ -14 \end{bmatrix}$, onde a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$ é a matriz principal do sistema. Note que $\det A = 14 \neq 0$.

- Substituindo a 1ª coluna de A pela única coluna de B teremos a matriz

$A_x = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -14 & 4 \end{bmatrix}$ e assim $\det A_x = 42$.

- Substituindo a 2ª coluna de A pela única coluna de B teremos a matriz $A_y = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -2 & -14 \end{bmatrix}$ e assim $\det A_y = -28$.

A regra de Cramer, a qual descrevemos logo após, estabelece que:

$x = \dfrac{\det A_x}{\det A}$ e $y = \dfrac{\det A_y}{\det A}$. Portanto $x = \dfrac{42}{14} = 3$ e $y = \dfrac{-28}{14} = -2$, que nada mais é do que a solução do sistema *S*.

Praticando para Aprender

Exercício 10: (PUC-RS) A equação $\det \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & n-1 \\ n & 0 & n \end{bmatrix} = 12$ tem como conjunto verdade:

$a)\{-6,2\}$ $b)\{-2,6\}$ $c)\{2,6\}$ $d)\{-6,6\}$ $e)\{-2,2\}$

Exercício 11: (FVG-SP) Seja (a,b,c) a solução do sistema linear $\begin{cases} x+y-z=-5 \\ 2x+y+z=-1 \\ 4x+2y-z=-11 \end{cases}$. Então, teremos:

$a)\ a=-1$ $b)\, b=3$ $c)\, c=2$ $d)\, abc=0$ $e)\, n.d.a$

Exercício 12: (UFAC) O sistema linear $\begin{cases} x+2y+3z=4 \\ 2x+3y+z=2 \\ 5x+8y+5y=8 \end{cases}$:

a) não admite nenhuma solução. b) admite uma única solução. c) admite exatamente duas soluções. d) exatamente três soluções. e) admite infinitas soluções.

4 Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade, além de introduzirmos os conceitos de determinante, apresentamos o teorema de Laplace que permite calcular o determinante de matrizes quadradas de qualquer ordem. Conhecemos dez propriedades que permitirão o cálculo do determinante com maior praticidade. Desenvolvemos ainda uma discussão do uso dos determinantes nos sistemas lineares de ordem $n \times n$, em especial nas matrizes 2×2 e 3×3, através da regra de Cramer, assim como o seu uso no cálculo da matriz inversa.

Resumo da Unidade 3

Pontos que eu considero importantes:

- ✓ ____
  ____
- ✓ ____
  ____
- ✓ ____
  ____

Ideias que posso aplicar nos meus estudos	O que eu não posso esquecer!!
	•
	•
	•
Ideias que posso aplicar no meu trabalho	•
	•
	•
	•

Minha Agenda

Atividades no Moodle	Data de encerramento

Unidade 4

Geometria Analítica I: Estudo do Ponto e da Reta

1 Situando a Temática

O ensino da geometria é de grande interesse na atualidade. A revolução da informática traz como uma de suas ferramentas mais poderosas a visualização e a manipulação precisa de imagens. Na área médica, o impacto dos diagnósticos baseados em imagens foi espetacular. Também nas engenharias, as imagens ampliaram em muito a capacidade de projetar e planejar.

O estudante do Ensino Médio, ao qual vocês terão a oportunidade de lecionar, hoje tem uma grande probabilidade de vir a trabalhar no futuro com um software que empregue as imagens como forma de comunicação com os elementos humanos envolvidos na atividade.

Neste momento, o estudo de geometria, principalmente o da geometria analítica, com conceitos como o de sistema de eixos, coordenadas e outros, pode tornar o ambiente de trabalho muito mais familiar ao estudante. Não queremos dizer aqui que o estudante irá aplicar teoremas complicados na sua atividade, mas sim que seu estudo anterior de geometria fará com que se sinta menos perdido em um ambiente organizado pela geometria.

2 Problematizando a Temática

Contemporâneo de Kepler e Galileu, René Descartes (1596-1650) unifica a aritmética, a álgebra e a geometria, e cria a geometria analítica: um método que permite representar os números de uma equação como pontos em um gráfico, as equações algébricas como formas geométricas e as formas geométricas como equações.

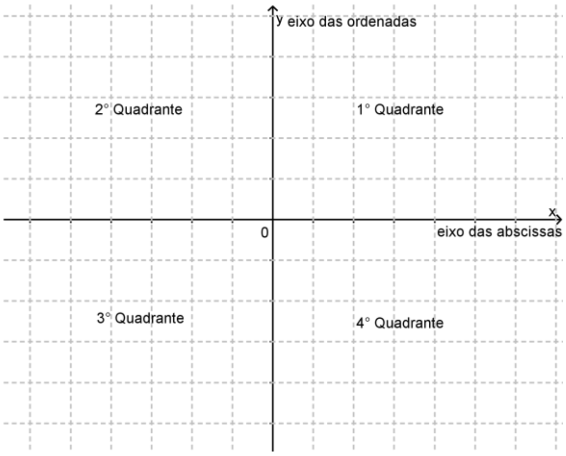
Descartes prova que é possível determinar uma posição em uma curva usando apenas um par de números e duas linhas de referência que se cruzam perpendicularmente: um dos números indica a distância vertical e, o outro, a distância horizontal. Esse tipo de gráfico representa os números como pontos e as equações algébricas como uma seqüência de pontos. Ao fazer isso, descobre que as equações de 2º grau transformam-se em linhas retas ou nas curvas cônicas, demonstradas por Apolônio 19 séculos antes: $x^2 - y^2 = 0$ forma duas linhas cruzadas, $x^2 + y^2 = 4$ forma um círculo, $x^2 - y^2 = 4$ forma uma hipérbole; $4x^2 + 2y^2 = 4$, uma elipse; e $x^2 = 4y$, uma parábola. As equações de grau maior ou igual a 3 dão origem a curvas em forma de corações, pétalas, espiras e outras. Atualmente, as linhas que se cruzam são chamados de eixos cartesianos. A linha vertical é o eixo dos y (ordenada) e a linha horizontal é o eixo dos x (abscissa).

3 Conhecendo a Temática

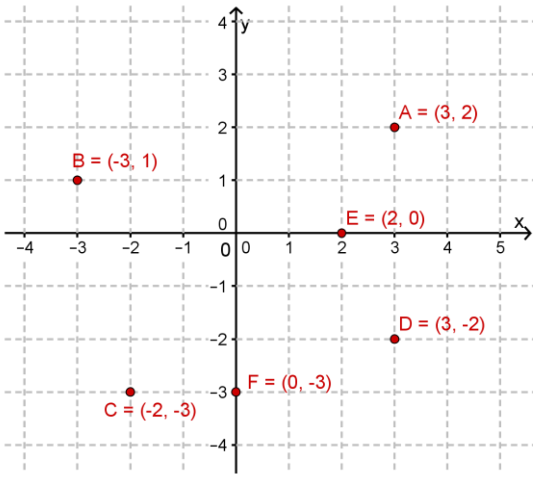
Na disciplina Matemática para o Ensino Básico II, você teve a oportunidade de conhecer e trabalhar com o sistema cartesiano de coordenadas. Desse modo as figuras podem se representadas através de pares ordenados, equações ou inequações.

3.1 Plano Cartesiano

Nesta capítulo, estudaremos os conceitos de ponto e reta na geometria analítica. Para isso, é importante lembrar alguns conceitos sobre plano cartesiano ortogonal, que consiste em plano com dois eixos perpendiculares, x e y, que o dividem em quatro regiões. O Horizontal x é denominado **eixo das abscissas**, e o vertical y, **eixo das ordenadas**. O Ponto em que esses eixos cruzam é denominado **origem**.



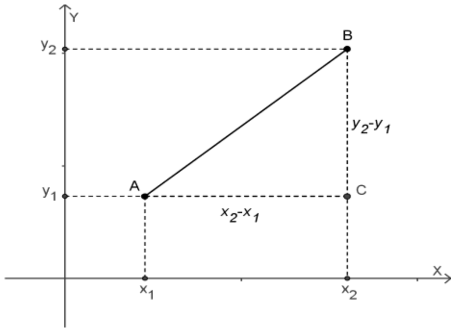
Para representar um ponto P em um plano cartesiano, utilizaremos as coordenadas cartesianas, que consistem em um par ordenado (a, b), sendo que a é abscissa, e b, a ordenada. No plano cartesiano abaixo, estão indicados os pontos $A = (3, 2)$, $B = (-3, -1)$, $C = (-2, -3)$, $D = (3, -2)$, $E = (2, 0)$ e $F = (0, -3)$.



3.2 Cálculo da Distância entre Dois Pontos

Dados dois pontos quaisquer $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$, iremos estabelecer uma expressão que indique a distância entre A e B, que será denotada por $d(A,B)$ e será considerada como a menor distância entre os pontos dados.

Observe o triângulo *ABC* representado abaixo:



Pelo teorema de Pitágoras temos:

$$[d(A,B)]^2=[d(AC)]^2+[d(BC)]^2 \quad \text{ou} \quad [d(A,B)]^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Portanto, dados dois pontos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$, a distância entre eles é dada por:

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

Praticando para Aprender

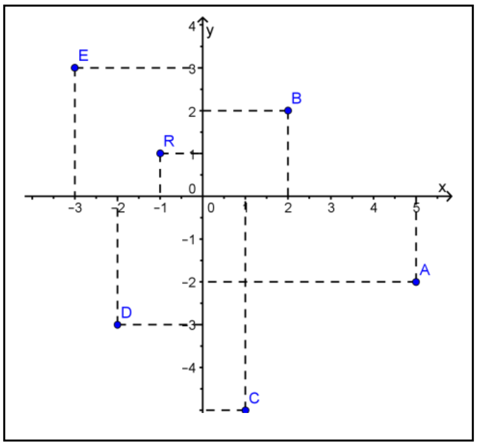
Exercício 1: Construa um plano cartesiano e indique os pontos $A=(3,-1)$, $B=(0,4)$, $C=(-3,2)$, $D=(3,4)$, $E=(-2,-4)$ e $F=(-1,0)$.

a) quais os pontos que estão no 1º quadrante? E quais estão no 3º Quadrante?

b) em qual quadrante os pontos têm abscissa positiva?

c) em qual quadrante os pontos têm ordenada negativa?

Exercício 2: Observe o esquema abaixo que representa a localização das cidades A, B, C, D e E, e de uma antena de transmissão de sinal de rádio, R.

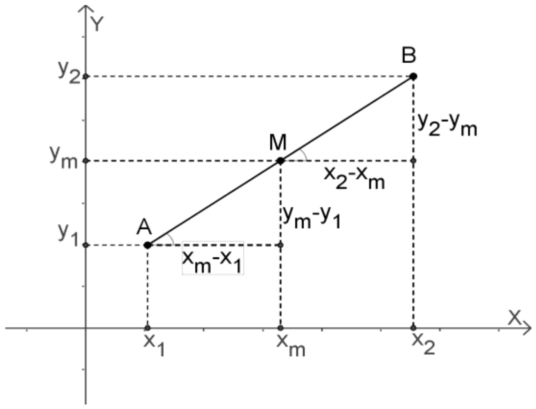


Sabendo que o raio de transmissão dessa antena é de 200 km e que cada unidade representada no esquema correspondente a 50 km, quais cidades recebem o sinal transmitido?

3.3 Coordenadas do Ponto Médio de um Segmento de Reta

Dado um segmento de reta $\overline{AB}$ onde $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$. Para determinarmos as coordenadas de M, ponto médio de $\overline{AB}$.

Observe que, pela figura abaixo temos $AM = MB$ e assim $\frac{AM}{MB}=1$.



Assim:

$$x_m - x_1 = x_2 - x_m \Rightarrow x_m = \frac{x_1+x_2}{2} \quad \text{e} \quad y_m - y_1 = y_2 - y_m \Rightarrow y_m = \frac{y_1+y_2}{2}.$$

Portanto, as coordenadas do ponto médio são dadas por $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$.

Exemplo 1: Determine o ponto médio M do segmento de reta $\overline{AB}$, onde $A=(-1,2)$ e $B=(5,8)$.

Resolução: Como $M=\left(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2}\right)$, então $M=\left(\frac{-1+5}{2},\frac{2+8}{2}\right)$. Portanto, $M=(2,5)$.

3.4 Equação da Reta

3.4.1 Inclinação e Coeficiente Angular da Reta

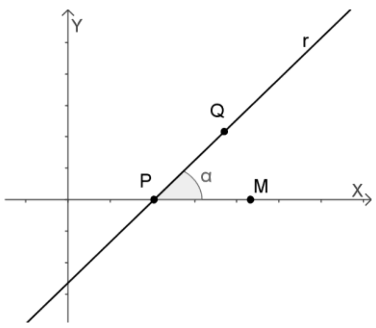
Existem duas formas para determinar de uma reta r, que são:

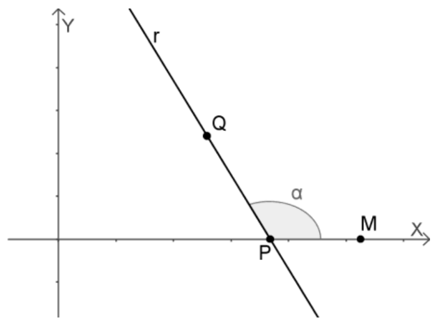
1º Forma: Dados dois pontos distintos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ de uma reta, podemos representá-la no plano cartesiano.

2º Forma: Dado um ponto $P=(x_0,y_0)$ da reta e o ângulo α, que a reta forma com o eixo x, medido no sentido anti-horário.

Vejamos algumas definições para nos ajudar a determinar a equação de uma reta r.

Definição 1: Seja r uma reta do plano cartesiano ortogonal concorrente com o eixo x no ponto $P=(x_0,0)$ e que passa pelo ponto $Q=(x_q,y_q)$, com $y_q>0$. Seja $M(x_m,0)$, com $x_m>x_p$:





Chama-se inclinação da reta r a medida α, com $0° \leq \alpha < 180°$, do ângulo $M\hat{P}Q$ orientado a partir do lado $\overline{PM}$ no sentido anti-horário.

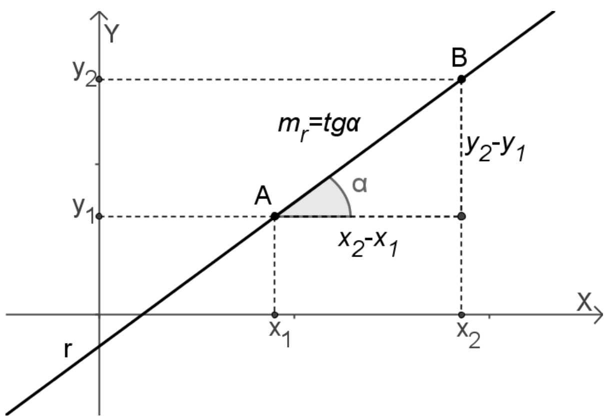
Definição 2: Chama-se ***coeficiente angular*** de uma reta r de inclinação α, com $\alpha \neq 90°$, o número real m_r tal que $m_r = tg\alpha$.

Observação importante para você

Retas verticais não possuem coeficiente angular, pois não existe $tg90°$.

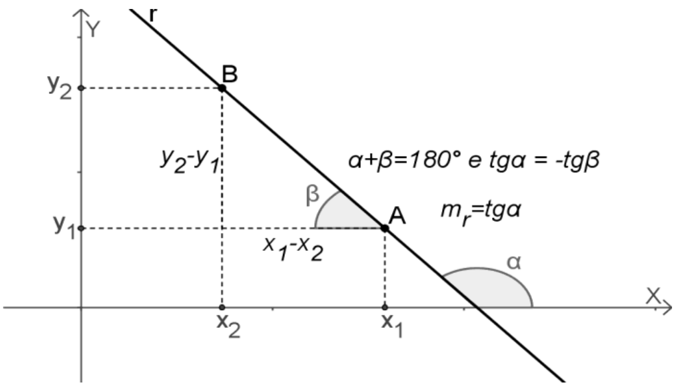
Consideremos dois pontos distintos de $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$ em uma reta r, de inclinação α. Desta forma temos os seguintes casos:

Caso I) $\alpha < 90°$



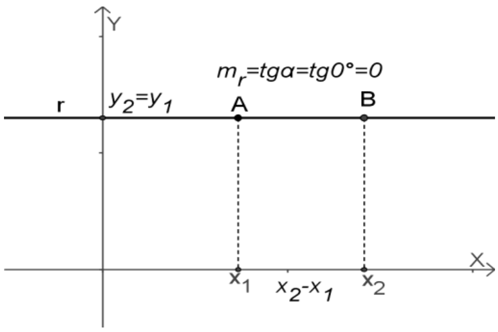
Temos que $m_r = tg\alpha = \dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ e mais, como $0° \leq \alpha \leq 90°$ então $m_r = tg\alpha > 0$.

Caso II) $\alpha > 90°$



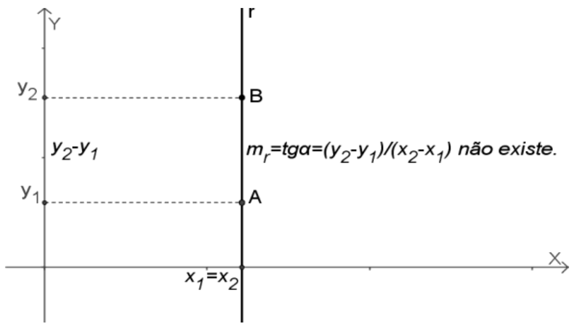
Note que $\alpha + \beta = 180°$, ou seja, α e β são suplementares e assim $tg\alpha = -tg\beta$. Como $tg\beta = \frac{y_2 - y_1}{x_1 - x_2}$, então $m_r = tg\alpha = -\frac{(y_2 - y_1)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}$, e mais, neste caso $m_r = tg\alpha < 0$, pois $\alpha > 90°$.

Caso III) $\alpha = 0°$



Note que $m_r = tg\alpha = tg0° = 0$. Como $y_1 = y_2$ e $x_1 \neq x_2$, então $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0 = tg\alpha$, e assim, podemos dizer que neste caso também vale a relação $m_r = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$.

Caso IV) $\alpha = 90°$



Sabemos que $tg90°$ não existe, ou seja, a reta *r* não possui coeficiente angular.

Portanto dado dois pontos distintos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ de uma reta, teremos $m_r = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, com $\alpha \neq 90°$.

O resultado a seguir, nos dará um meio de sabermos se três pontos estão alinhados ou não, vejamos.

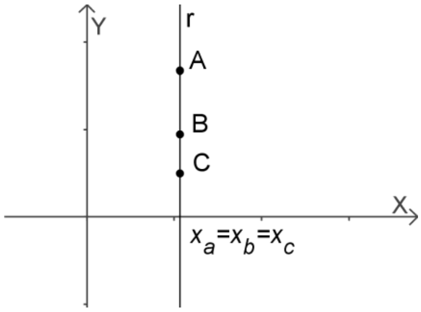
Teorema 1: Três pontos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e C=(x_3,y_3) são colineares se, e somente se, $m_{AB}=m_{BC}$ ou não existem m_{AB} e m_{BC}.

Demonstração:

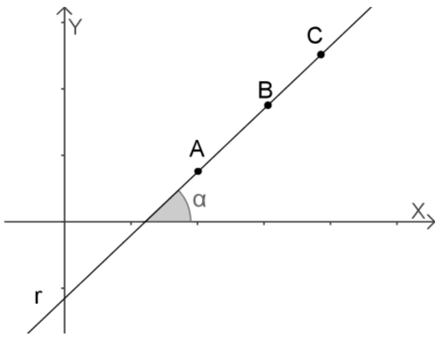
Primeiramente iremos mostrar que:

$$A,B,C \text{ são colineares } \Rightarrow m_{AB}=m_{BC} \text{ ou não existir } m_{AB} \text{ e } m_{BC}.$$

Observe, pela figura abaixo, que se *A, B* e *C* pertencem a uma única reta vertical, então $x_1=x_2=x_3$ e assim $m_{AB}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ e $m_{BC}=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$ não existem.



Se A, B e C pertencem a uma reta não vertical com inclinação $\alpha(\alpha \neq 90°)$, então $m_{AB}=tg\alpha$ e $m_{BC}=tg\alpha$, isto é, $m_{AB}=m_{BC}$ como mostra a figura abaixo.



Mostraremos agora a recíproca, ou seja:

$$m_{AB}=m_{BC} \text{ ou não existir } m_{AB} \text{ e } m_{BC} \Rightarrow A,B,C \text{ são colineares}.$$

Se $m_{AB}=m_{BC}$, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas, as quais possuem o ponto B em comum e, portanto, os pontos A, B e C são colineares.

Se m_{AB} e m_{BC} não existem, então as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são verticais e, portanto, são paralelas. Ora, se as retas $\overleftrightarrow{AB}$ e $\overleftrightarrow{BC}$ são paralelas e têm o ponto B em comum, então são coincidentes e assim A, B e C são colineares.

Exemplo 2: Verifique se os pontos $A=(1,6)$, $B=(-2,-6)$ e $C=(3,14)$ são colineares(alinhados).

Resolução:

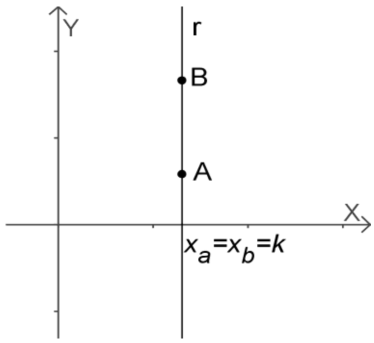
Devemos calcular m_{AB} e m_{BC}. Temos que $m_{AB}=\dfrac{-6-6}{-2-1}=4$ e $m_{BC}=\dfrac{14+6}{3+2}=4$. Como $m_{AB}=m_{BC}$ então os pontos A, B e C estão alinhados.

3.4.2 Equação Fundamental, Equação Reduzida e Equação Geral da Reta

Sabemos que dois pontos distintos A e B determinam uma reta, ou seja, dados dois pontos distintos A e B, existe uma única reta que passa pelos dois pontos e mais $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, se $x_2 \neq x_1$.

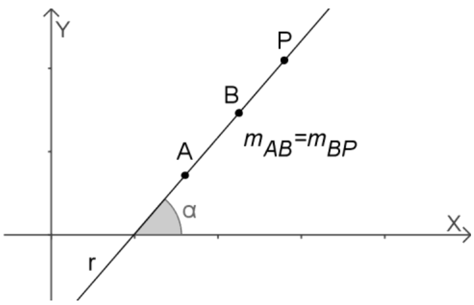
Vamos agora determinar a equação da reta que passa pelos pontos distintos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$. Temos que considerar duas situações:

Caso I) $x_1 = x_2 = k$, ou seja, a reta que passa por A e B é uma reta vertical.



Portanto a reta ***r*** é a reta formada pelos pontos (k, y), ou seja, os pontos de abscissa $x = k$. Neste caso, a equação da reta é $r : x = k$.

Caso II) $x_2 \neq x_1$, ou seja, a reta r que passa pelos pontos A e B não é uma reta vertical.



Considerando $P = (x, y)$ um ponto genérico dessa reta, temos que $m_{AB} = m_{BP}$, pois os pontos A, B e P estão alinhados. Assim, como $m_{AB} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ e $m_{BP} = \frac{y - y_2}{x - x_2}$ então $\frac{y - y_2}{x - x_2} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow \boxed{y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)}$.

Portanto a equação da reta que passa pelos pontos distintos $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ é dado por $y - y_2 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_2)$, ou $y - y_2 = m_r(x - x_2)$ onde $m_r = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ é ***coeficiente angular da reta***. Essa equação é denominada **Equação Fundamental da Reta.**

Observações importantes para você

I) Se escolhermos o ponto particular o ponto $(0,n)$ em que a reta intercepta o eixo y, pela equação anterior teremos: $y-n=m_r(x-0)\Rightarrow y=mx+n$

A equação $y=m_r x+n$ é denominada **Equação Reduzida da Reta** r onde n é chamado ***coeficiente linear***.

II) Caso a reta ***r*** seja horizontal então $m_r=tg0°=0$ e assim teremos $y-y_p=0\left(x-x_p\right)$, ou seja, a equação reduzida da reta horizontal r que passa pelo ponto $P\left(x_p,y_p\right)$ é dada por $y=y_p$.

III) Caso a reta r seja vertical então sua equação será $x=k$, visto no caso (I) anteriormente.

IV) Podemos ainda representar uma reta r através da equação $ax+by+c=0$, oriunda da equação fundamental $y-y_p=m_r\left(x-x_p\right)$. A equação $ax+by+c=0$ é denominada **Equação Geral da Reta** r.

Exemplo 3*:* Determinar as equações da reta ***r*** que passa pelo ponto $P=(4,-3)$ e tem coeficiente angular $m=-2$.

Resolução:

Sabemos que a equação fundamental da reta *r* é dada por: $y-y_p=m\left(x-x_p\right)$ e assim $y-(-3)=-2(x-4)\Rightarrow y=-2x+5$ (**equação reduzida**) ou $2x+y-5=0$ (**equação geral**).

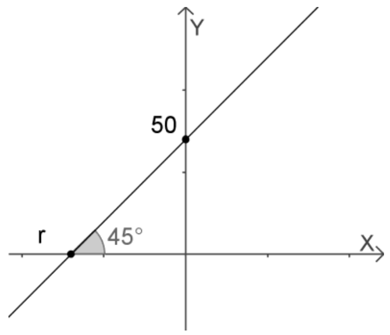
Exemplo 4*:* Determinar as equações da reta ***r*** que passa pelos pontos $A=(2,-3)$ e $B=(4,5)$.

Resolução:

Sabemos que a equação fundamental da reta *r* é dada por: $y-y_p=m\left(x-x_p\right)$ e que $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}$. Daí, teremos $m=\dfrac{5-(-3)}{4-2}=\dfrac{8}{2}=4$ e que $y-5=4(x-4)\Rightarrow y=4x-11$.

Portanto a equação reduzida da reta é dada por r: $y=4x-11$.

Exemplo 5: Determinar a equação da reta r cujo gráfico está representado abaixo:



Resolução: Observe que a reta r passa pelo ponto $P=(0,50)$ e possui coeficiente angular $m_r = tg45° = 1$.

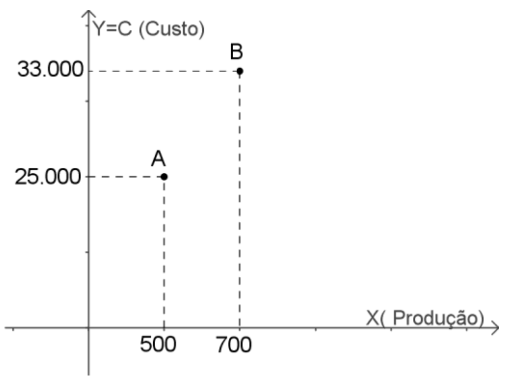
Logo $y-50=1(x-0) \Rightarrow y=x+50$ ou $x-y+50=0$. Portanto a reta r tem como equação geral $x-y+50=0$ e $y=x+50$ é sua equação reduzida.

Exemplo 6: Um gerente de uma loja de bolsas verificou que quando se produzia 500 bolsas por mês, o custo mensal da empresa era R$ 25.000,00 e quando se produzia 700 bolsas o custo era R$ 33.000,00. Sabe-se que cada bolsa é vendida por R$ 52,50.

a) Admitindo que o gráfico do custo mensal (C) em função do número x de bolsas produzido por mês, seja formado por pontos de uma reta, obtenha C em função de x.
b) Seja R a receita mensal obtida pela venda de x unidades produzidas. Obtenha R em função de x.
c) Represente graficamente, num mesmo plano cartesiano, o custo e a receita mensal desta loja de bolsas.

Resolução:

a) Graficamente temos a seguinte situação:



Como o custo mensal (C) é formado por uma reta que passa por A e B então

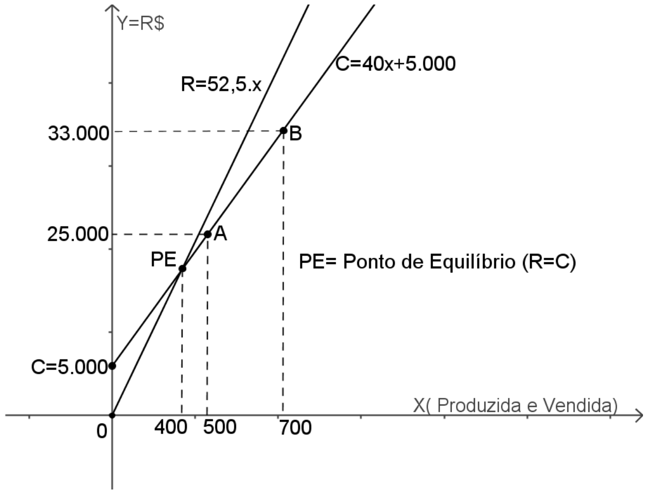
$$m_r = \frac{33.000-25.000}{700-500} = \frac{8000}{200} = 40.$$

Assim a equação da reta é dada por: $y-25000=40(x-500) \Rightarrow y=40x+5000$.

Portanto temos $C=40x+5000$ onde C é o custo mensal e x é a quantidade produzida.

b) A receita (R) pela venda de uma determinada mercadoria nada mais é do que o produto do preço de venda pela quantidade vendida, ou seja, $R = p.q$. Como o preço de venda é de R$ 52,50 a unidade e x representa a quantidade vendida, então $R=52,50.x$.

c) Os gráficos das retas $C = 40x + 5000$ e $R = 52,50.x$ estão representados abaixo:



Observe que as retas $C = 40x + 5000$ e $R = 52,5.x$ estão representadas apenas no 1° quadrante, pois o valor de x que representa a produção e a venda é sempre maior ou igual a zero $(x \geq 0)$.

Logo, se a produção for de zero unidade, a empresa terá um custo de R$ 5.000,00, que, em Economia, é denominado custo fixo, devido ao fato de que existem custos fixos que não dependem da produção como, por exemplo, aluguel, folha de pagamento entre outras.

Ampliando seu conhecimento

O ponto de intersecção entre a Receita (R) e o Custo(C) e é denominado, em Economia, como Ponto de Equilíbrio (PE). Para determinar esse ponto, basta resolver a equação R = C que neste caso encontraremos x = 400 unidades. Este ponto de equilíbrio significa que o lucro obtido pela produção e venda de 400 unidades é zero. Observe pelo gráfico acima, que se x > 400 a empresa obterá lucro e, caso x < 400, a empresa terá prejuízo.

3.4.2.1 Equações Paramétricas da Reta

Vimos que a equação de uma reta pode ser apresentada nas formas: geral, reduzida ou fundamental.

Por exemplo, a equação geral $2x + 4y + 4 = 0$ representa uma reta r.

Observe que se $x = t + 2$, onde $t \in IR$, então $2(t+2) + 4y + 4 = 0 \Rightarrow y = -\frac{1}{2}t - 2$.

Desta forma, a reta r pode ser representada pelas equações

$$\begin{cases} x = t + 2 \\ y = -\frac{t}{2} - 2 \end{cases} \qquad t \in R$$

denominadas **Equações Paramétricas da Reta**.

Generalizando, podemos apresentar as coordenadas de cada ponto $P=(x,y)$ de uma reta *r* em função de um parâmetro *t.*

$$r:\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases},$$

onde $f(t)$ e $g(t)$ são expressões do 1° grau. Estas são as **equações paramétricas** da reta *r*.

Exemplo 7: Considere a reta r representada por suas equações paramétricas, dadas por $r:\begin{cases} x = t+1 \\ y = -2t+3 \end{cases}$, $t \in R$. Determinar a Equação Reduzida e Equação Geral da reta r.

Resolução: Note que se $x = t+1$ então $t = x-1$. Substituindo na segunda equação $y=-2t+3$ teremos, $y=-2(x-1)+3 \Rightarrow y=-2x+5$.

Portanto, a equação reduzida da reta é dada por $y=-2x+5$ e a equação geral da reta é dada por $2x+y-5=0$.

Exemplo 8: Um ponto $P=(x,y)$ descreve uma trajetória no plano cartesiano, tendo sua posição a cada instante t $(t \geq 0)$ dada pelas equações $\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t-2 \end{cases}$. Determine a distância percorrida pelo ponto $P=(x,y)$ para $0 \leq t \leq 3$.

Resolução: Para $t=0$ temos $x = 2 \cdot 0 = 0$ e $y = 3 \cdot 0 - 2 = -2$ e assim obtemos o ponto da reta $P_1=(0,2)$. Analogamente quando $t=3$, teremos $x = 2 \cdot 3 = 6$ e $y = 3 \cdot 3 - 2 = 7$ e obtemos outro ponto da reta *r*, $P_2=(6,7)$.

Desta forma, iremos calcular a distância percorrida pelo ponto $P(x,y)$ (para $0 \leq t \leq 3$) do ponto inicial $P_1=(0,-2)$ $(t=0)$ ao ponto final $P_2=(6,7)$ $(t=3)$.

Logo $d(P_1,P_2)=\sqrt{(6-0)^2+(7-(-2))^2}=\sqrt{36+81}=\sqrt{117}=3\sqrt{13}$. Portanto a distância percorrida pelo ponto $P=(x,y)$ para $0 \leq t \leq 3$ é $3\sqrt{13}$ u.c.

Observação: Como $r:\begin{cases} x = 2t \\ y = 3t-2 \end{cases}$, podemos determinar a equação geral da reta da fazendo $t=\frac{x}{2}$ e assim, $y=\frac{3x}{2}-2 \Rightarrow \frac{3}{2}x-y-2=0$ ou, equivalentemente, $3x - 2y - 4 = 0$.

No Moodle

Acesse a plataforma e você encontrará uma Lição com vários Vídeos Aula para ajudar a você com o conteúdo sobre Retas. Participe também do fórum de discussão para ampliar seu conhecimento sobre Equações da Reta.

Praticando para Aprender

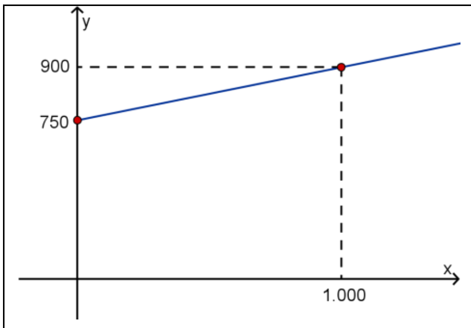
Exercício 3: Escreva a equação reduzida da reta que passa pelos pontos:

$a)\, A=(5,2)\, e\, B=(-1,3)$ $b)\, C=(0,-4)\, e\, D=(1,6)$ $c)\, E=(-12,7)\, e\, F=(-5,2)$

Exercício 4: Se a reta r tem coeficiente angular -6 e coeficiente linear -9, então a equação reduzida da reta r é:

$a)\, y=9x-6$ $b)\, y=-9x-6$ $c)\, y=6x-9$ $d)\, y=-6x-9$ $e)\, y=-2x-3$

Exercício 5: Certa empresa oferece um salário mensal fixo no valor de R$ 750,00 e mais uma comissão que corresponde a 15 % do valor (em reais) das vendas feitas pelo funcionário. O gráfico a seguir apresenta o salário de um funcionário dessa empresa em função do valor (em reais) de suas vendas.



a) Escreva uma função que represente o salário de um funcionário a partir do valor das vendas feitas por ele.

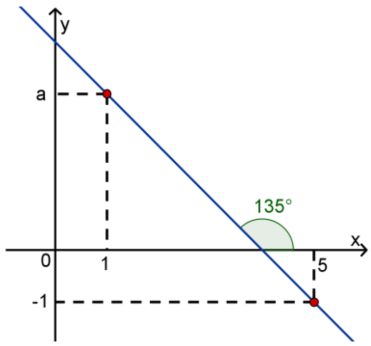
b) Qual é o salário desse funcionário se o valor de suas vendas for de R$ 750,00? E se for R$1.200,00?

c) Quanto deve ser o total das vendas realizadas por um funcionário para que seu salário seja de R$1.800,00?

Exercício 6: (U.Taubaté) A inclinação da reta que passa pelos pontos $A=(3,7)$ e $B=(5,9)$ é:

$a)30^\circ$ $b)\, 45^\circ$ $c)\, 60^\circ$ $d)\, 90^\circ$ $e)135^\circ$

Exercício 7: Obtenha o valor de *a* e do coeficiente angular m, da reta, através do gráfico abaixo:



Exercício 8: (UFMS) Se o ponto $P=(a,b)$ pertence à reta determinada pelos pontos $M=(4,3)$ e $N=(5,1)$, então:

$a)2a-b-5=0$ $b)\, 2a+b-11=0$ $c)\, a+2b-11=0$ $d)\, a-2b+5=0$ $e)\, a+b-7=0$

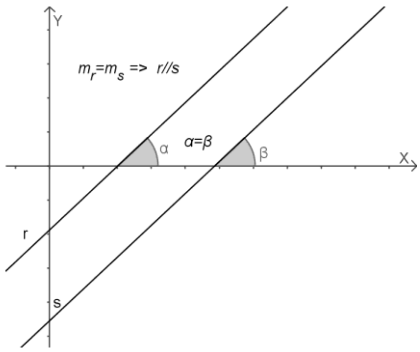
Exercício 9: (UFPE) A equação cartesiana da reta que passa pelo ponto (1,1) e tem inclinação de 60° é:

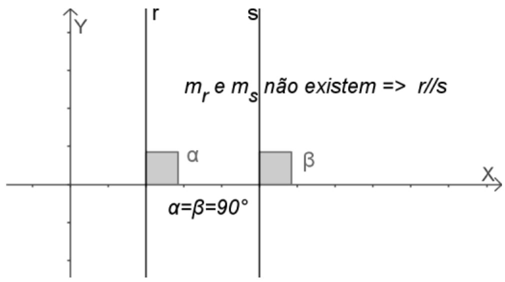
$a)\sqrt{2}\,x-y=\sqrt{2}-1$ $b)\sqrt{3}\,x+y=1-\sqrt{3}$ $c)\sqrt{3}\,x-y=\sqrt{3}-1$

$d)\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+y=1-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $e)\dfrac{\sqrt{3}}{2}x-y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}-1$

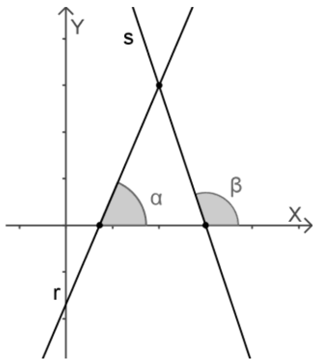
3.5 Posição Relativa de Duas Retas

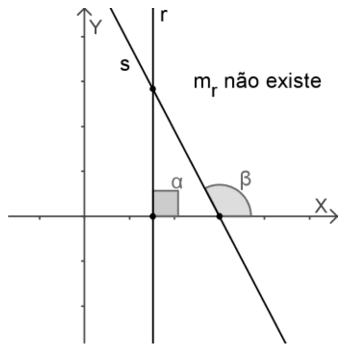
Duas retas r e s contidas no mesmo plano são coincidentes, paralelas ou concorrentes. Desta forma, note que duas retas r e s são paralelas ou coincidentes se, e somente se, possuem o mesmo coeficiente angular $\left(m_r = m_s\right)$, ou não existem m_r e m_s.



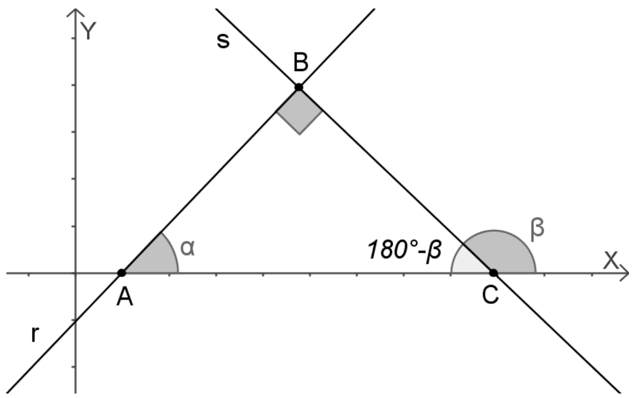


Conseqüentemente, duas retas são concorrentes se $m_r \neq m_s$ ou somente um dos coeficientes m_r ou m_s, não existe.





Um caso de retas concorrentes é quando $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{s}$ são perpendiculares.



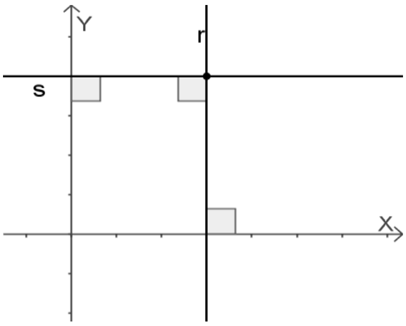
Sabemos que $m_r = tg\alpha$ e $m_s = tg\beta$, e mais, que a soma dos ângulos internos do triângulo ABC é180° e assim $\beta = 90° + \alpha$.

Desta forma, $tg\beta = tg\left(90° + \alpha\right) = \dfrac{sen\left(90° + \alpha\right)}{\cos\left(90° + \alpha\right)}$. Da trigonometria, temos que $sen\left(90° + \alpha\right) = \cos\alpha$, $\cos\left(90° + \alpha\right) = -sen\alpha$ e $\cot g\alpha = \dfrac{1}{tg\alpha}$, assim:

$tg\beta = \dfrac{\cos\alpha}{-sen\alpha} = -\cot g\alpha = -\dfrac{1}{tg\alpha}$, ou seja, $m_s = -\dfrac{1}{m_r} \Leftrightarrow m_r . m_s = -1$.

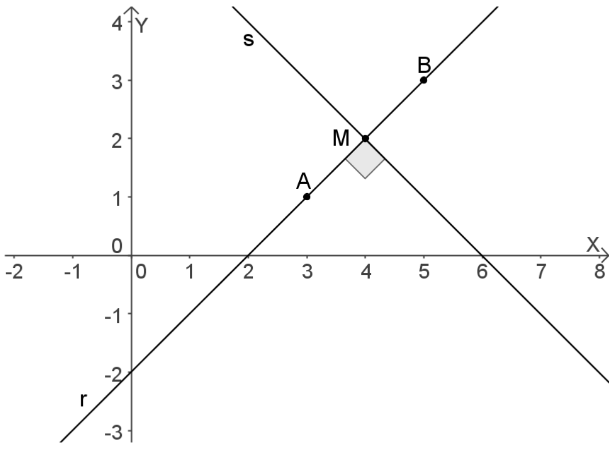
Portanto, duas retas, nenhuma delas vertical, são perpendiculares se, e somente se, o coeficiente angular de uma delas for oposto do inverso do coeficiente angular da outra, ou seja, $m_s = -\dfrac{1}{m_r}$.

Note que, sendo r uma reta vertical, uma reta s é perpendicular a r se, e somente se, s é horizontal ($m_s = 0$).



Exemplo 9: Qual é a equação reduzida da reta mediatriz do segmento $\overline{AB}$, dados $A = \left(3{,}1\right)$ e $B = \left(5{,}3\right)$?

Resolução: A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é a reta que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$ e é perpendicular a reta $\overleftrightarrow{AB}$.



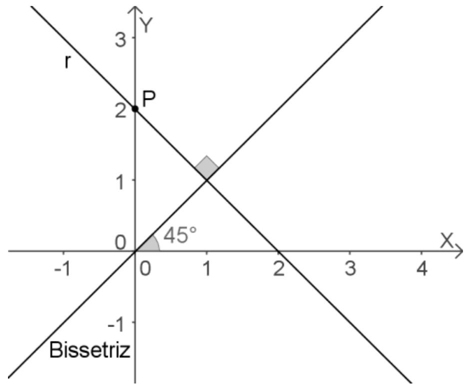
Temos que $M=\left(\frac{3+5}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(4,2)$, $m_{AB}=\frac{3-1}{5-3}=\frac{2}{2}=1$ e que $m_s=-\frac{1}{m_{AB}}=-1$.

Pela equação fundamental da reta, $y-y_M=m_s\left(x-x_M\right)$ e assim $y-2=-1(x-4)$.

Portanto, a equação reduzida da mediatriz é $s: y=-x+6$.

Exemplo 10: A reta ***r*** perpendicular à bissetriz dos quadrantes impares (1º e 3º) e intercepta um eixo coordenado no ponto $P=(0,2)$. Escreva a equação geral da reta r.

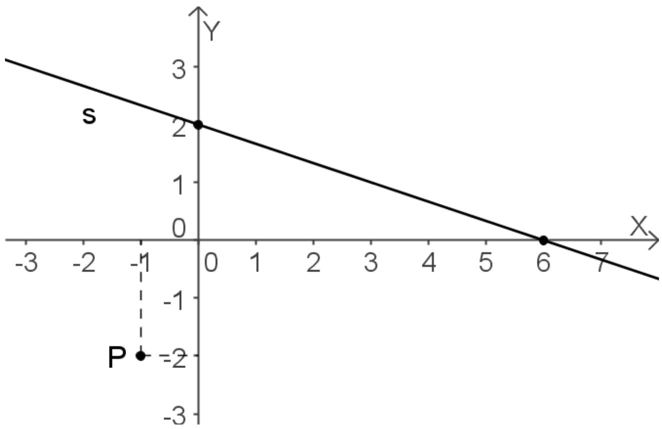
Resolução: Observe a ilustração gráfica abaixo.



Para encontrar a equação geral da reta ***r*** precisamos do coeficiente angular m_r e do ponto da reta $P=(0,2)$. Como ***r*** é perpendicular a s então $m_r=-\frac{1}{m_s}$. Pelo gráfico acima $m_s=tg45°=1$ e assim $m_r=-1$.

A equação fundamental é dada por $y-y_p=m_r\left(x-x_p\right)$. Logo $r: y-2=-1(x-0)$ e, portanto a equação geral da reta r é $x+y-2=0$.

Exemplo 11: Determine a equação reduzida da reta r que passa pelo ponto $P=(-1,-2)$ e é perpendicular á reta s representada no gráfico abaixo.

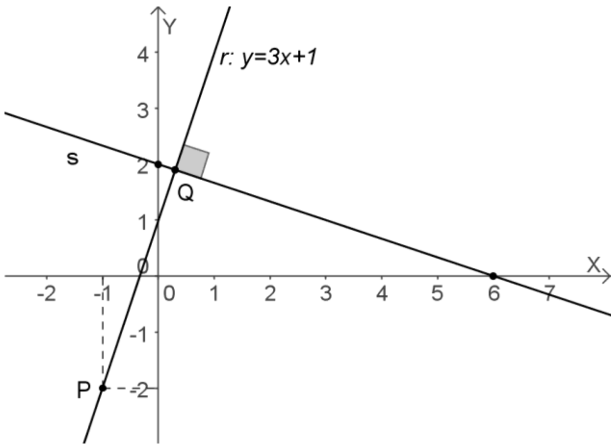


Resolução:

Para determinar a equação da reta que passa por $P=(-1,-2)$ e que é perpendicular à reta s precisamos determinar m_r, dado por $m_r=-\dfrac{1}{m_s}$. Como a reta s passa pelos pontos $A=(6,0)$ e $B=(0,2)$, então $m_s=\dfrac{2-0}{0-6}=\dfrac{2}{-6}=-\dfrac{1}{3}$.

Assim $m_r=-\dfrac{1}{(-\frac{1}{3})}=3$. Desta forma pela equação fundamental da reta teremos:

$r: y-(-2)=3(x-(-1)) \Rightarrow r: \boxed{y=3x+1}$ que é a equação reduzida da reta (ver figura abaixo).



Caso você queira determinar o ponto Q, que é a intersecção entre as retas r e s, procederemos da seguinte forma.

Primeiramente, precisamos da equação da reta s. Como s passa pelo ponto $A=(6,0)$ e $m_s=-\dfrac{1}{3}$ então $s: y-0=-\dfrac{1}{3}(x-6) \Rightarrow s: \boxed{y=-\dfrac{1}{3}x+2}$.

Assim, como $Q\in r$ e $Q\in s$ então o ponto Q será a solução do sistema:

$$\begin{cases} y=3x+1 & (\text{reta } r) \\ y=-\dfrac{1}{3}x+2 & (\text{reta } s) \end{cases}.$$

Teremos $3x+1=-\dfrac{1}{3}x+2 \Rightarrow x=\dfrac{3}{10}$ e conseqüentemente $y=\dfrac{19}{10}$.

Portanto o ponto de interseção das retas r e s é o ponto $Q=\left(\dfrac{3}{10},\dfrac{19}{10}\right)$.

Praticando para Aprender

Exercício 10: Sejam as retas $q:\dfrac{1}{2}x+3=y$, $r:3-2x-y=0$, $s:3y+2x=6$ e $t:2y-x-6=0$. Determine a posição relativa entre as retas:

a) q e s b) r e t c) t e q d) s e r

Exercício 11: Em um plano cartesiano, construa um triângulo cujos vértices são os pontos de interseção das retas $r: y=8$, $s: 2x-2y+4=0$ e $t: y+x=-4$, e determine a área desse triângulo.

3.6 Estudo Complementar da reta

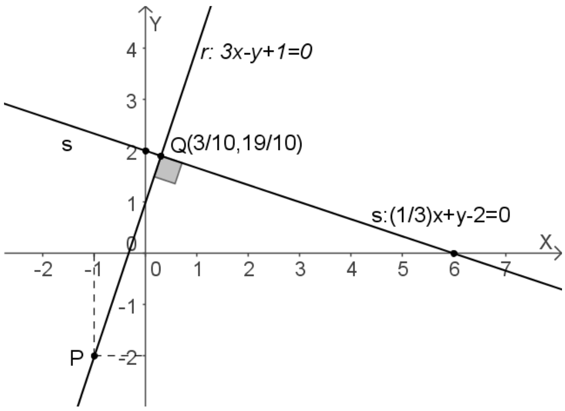
3.6.1 Distância Entre Ponto e Reta

A distância de um ponto P a uma reta r, denotada por $d(P,r)$, é definida como sendo a menor distância entre o ponto P e a reta r.

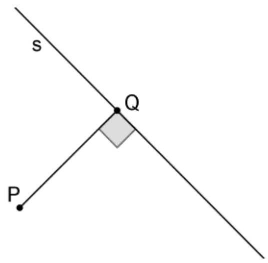
Veja que se o ponto P pertença à reta r, então $d(P,r)=0$.

Agora, caso o ponto P não pertença a reta r, então a distância entre um ponto P a uma reta r é a distância entre P e Q, onde Q é a projeção ortogonal de P sobre r.

Por exemplo, no exemplo 11 encontramos a equação da reta r que passa pelo ponto $P=(-1,-2)$ e é perpendicular à reta $s: \frac{1}{3}x+y-2=0$.



O ponto $Q=\left(\frac{3}{10},\frac{19}{10}\right)$ é a intersecção das retas r e s, e o segmento $\overline{PQ}$ é a projeção ortogonal de P sobre a reta s.



Vamos calcular a distância do ponto $P=(-1,-2)$ ao ponto $Q=\left(\frac{3}{10},\frac{19}{10}\right)$.

Neste caso, temos $d(P,Q)=\sqrt{\left(\frac{3}{10}-(-1)\right)^2+\left(\frac{19}{10}-(-2)\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{13}{10}\right)^2+\left(\frac{39}{10}\right)^2}=$

$$=\sqrt{\frac{169}{100}+\frac{1521}{100}}=\sqrt{\frac{1690}{100}}=\frac{13}{\sqrt{10}}=\frac{13\sqrt{10}}{10}.$$

Portanto a distância entre o ponto $P=(-1,-2)$ e a reta $s:\frac{1}{3}x+y-2=0$ é $d(P,s)=\frac{13\sqrt{10}}{10}$ u. c.

Generalizando o raciocínio utilizado no exemplo 11, obtemos o resultado descrito pelo teorema a seguir.

Teorema 2: A distância *d* entre um ponto $P=(x_0,y_0)$ e uma reta $r: ax+by+c=0$ é dada por:

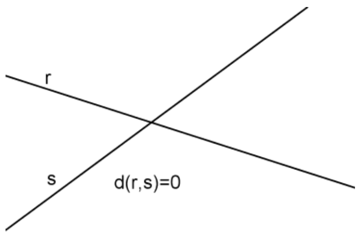
$$d=d(P,r)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

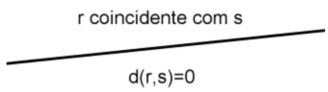
Devido à extensão, não apresentaremos a demonstração deste teorema. No entanto, na disciplina de Cálculo Vetorial você encontrará este teorema com uma demonstração bastante simples.

Exemplo 12: Calcular a distância entre as retas $r: 2x+y+4=0$ e $s: 4x+2y-6=0$.

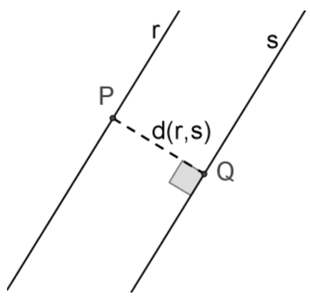
Resolução:

Primeiramente vamos verificar a posição relativa entre as retas pois, caso as retas sejam concorrentes ou coincidentes, a distância entre elas será zero.





Caso as retas r e s sejam paralelas, vamos calcular a distância entre elas tomando um ponto P qualquer de uma delas e calculamos a distância do ponto P a outra reta.



Pelas equações das retas r e s dadas, encontramos $m_r=-2=m_s$, pois $r: y=-2x-4$ e $s: y=-2x+3$, e assim r // s.

Fazendo $x=1$ na equação da reta r encontraremos $y=-6$, ou seja, o ponto $P=(1,-6)$ pertence a reta *r*.

Como $d(P,s)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, onde $P=(1,-6)$ e $s:4x+2y-6=0$, então

$$d(r,s)=d(P,s)=\frac{|4.1+2.(-6)-6|}{\sqrt{4^2+2^2}}=\frac{7\sqrt{5}}{5}.$$

Portanto, a distância *d* entre *r* e *s* é $d=d(r,s)=\frac{7\sqrt{5}}{5}$.

No Moodle

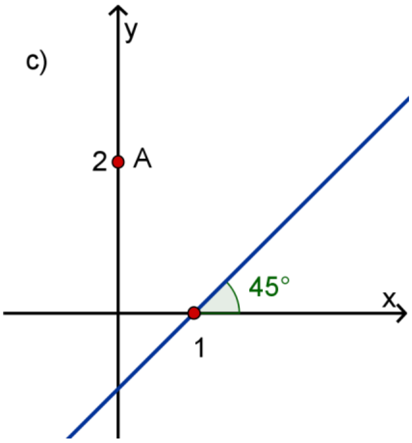
Faremos algumas aplicações da teoria dos determinantes na geometria analítica. Tal teoria vai nos ajudar no cálculo de áreas de polígonos bem como estabelecer uma condição para o alinhamento de três pontos. Acesse a Plataforma Moodle para encontrar diversos problemas envolvendo este conteúdo. Você encontrará também uma Lição com vários Vídeos Aula para ajudar a você com o conteúdo sobre Posição Relativas entre Duas Retas. Participe também do fórum de discussão para ampliar seu conhecimento sobre Equações da Reta.

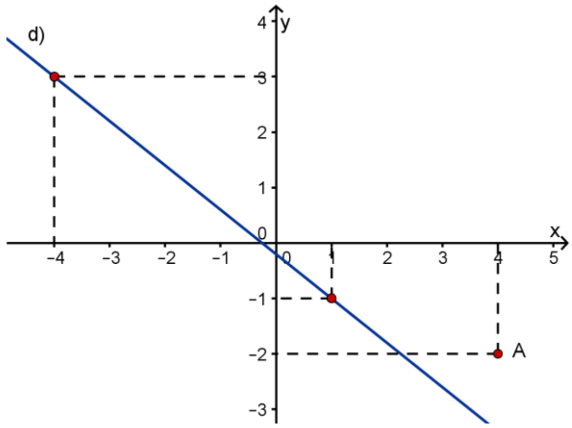
Praticando para Aprender

Exercício 12: Determine a distância entre as retas paralelas $r:12x-5y-2=0$ e $s:12x-5y+24=0$.

Exercício 13: Em cada item, calcule a distância entre o ponto A e a reta r.

a) $A=(2,2)$ e $r:2y+x-1=0$ b) $A=(-1,3)$ e $r:y-3x+6=0$





3.6.2 Condição de Alinhamento de Três Pontos

Considere três pontos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e C=(x_3,y_3).

A equação da reta *r* que passa pelos pontos $B=(x_2,y_2)$ e C=(x_3,y_3) é dada por:

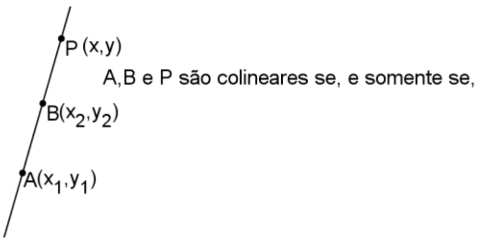
$r: y-y_2=\dfrac{y_3-y_2}{x_3-x_2}(x-x_2)$. E assim:

$$(x_3-x_2)(y-y_2)=(y_3-y_2)(x-x_2)\Rightarrow$$
$$\Rightarrow x_3.y-x_3.y_2-x_2.y+\cancel{x_2.y_2}-y_3.x+y_3.x_2+y_2.x-\cancel{y_2.x_2}=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow (y_2-y_3).x+(x_3-x_2).y+(x_2y_3-x_3y_2)=0\Rightarrow$$
$$\Rightarrow \underbrace{(y_2-y_3)}_{a}.x+\underbrace{(x_3-x_2)}_{b}.y+\underbrace{(x_2y_3-x_3y_2)}_{c}=0.$$

Se os pontos *A, B* e *C* estiverem alinhados então o ponto $A=(x_1,y_1)$ pertence à reta *r* e, desta forma, satisfaz à equação $(y_2-y_3).x+(x_3-x_2).y+(x_2y_3-x_3y_2)=0$ e assim teremos a igualdade $(y_2-y_3).x_1+(x_3-x_2).y_1+(x_2y_3-x_3y_2)=0$. Essa igualdade nada mais é do $\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}=0$.

Acabamos de demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 3: Três pontos $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$e C=(x_3,y_3) são colineares se, e somente se, $\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{bmatrix}=0$.



$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{bmatrix}=0\cdot$$

Como conseqüência do teorema acima, podemos encontrar a **equação geral** de uma reta que passa pelos pontos distintos $A=(x_1,y_1)$ e $B=(x_2,y_2)$.

Se $P=(x,y)$ é um ponto genérico da reta *r* que passa por A e B. Então P, A e B são colineares e assim pelo teorema 3 temos: $\det\begin{bmatrix} x & y & 1\\ x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\end{bmatrix}=0$.

Calculando o determinante acima obtemos $\underbrace{(y_2-y_3)}_{a}.x+\underbrace{(x_3-x_2)}_{b}.y+\underbrace{(x_2y_3-x_3y_2)}_{c}=0$ que representa a **equação geral** da reta *r*.

3.6.3 Área de um Triângulo

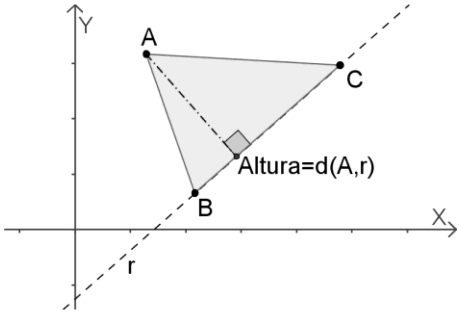
Veremos um teorema a seguir, o qual nos ajudará a determinar a área de qualquer triângulo *ABC*.

Teorema 4: A área de um triângulo cujos vértices são $A=(x_1,y_1)$, $B=(x_2,y_2)$ e $C=(x_3,y_3)$ é dada por:

$$A=\frac{|D|}{2}\text{, onde } D=\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Demonstração:

Observe a figura abaixo:



Note que a área do triângulo *ABC* é dada por $A_\Delta=\frac{d(B,C).d(A,r)}{2}$, onde $d(B,C)$ é a distância entre os pontos B e C e $d(A,r)$ é a distância do ponto A à reta *r* que passa pelos pontos B e C.

Temos que, $d(B,C)=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$, e que a equação geral da reta *r*, que passa por B e C, é dada por:

$$\det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}=0\Rightarrow r:\underbrace{(y_2-y_3)}_{a}.x+\underbrace{(x_3-x_2)}_{b}.y+\underbrace{(x_2y_3-x_3y_2)}_{c}=0.$$

Calculando a distância entre o ponto $A=(x_1,y_1)$ e a reta *r* pelo teorema 2, encontramos:

$$d(A,r)=\frac{\left|\overbrace{(y_2-y_3)x_1+(x_3-x_2)y_1+(x_2y_3-x_3y_2)}^{D}\right|}{\underbrace{\sqrt{(y_3-y_2)^2+(x_3-x_2)^2}}_{d(B,C)}}.$$

Como já vimos, $(y_2-y_3).x_1+(x_3-x_2).y_1+(x_2y_3-x_3y_2)=\det\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}=D$ e que

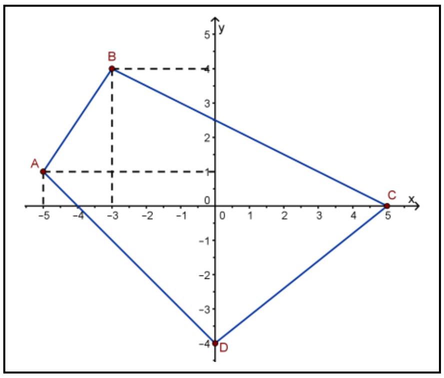
$d(B,C)=\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}$, então $A_\Delta=\frac{1}{2}d(B,C).d(A,r)=\frac{1}{2}\cancel{d(B,C)}.\frac{|D|}{\cancel{d(B,C)}}$.

Portanto a área de um triângulo cujos vértices são A, B e C é $A_\Delta=\frac{|D|}{2}$.

Exercício 14: Usando a condição de alinhamento por determinante, verifique se os pontos A, B e C são ou não colineares nos seguintes casos:

$a)\ A=(0,-1),\ B=(3,5)\ e\ C=(1,1)$ $\qquad$ $b)\ A=(4,5),\ B=(1,0)\ e\ C-(2,3)$

Exercício 15: Calcule a área do quadrilátero ABCD do gráfico abaixo:



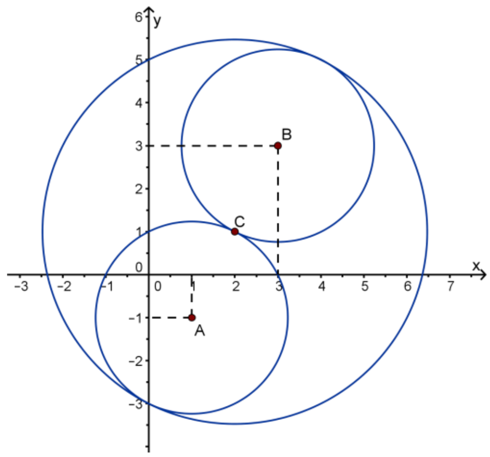
Exercício 16: (UEMA) Um valor de k , de modo que a área do triângulo determinado pelos pontos $A=(0,1),\ B=(-2,4)$ e $C=(k,k-1)$ seja 10 unidades é:

$a)k=3$ $\qquad$ $b)k=4$ $\qquad$ $c)k=-\dfrac{16}{5}$ $\qquad$ $d)k=-3$ $\qquad$ $e)k=\dfrac{3}{4}$

Exercício 17: (Unicamp-SP)Considere, no plano xy, as retas $y=1$, $y=2x-5$ e $x-2y+5=0$.

a) Quais são as coordenadas dos vértices do triângulo ABC formado por essas retas?
b) Qual é a área do triângulo ABC?

Exercício 18: Considere as circunferências de centros em A e B, de mesmo raio e tangentes em C. Considere também a circunferência de centro C.



a) Determine as coordenadas do ponto C.

b) Qual é o raio da circunferência com centro em C?

c) Determine a equação da reta que passa pelos pontos A e B.

4 Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade fizemos o estudo do ponto e da reta. Amplie sua visão sobre o assunto desta unidade visitando sempre o Moodle e pesquisando na bibliografia sugerida. Os assuntos aqui são tratados de forma sucinta. Cabe a você procurar expandir seu conhecimento sempre resolvendo os exercícios deixados na plataforma e tirando suas dúvidas com os professores tutores. Acesse a plataforma Moolde e acompanhe as discussões sobre o conteúdo nos fóruns.

Resumo da Unidade 4

Pontos que eu considero importantes:

✓ ____
____

✓ ____
____

✓ ____
____

Ideias que posso aplicar nos meus estudos	O que eu não posso esquecer!!
	•
	•
	•
Ideias que posso aplicar no meu trabalho	•
	•
	•
	•

Minha Agenda

Atividades no Moodle	Data de encerramento

Unidade 5

Geometria Analítica II: Estudo das Cônicas

1 Situando a Temática

As cônicas foram de fundamental importância para o desenvolvimento da astronomia, sendo descritos na antiguidade por Apolônio de Perga, um geômetra grego. Mais tarde, Kepler e Galileu mostraram que essas curvas ocorrem em fenômenos naturais como nas trajetórias de um projétil ou de um planeta.

2 Problematizando a Temática

Vimos nas seções anteriores, por exemplo, que a equação $-2x+5y+8=0$ representa uma reta *r* no plano cartesiano. Do mesmo modo como fizemos com a reta *r*, vamos aqui associar a cada cônica (circunferência, elipse, parábola e hipérbole) uma equação e, a partir daí, estudar as suas propriedades.

3 Conhecendo a Temática

3.1 Preliminares: Completamento de Quadrado

Antes de iniciarmos o estudo da cônicas, apresentaremos um procedimento conhecido como Completamento de Quadrado. Na álgebra elementar, o completamento de quadrado é uma técnica para converter um polinômio quadrático da forma ax^2+bx+c para a forma $a(x-m)^2+k$, ou $a(x+m)^2+k$, onde m,k são constantes a serem determinadas. Em matemática, o completamento de quadrado é considerado uma operação algébrica básica, e geralmente é aplicada sem qualquer indicação durante os cálculos envolvendo polinômios quadráticos.

Antes de descrevermos como faremos o completamento de quadrados, observe que $(x-m)^2=x^2-2mx+m^2$ e que $(x+m)^2=x^2+2mx+m^2$. Note que, $(x-4)^2=x^2-8x+16$ e assim teremos $x^2-8x=(x-4)^2-16$. Veja a seguir o passo-a-passo do processo de completamento de quadrado.

Passo-a-Passo para o Completamento de Quadrado

Para entender o Passo-a-Passo do processo de completamento de quadrado, vejamos como se dá o processo de completamento de quadrado para a seguinte expressão $x^2 - 8x$.

Passo 1: Extraímos a raiz do primeiro termo:

$$\underbrace{x^2}_{\sqrt{x^2}=x} - 8x$$

Passo 2: Com base no segundo termo, $8x$, resolva a equação $2m = 8$, para determinar o valor de m:

$$\underbrace{x^2}_{\sqrt{x^2}=x} - \underbrace{8x}_{\substack{2m=8 \\ \boxed{m=4}}}$$

Passo 3: Adicionamos e subtraímos o termo m^2 na expressão $x^2 - 8x$:

$$\underbrace{x^2}_{\sqrt{x^2}=x} - \underbrace{8x}_{\substack{2m=8 \\ \boxed{m=4}}} = x^2 - 8x + 4^2 - 4^2$$

Passo 4: Perceba agora que os três primeiros termos $x^2 - 8x + 4^2$ formam um **trinômio quadrado perfeito**. Fatorando esse termo teremos:

$$\underbrace{x^2}_{\sqrt{x^2}=x} - \underbrace{8x}_{\substack{2mx=8x \\ \boxed{m=4}}} = \underbrace{x^2 - 8x + 4^2}_{(x-4)^2} - 4^2 = (x-4)^2 - 16$$

$$x^2 - 8x = (x-4)^2 - 16$$

Sinais iguais

Exemplo 1: Utilize o completamento de quadrado para transformar a expressão $y^2 + 6y$ na forma $(y+m)^2 - m^2$.

Resolução: Utilizado os passos descritos acima teremos:

$$\underbrace{y^2}_{\sqrt{y^2}=y} + \underbrace{6y}_{\substack{2m=6 \\ m=3}} = y^2 + 6y \underbrace{+3^2 - 3^2}_{\text{Completamento de Quadrado}} = (y+3)^2 - 9.$$

Portanto, $y^2 + 6y = (y+3)^2 - 9$.

Exemplo 2: Utilize o completamento de quadrado para transformar a expressão $2x^2+8x$ na forma $a(x+m)^2+k$.

Resolução: Neste caso, iremos inicialmente colocar o valor 2 em evidência na expressão $2x^2+8x$ e assim, $2x^2+8x=2(x^2+4x)$. O que faremos é o completamento de quadrado no termo x^2+4x e depois multiplicaremos por 2.

Note que, $\underset{\sqrt{x^2}=x}{x^2} + \underset{\substack{2m=4 \\ m=2}}{4x} = x^2+4x\underbrace{+2^2-2^2}_{\substack{Completamento\,de \\ Quadrado}} = (x+2)^2-4$.

Desta forma, $x^2+4x=(x+2)^2-4$ então

$$2x^2+8x=2(x^2+4x)=2\left[(x+2)^2-4\right]=2(x+2)^2-8.$$

Portanto, $2x^2+8x=2(x+2)^2-8$.

No Moodle

Na Plataforma Moodle você encontrará uma lição que contém vários vídeos aula envolvendo completamento de quadrado. Aproveite para exercitar já que trabalharemos essa ferramenta com bastante freqüência.

Praticando para Aprender

Exercício 1: Complete agora, o quadrado de cada expressão, colocando-a na forma $(x+m)^2+k$.

$a)x^2+6x$ $b)x^2-10x$ $c)x^2-5x$ $d)x^2-12x-10$ $e)x^2-2x-5$

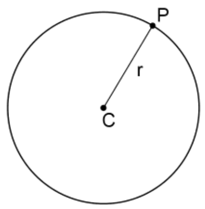
$f)x^2+3x+4$ $g)4x^2+8x$ $h)7x^2-21x+2$ $i)16x^2+8x+1$ $j)4x^2-5x+6$

Exercício 2: Resolva as equações abaixo, conforme ilustrado no exemplo da primeira linha do quadro abaixo.

$a)x^2+6x-16=0$	$x^2+6x+9-9-16=0$	$(x+3)^2-25=0$	$(x+3)^2=25$	$x=2$ *ou* $x=-8$
$b)x^2-8x+12=0$				
$c)x^2+10x-75=0$				
$d)x^2-16x+15=0$				
$e)x^2-6x+7=0$				
$f)x^2-5x+6=0$				

3.2 Circunferência

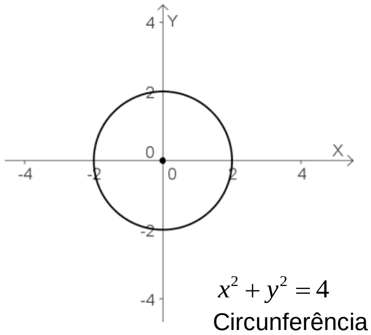
Sabemos da geometria elementar que circunferência é o conjunto de todos os pontos eqüidistantes de um ponto fixo $C=(x_0,y_0)$ denominado centro da circunferência.



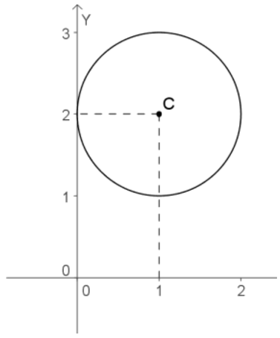
Considerando o centro da circunferência como sendo o ponto $C=(x_o,y_o)$, r sendo o raio e $P=(x,y)$ um ponto da circunferência, temos:

$$d(C,P)=\sqrt{(x-x_o)^2+(y-y_o)^2}=r \Rightarrow (x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2.$$

Portanto, uma circunferência de centro $C=(x_o,y_o)$ e raio r tem equação $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2$, denominada **Equação Reduzida** da circunferência.



$x^2+y^2=4$
Circunferência
de centro C=(0,0)
e raio 2.



$(x-1)^2+(y-2)^2=1$
Circunferência
de centro C=(1,2)
e raio 1.

Desenvolvendo a equação reduzida $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2$ temos: $x^2+y^2-2x_ox-2y_oy+x_o{}^2+y_o{}^2-r^2=0$. Esta equação é chamada **equação geral** da circunferência.

Exemplo 3: Determine o centro e o raio da circunferência $x^2+y^2-4x-8y+19=0$.

Resolução:

Da equação geral $x^2+y^2-4x-8y+19=0$, vamos encontrar a equação reduzida $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2$.

Vamos utilizar o processo de completamento de quadrado. Para isso, lembramos que $x^2-2x_ox+x_o{}^2=(x-x_o)^2$ e $y^2-2y_oy+y_o{}^2=(y-y_o)^2$.

Com base na equação $x^2+y^2-4x-8y+19=0$ separamos os termos que envolvam as variáveis *x* e *y*, da seguinte forma:

I) $\underset{\substack{2x_o=4\\x_o=2}}{x^2 \ -4\ x} = \underbrace{x^2-4x+2^2}_{(x-2)^2}-2^2=\left(x-2\right)^2-4$ e II) $\underset{\substack{2y_o=8\\y_o=4}}{y^2 \ -8\ y} = \underbrace{y^2-8y+4^2}_{(y-4)^2}-4^2=\left(y-4\right)^2-16$

Desta maneira, de (I) e (II) temos:

$x^2 + y^2 - 4x - 8y + 19 = 0 \Rightarrow x^2 - 4x + y^2 - 8y + 19 = 0 \Rightarrow (x-2)^2 - 4 + (y-4)^2 - 16 + 19 = 0$

$\Rightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$

Logo, a equação $\left(x-2\right)^2+\left(y-4\right)^2=1$ é de uma circunferência de centro $C=\left(2,4\right)$ e raio = 1.

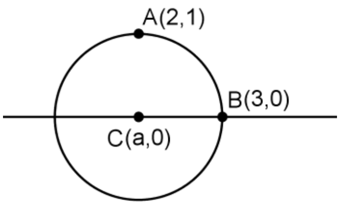
Exemplo 4: Determine a equação da circunferência que passa pela origem e tem centro no ponto C = (3,4).

Resolução: A equação da circunferência é $\left(x-x_o\right)^2+\left(y-y_o\right)^2=r^2$. Como esta circunferência tem centro no ponto C = (3,4) então $\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=r^2$. A origem (0,0) é um ponto da circunferência e assim podemos escrever:

$$\left(0-3\right)^2+\left(0-4\right)^2=r^2 \Rightarrow 9+16=r^2 \Rightarrow \boxed{r^2=25}.$$

Portanto, $\left(x-3\right)^2+\left(y-4\right)^2=25$ é a equação da circunferência pedida.

Exemplo 5: A circunferência representada no gráfico abaixo passa pelos pontos A e B. Determine sua equação reduzida.



Resolução:

A equação reduzida da circunferência de centro $C=\left(x_0,0\right)$ é $\left(x-x_o\right)^2+\left(y-0\right)^2=r^2$. Como $A=\left(2,1\right)$ e $B=\left(3,0\right)$ pertencem à circunferência, temos:

$$(I)\ \left(2-x_o\right)^2+1^2=r^2 \qquad (II)\ \left(3-x_o\right)^2+0=r^2$$

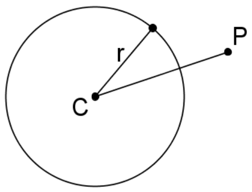
De (I) e (II) temos $\left(2-x_o\right)^2+1=\left(3-x_o\right)^2$, ou seja, $4-4x_o+\cancel{x_o^2}+1=9-6x_o+\cancel{x_o^2}$ e, portanto $x_o=2$. Desta forma, a equação reduzida da circunferência é $\left(x-2\right)^2+y^2=r^2$.

Vamos determinar o valor de r^2. Para isso lembramos que o ponto B = (3,0) pertence à circunferência, assim: $\left(3-2\right)^2+0^2=r^2 \Rightarrow \boxed{1=r^2}$.

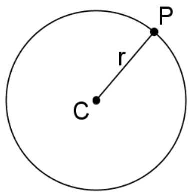
Portanto $\left(x-2\right)^2+y^2=1$ é a equação reduzida da circunferência pedida.

3.2.1 Posição de um Ponto em Relação a uma Circunferência

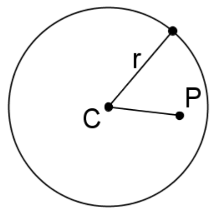
Em relação à circunferência $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2$, um ponto $P=(m,n)$ pode ocupar as seguintes posições:



P é exterior à circunferência se, e somente se, $d(P,c)>r$, ou seja, $(m-x_o)^2+(n-y_o)^2>r^2$.
(Figura 1)



P pertence à circunferência se, e somente se, $d(P,c)=r$, ou seja, $(m-x_o)^2+(n-y_o)^2=r^2$.
(Figura 2)



P é interior à circunferência se, e somente se, $d(P,c)<r$, ou seja, $(m-x_o)^2+(n-y_o)^2<r^2$.
(Figura 3)

Assim para determinar a posição de um ponto $P=(m,n)$ em relação a uma circunferência, basta substituir as coordenadas desse ponto na expressão $(x-x_o)^2+(y-y_o)^2$ e observar que:

1º caso: Se $(m-x_o)^2+(n-y_o)^2>r^2$, P é exterior à circunferência (Figura 1);

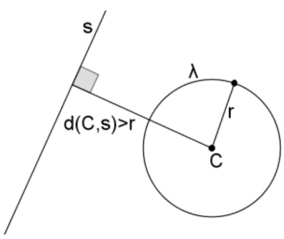
2º caso: Se $(m-x_o)^2+(n-y_o)^2=r^2$, P pertence à circunferência (Figura 2);

3º caso: Se $(m-x_o)^2+(n-y_o)^2<r^2$, P é interior à circunferência (Figura 3).

3.2.2 Posições Relativas entre Reta e Circunferência

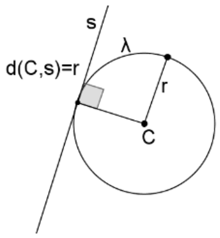
Analogamente, como fizemos na seção anterior, dado uma reta $s: Ax+By+D=0$ e uma circunferência $\lambda:(x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2$ temos três posições relativas possíveis da reta s e a circunferência.

Caso 1: s é exterior a circunferência $(s\cap\lambda=\varnothing)$;



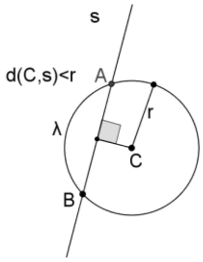
Observe que, neste caso, a distância d(C,s) entre o centro C e a reta s é maior do que o raio r.

Caso 2: s é tangente à circunferência $\left(s \cap \lambda = P(x_1, y_1)\right)$;



Observe que, neste caso, a distância d(C,s) entre o centro C e a reta s é igual ao raio r.

Caso 3: s é secante à circunferência $\left(s \cap \lambda = \{A, B\}\right)$.



Observe que, neste caso, a distância d(C,s) entre o centro C e a reta s é menor do que o raio r.

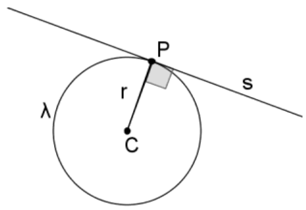
Sabemos que a distância entre um ponto $C = \left(x_o, y_o\right)$ e uma reta $s: Ax + By + D = 0$ é dada por $d\left(C,s\right) = \dfrac{\left|Ax_o + By_o + D\right|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$, e assim basta calcular o valor de $d\left(C,s\right)$ e verificar qual dos casos acima teremos. Veja o exercício abaixo.

Exemplo 6: Qual é a posição da reta $s: 3x + y - 19 = 0$ em relação à circunferência $\lambda: \left(x-2\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = 10$. Caso a reta intercepte a circunferência, encontre os referidos pontos de intersecção.

Resolução: Primeiramente vamos determinar a posição da reta s em relação à circunferência. Para isso vamos calcular a distância do centro $C = \left(2,3\right)$ da circunferência à reta $s: 3x + y - 19 = 0$.

Logo, $d\left(C,s\right) = \dfrac{\left|3.2 + 1.3 - 19\right|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \dfrac{\left|-10\right|}{\sqrt{10}} = \dfrac{10}{\sqrt{10}} = \dfrac{10\sqrt{10}}{10} = \sqrt{10}$.

Como $d\left(C,s\right) = r, \left(r = \sqrt{10}\right)$ então a reta s é tangente à circunferência λ.



Iremos agora determinar o ponto $P = \left(x_{1,} y_1\right)$ que é intersecção entre a reta $s: 3x + y - 19 = 0$ e a circunferência $\lambda: \left(x-2\right)^2 + \left(y-3\right)^2 = 10$.

Observe que $P \in s$ e $P \in \lambda$ e assim o ponto $P=(x_1, y_1)$ satisfaz as equações

$$\begin{cases} 3x+y-19=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=10 \end{cases}.$$

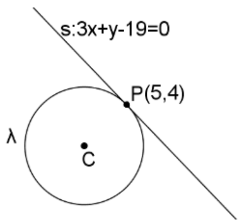
Vamos encontrar a solução do sistema acima para determinar o ponto $P(x_1, y_1)$.
Temos:

$$\begin{cases} 3x+y-19=0 \\ (x-2)^2+(y-3)^2=10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} `y=-3x+19 \ (I) \\ (x-2)^2+(y-3)^2=10 \ (II) \end{cases}$$

Substituindo (I) em (II) temos:

$$(x-2)^2+(-3x+19-3)^2=10 \Rightarrow (x-2)^2+(-3x+16)^2=10 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2-4x+4+9x^2-96x+256=10 \Rightarrow 10x^2-100x+250=0 \ (\div 10) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \boxed{x^2-10x+25=0}.$$

E assim $x'=x''=5$ (note que encontramos uma única solução, pois a reta s é tangente à λ). Desta forma, como $y=-3x+19$ encontramos $y=-3.5+19=4$ e o ponto de tangência entre a reta s e λ é o ponto $P=(5,4)$.



O exemplo 6 nos leva a pensar e concluir que em qualquer uma das três possíveis posições relativas entre a reta $s: Ax+By+D=0$ e a circunferência $\lambda: (x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ o conjunto $s \cap \lambda$ é o conjunto solução do sistema $(*) \begin{cases} Ax+By+D=0 \\ (x-x_o)^2+(y-y_o)^2=r^2 \end{cases}$.

Esse sistema poderá ser classificado como:

- SI-Sistema Impossível se, e somente se, a reta $\boldsymbol{s}$ é exterior à circunferência λ;
- SPD- Sistema Possível com solução única se, e somente se, a reta $\boldsymbol{s}$ é tangente à circunferência λ;
- SPI- Sistema Possível com duas soluções se, e somente se, a reta $\boldsymbol{s}$ é secante à circunferência λ.

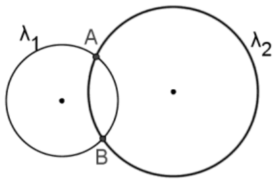
Observação importante para você

Note que, do sistema $(*)$ resultará uma equação do 2° grau e assim o valor do discriminante (Δ), dessa equação determinará a posição relativa entre a reta s e a circunferência λ.

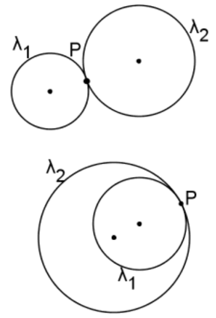
3.2.3 Posições Relativas entre Duas Circunferências

Dadas duas circunferências $\lambda_1 : (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 = r_1^2$ e $\lambda_2 : (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 = r_2^2$ distintas, podemos obter dois, um ou nenhum ponto em comum.

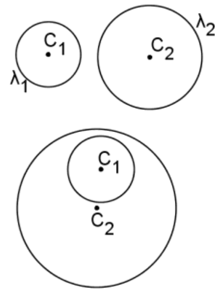
Caso 1



Caso 2



Caso 3



Resolvendo o sistema $\begin{cases} \lambda_1 : (x-a_1)^2 + (y-b_1)^2 - r_1^2 = 0 \\ \lambda_2 : (x-a_2)^2 + (y-b_2)^2 - r_2^2 = 0 \end{cases}$ descobrimos quantos e quais são os pontos comuns entre λ_1 e λ_2. Além disso, no segundo caso (um ponto comum) e no terceiro caso (nenhum ponto em comum) podemos identificar a posição relativa usando os raios, r_1 e r_2, e a distância entre os centros $d(C_1, C_2)$.

Vejamos o exercício resolvido a seguir.

Exemplo 7: Verificar a posição relativa entre as circunferências dadas.

$(a)\, \lambda : x^2 + y^2 = 30$ e $\alpha : (x\text{-}3)^2 + y^2 = 9$

$(b)\, \lambda : (x+2)^2 + (y-2)^2 = 1$ e $\alpha : x^2 + y^2 = 1$

Resolução:

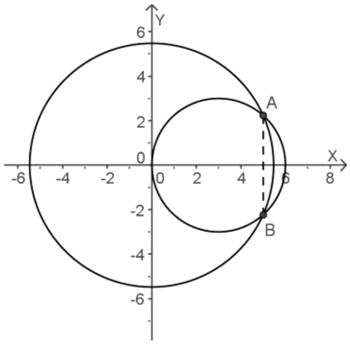
(a) Como já discutimos anteriormente vamos classificar o sistema $\begin{cases} x^2 + y^2 = 30 \\ (x\text{-}3)^2 + y^2 = 9 \end{cases}$.

Acompanhe:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 30 = 0 \\ (x\text{-}3)^2 + y^2 - 9 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 30 = 0 \;.(-1) \\ x^2 + y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\cancel{x^2} - \cancel{y^2} + 30 = 0 \\ \cancel{x^2} + \cancel{y^2} - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -6x + 30 = 0 \Rightarrow \boxed{x = 5}.$$

Logo substituindo $x = 5$ em uma das equações, obteremos $y = \pm\sqrt{5}$. Portanto os pontos $A = (5, \sqrt{5})$ e $B = (5, -\sqrt{5})$ são soluções do sistema e assim as duas circunferência são secantes cujos pontos em comum são A e B. Observe a representação gráfica gerada pelo software Geogebra.



b) Montando o sistema, obtém-se:

$$\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ (x-2)^2+(y-2)^2=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2-1=0 \\ x^2+y^2+4x-4y+7=0 \end{cases}$$

Agora, vamos resolver o sistema $\begin{cases} x^2+y^2-1=0\ (I) \\ x^2+y^2+4x-4y+7=0\ (II) \end{cases}$.

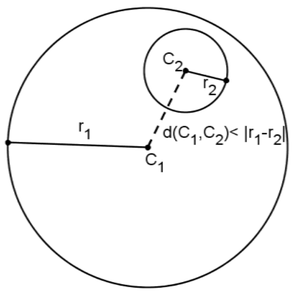
Fazendo $I = II$ e efetuando as devidas operações obtemos:

$$\cancel{x^2}+\cancel{y^2}-1=\cancel{x^2}+\cancel{y^2}+4x-4y+7 \Rightarrow \quad 4x-4y+7=-1 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 4x=4y-8 \Rightarrow \boxed{x=y-2}.$$

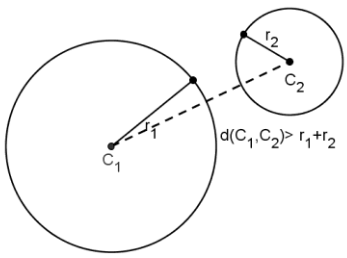
Substituindo agora $x=y-2$ na equação (I) teremos:

$$(y-2)^2+y^2-1=0 \Rightarrow \quad y^2-4y+4+y^2-1=0 \Rightarrow \quad 2y^2-4y+3=0 \Rightarrow \quad \boxed{\Delta=-8<0}.$$

Como $\Delta<0$, não existe solução para o sistema e assim concluímos que as circunferências não possuem pontos em comum.



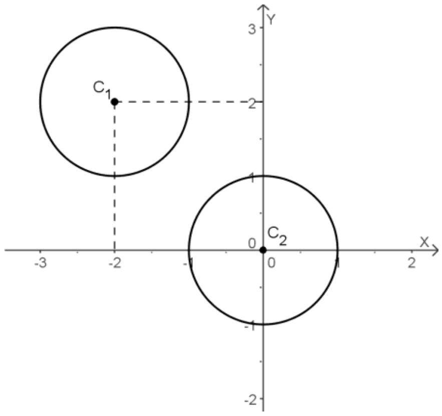
ou



Vejamos agora qual das duas situações abaixo se verifica:

Vamos calcular $d(C_1,C_2)$. Como $C_1=(-2,2)$ $\left(\lambda:(x-2)^2+(y-2)^2=1\right)$ e $C_2=(0,0)$ $\left(\alpha:x^2+y^2=1\right)$ então $d(C_1,C_2)=\sqrt{(0-(-2))^2+(0-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}$.

Note que $r_1 = 1, r_2 = 1$ e $r_1 + r_2 = 2$. Como $d(C_1, C_2) = \sqrt{8} > r_1 + r_2 = 2$ então as circunferências são externas. Veja a representação geométrica dessas circunferências.



No Moodle

Na Plataforma Moodle você encontrará uma lição que contém vários vídeos aula envolvendo circunferência. Aproveite para utilizar o fórum para discutir sobre esse conteúdo com os colegas e ter acesso aos exercícios resolvidos.

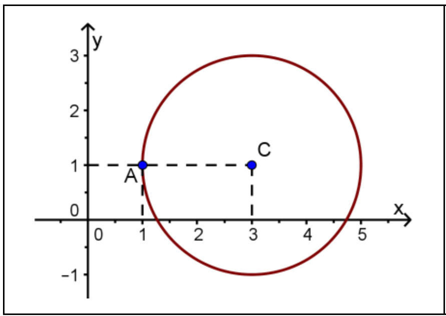
Praticando para Aprender

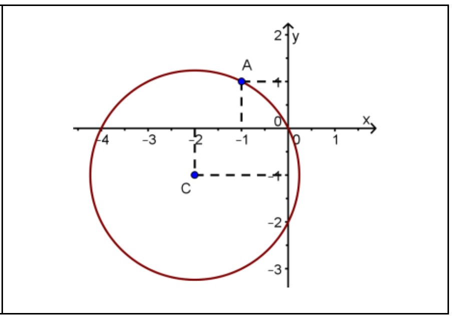
Exercício 3: Determine as coordenadas do centro e a medida do raio da circunferência de equação:

$a)\, x^2 + (y-2)^2 = 9$ $\quad b)\, x^2 + y^2 + 2x - 7 = 0$ $\quad c)\, x^2 + 6x + y^2 + y = -\dfrac{33}{4}$

$d)\, y^2 + 8(y - x) + x^2 + 28 = 0$ $\quad e) 5x^2 + 5y^2 + 40x - 10y + 55 = 0$ $\quad f) x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$

Exercício 4: Escreva a equação reduzida que representa cada circunferência.





Exercício 5: Escreva a equação geral da circunferência que passa pela origem do sistema cartesiano e tem centro no ponto $C = (-4, 2)$.

Exercício 6: Determine a posição relativa entre as retas e circunferências dadas e a circunferência $\lambda: x^2 - 10x + y^2 + 6y + 29 = 0$.

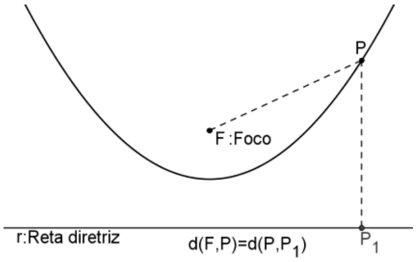
$a) r: y = x + 1;\ \ c: (x-2)^2 + (y+2)^2 = 5$ $\quad b) r: y + 2x = 7;\ \ c: (x-7)^2 + (y-1) = 5$

$c) r: 2y - x + 6 = 0;\ \ c: x^2 + y^2 - 10x + 4y = -28$ $\quad d) r: y - x + 7 = 0;\ \ c: x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$

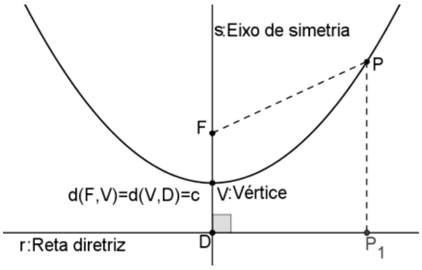
3.3 Parábola

Podemos visualizar concretamente uma parábola, dirigindo um jato d'água de uma mangueira obliquamente para cima e observando a trajetória percorrida pela água. Essa trajetória é parte de uma parábola.

Definição: Dados um ponto F e uma reta r de um plano, com $F \notin r$, chamamos de parábola o conjunto dos pontos desse plano eqüidistantes da reta r e do ponto F.



O ponto $\boldsymbol{F}$ é denominado **foco** da parábola e a reta r é denominada diretriz da parábola. O eixo de simetria da parábola é a reta s, que passa por F e é perpendicular à diretriz r.



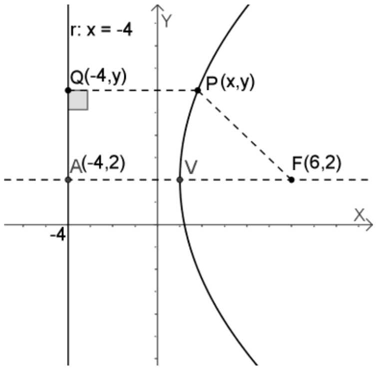
Observe que $d(F,V)=d(V,D)=c$ e assim o ponto $\boldsymbol{V}$ nada mais é que o ponto médio do segmento $\overline{FD}$, e é denominado **vértice** da parábola.

Ampliando seu conhecimento

Se um satélite emite um conjunto de ondas eletromagnéticas, estas poderão ser captadas pela sua antena parabólica, uma vez que o feixe de raios atingirá a sua antena que tem formato parabólico e ocorrerá a reflexão desses raios exatamente para um único lugar, denominado o foco da parábola, onde estará um aparelho receptor que converterá as ondas eletromagnéticas em um sinal que a sua TV poderá transformar em ondas, que por sua vez, significarão filmes, telejornais e outros programas que você assiste normalmente com maior qualidade.

Nosso objetivo é determinar uma equação que represente uma parábola. Desta forma, a partir do **foco** $\boldsymbol{F}$ e da reta diretriz *r*, podemos chegar à equação da parábola que é formada por todos os pontos $P=(x,y)$ do plano tal que $d(P,F)=d(P,r)$.

Como ilustração, vamos determinar a equação da parábola que tem como diretriz a reta $r: x=-4$ e como foco o ponto $F=(6,2)$ conforme figura abaixo:



Os pontos $P=(x,y)$ que pertencem à parábola são tais que $d(P,F)=d(P,Q)$, onde $Q=(-4,y)$.

Assim :

$$d(P,F)=d(P,Q)\Rightarrow\sqrt{(x-6)^2+(y-2)^2}=\sqrt{(x+4)^2+(y-y)^2}\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(x-6)^2+(y-2)^2=(x+4)^2\Rightarrow\ (y-2)^2=(x+4)^2-(x-6)^2\Rightarrow$$
$$\Rightarrow(y-2)^2=x^2+8x+16-x^2+12x-36\Rightarrow\ \boxed{(y-2)^2=20(x-1)}.$$

Portanto a equação $(y-2)^2=20(x-1)$ é a equação da parábola que possui foco $F=(6,2)$ e reta diretriz $r: x=-4$.

Sabemos que o vértice V da parábola é o ponto médio do segmento $\overline{FA}$, onde

$F=(6,2)$ e $A=(-4,2)$ e assim $V=\left(\dfrac{6-4}{2},\dfrac{2+2}{2}\right)\Rightarrow\boxed{V=(1,2)}$.

Pela distância de V até F encontramos um valor c dado por:

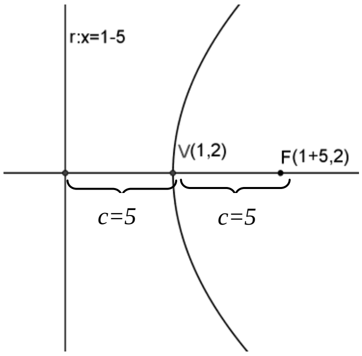
$$c=d(V,F)=\sqrt{(6-1)^2+(2-2)^2}=5.$$

Observe agora que na equação $(y-2)^2=20(x-1)$, obtida anteriormente, aparecem as coordenadas do vértice $x_v=1$ e $y_v=2$ e também o valor $c=5$:

$$\Big(y-\underbrace{2}_{y_v}\Big)^2=\underbrace{20}_{4.c}\Big(x-\underbrace{1}_{x_v}\Big)$$

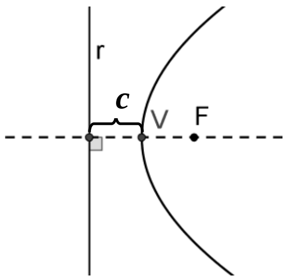
Reciprocamente, a partir da equação da parábola, $(y-2)^2 = 20(x-1)$, podemos chegar ao vértice V e o valor de c, e daí, teremos o foco F e a diretriz r.

Dada a equação $(y-2)^2 = 20(x-1)$. Obtemos $V=(1,2)$ e $c=5$.

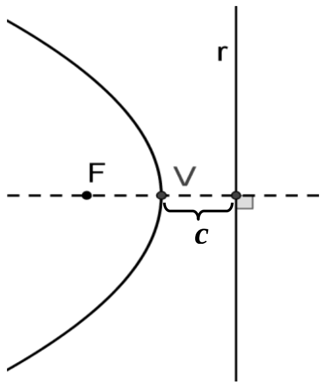


Generalizando, podemos, a partir do foco e da reta diretriz, determinar o vértice $V=(x_v, y_v)$ e o valor de $c=d(V,F)$ como também a equação reduzida da parábola. Veja os casos possíveis.

Caso 1: A reta diretriz r é paralela ao eixo $0y$;



Se a concavidade é voltada para a direita, então a equação reduzida da parábola é: $(y-y_v)^2 = 4c(x-x_v)$.

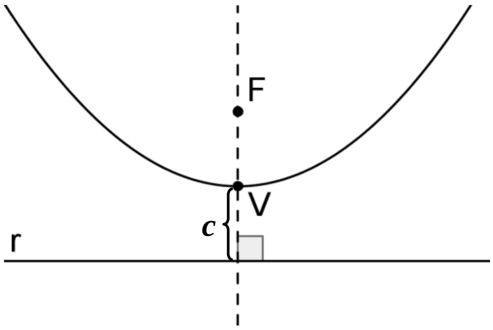


Se a concavidade é voltada para a esquerda, então a equação reduzida da parábola é: $(y-y_v)^2 = -4c(x-x_v)$.

Observação importante para você

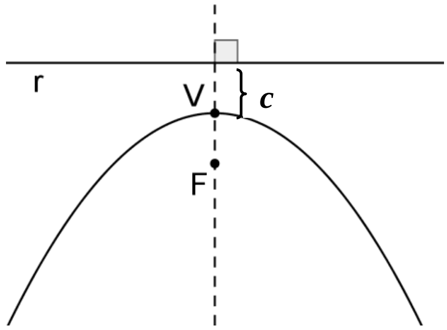
Note que, quando a reta diretriz é paralela ao eixo $0y$, o fator da equação que contém a variável y ficará elevado ao quadrado. Analogamente, se a reta diretriz é paralela ao eixo $0x$, o fator da equação que contém a variável x ficará elevado ao quadrado, veja nas ilustrações a seguir.

Caso 2: A reta diretriz r é paralela ao eixo $0x$.



Se a concavidade é voltada para cima, então a equação reduzida da parábola é:

$$(x-x_v)^2 = 4c.(y-y_v).$$



Se a concavidade é voltada para baixo, então a equação reduzida da parábola é:

$$(x-x_v)^2 = -4c.(y-y_v).$$

Faremos alguns exercícios para que possamos assimilar e trabalhar melhor a equação reduzida de uma parábola.

Exemplo 1: Se uma parábola possui equação $x^2-4x-12y-8=0$, determine as coordenadas do vértice, do foco e a equação da reta diretriz.

Resolução: Primeiramente vamos fazer o completamento do quadrado na variável x.

Temos: $x^2 - \underbrace{4}_{\substack{2a \\ a=2}} x = x^2-4x+\underbrace{4}_{a^2}-4=(x-2)^2-4$.

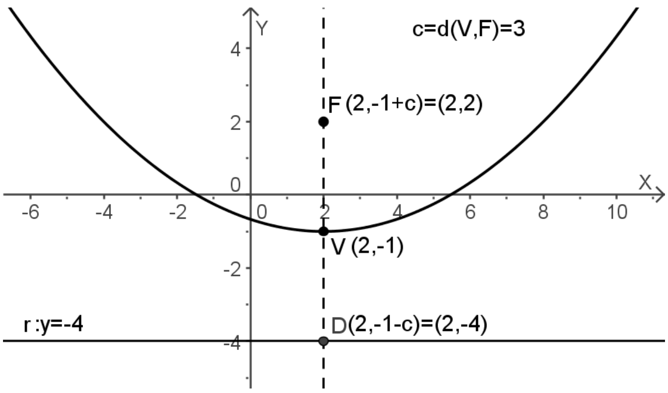
Desta forma a equação $x^2-4x-12y-8=0$ pode ser escrita na forma:

$$(x-2)^2-4-12y-8=0 \Rightarrow (x-2)^2=12y+12 \Rightarrow \boxed{(x-2)^2=12(y+1)}.$$

Portanto, da equação da parábola $(x-2)^2=12(y+1)$ obtemos $V=(2,-1)$ e $4c=12 \Rightarrow c=\frac{12}{4}=3$.

Como na equação $(x-2)^2=12(y+1)$ o termo envolvendo a variável x está elevado ao quadrado, então pelos casos vistos anteriormente, a reta diretriz é paralela ao eixo $0x$.

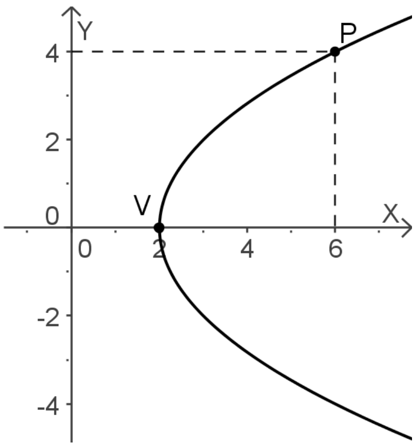
Utilizando o vértice $V=(2,-1)$ e o valor $c=3=d(V,F)$, encontraremos o foco e a reta diretriz da parábola esboçando um gráfico no plano cartesiano. Observe:



Logo, $V=(2,-1)$, $F=(2,2)$ e a reta diretriz é $r: y=-4$.

Exemplo 2: Determine a equação da parábola com eixo de simetria perpendicular ao eixo $0y$, vértice $V=(2,0)$ e que passa pelo ponto $P=(6,4)$.

Resolução: Fazendo um esboço gráfico do vértice $V=(2,0)$, do ponto $P=(6,4)$ e partindo do fato que o eixo de simetria é perpendicular ao eixo $0y$, a nossa parábola tem a seguinte forma:



Logo, pelos casos já mostrados anteriormente, a nossa parábola possui a seguinte equação: $(y-y_v)^2=4c(x-x_v) \Rightarrow (y-0)^2=4c(x-2) \Rightarrow \boxed{y^2=4c(x-2)}$.

Como o ponto $P(6,4)$ pertence à parábola então:

$$4^2=4c(6-2) \Rightarrow 16=16c \Rightarrow \boxed{c=1}.$$

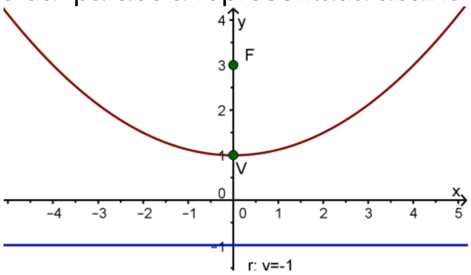
Portanto a equação da parábola é $y^2=4(x-2)$.

No Moodle

Na Plataforma Moodle você encontrará uma lição que contém vários vídeos aula envolvendo Parábola. Aproveite para utilizar o fórum para discutir sobre esse conteúdo com os colegas e ter acesso aos exercícios resolvidos.

Praticando para Aprender

Exercício 7: Escreva a equação da parábola representada abaixo.



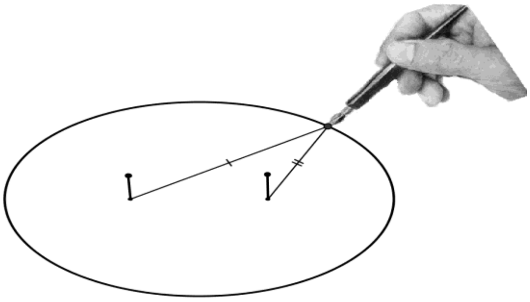
Exercício 8: Determine o foco F e a reta diretriz da parábola de equação:

$a)(y-8)^2=-6(x+3)$ $b)(x-8)^2-12y+96=0$ $c)x^2+6x-16y+25=0$

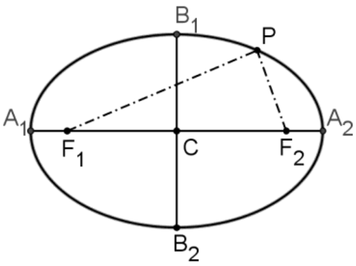
3.4 Elipse

Em um copo, no formato cilíndrico circular, despeje até a metade do copo um liquido de sua escolha. Depois incline o copo e mantenha-o fixo. A figura formada pelo liquido na lateral do copo é uma ilustração concreta de uma elipse.

Existe outra maneira de se obter uma elipse, em uma tábua pregue dois pregos e arame neles as extremidades de um barbante maior que a distância entre os pregos; a seguir desenhe uma linha na tábua com o auxilio de um lápis apoiado no barbante, mantendo-a o mais esticado possível.



Definição: Fixado dois pontos F_1 e F_2 de um plano, tal que $d(F_1,F_2)=2c,\ \ c>0,$ chama-se elipse o conjunto dos pontos $P=(x,y)$ cuja soma das distâncias $d(P,F_1)$ e $d(P,F_2)$ é uma constante $2a$, com $2a>2c$.



d(P,F1)+d(P,F2)=2a

Na figura acima temos:

(I) F_1 e F_2 são focos da elipse e a distância focal $d(F_1,F_2)=2c$;

(II) $\overline{A_1A_2}$ é o eixo maior da elipse e $d(A_1,A_2)=2a$;

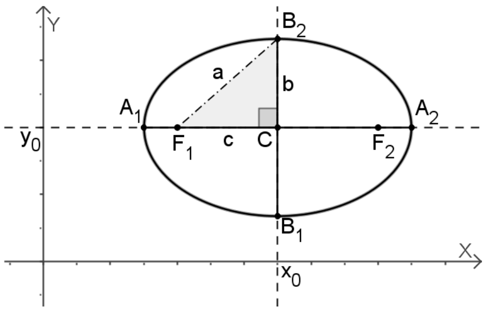
(III) $\overline{B_1B_2}$ é o eixo menor da elipse e $d(B_1,B_2)=2b$;

(IV) C é o centro da elipse e é o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$, $\overline{A_1A_2}$ e $\overline{B_1B_2}$, e mais, $d(C,F_1)=d(C,F_2)=c$.

V) O numero $e=\frac{c}{a}$ chama-se excentricidade da elipse.

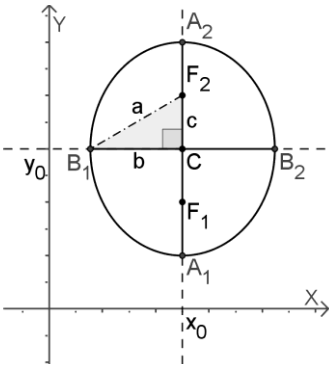
Dada uma elipse de centro $C=(x_0,y_0)$, temos os seguintes casos:

Caso 1: O eixo maior $\left(\overline{A_1A_2}\right)$ paralelo ao eixo *0x;*



Neste caso, mostra-se que a elipse pode ser representada pela equação reduzida $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, com $b^2=a^2-c^2$ (Teorema de Pitágoras).

Caso 2: O eixo maior $\left(\overline{A_1A_2}\right)$ paralelo ao eixo 0y.



Neste caso, a elipse pode ser representada pela equação reduzida

$$\frac{(x-x_0)^2}{b^2}+\frac{(y-y_0)^2}{a^2}=1, \text{ com } b^2=a^2-c^2.$$

A demonstração destas equações é conseqüência direta da definição, isto é, se $P=(x,y)$ é um ponto da elipse de centro $C=(x_0,y_0)$ e foco $F_1=(x_0+c,y_0)$ e $F_2=(x_0-c,y_0)$ (eixo maior paralelo ao eixo *0x*), por exemplo, então desenvolvendo $d(F_1,P)+d(F_2,P)=2a$, onde $c=d(C,F_1)=d(C,F_2)$, obtemos a equação $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$, e mais $b^2=a^2-c^2$.

Teremos a oportunidade em nossas aulas de discutir o desenvolvimento da equação reduzida da elipse pelo desenvolvimento de $d(P,F_1)+d(P,F_2)=2a$.

Exemplo 1: Determinar a equação da elipse de centro na origem e eixo maior horizontal, sendo $2a=10$ e $2c=6$ (distância focal).

Resolução: Temos $2a=10 \Rightarrow \boxed{a=5}$ e $2c=6 \Rightarrow \boxed{c=3}$.

Como $b^2=a^2-c^2$ então $b^2=25-9 \Rightarrow b^2=16 \Rightarrow \boxed{b=4}$.

Se o eixo maior é horizontal e o centro é na origem, a equação é da forma :

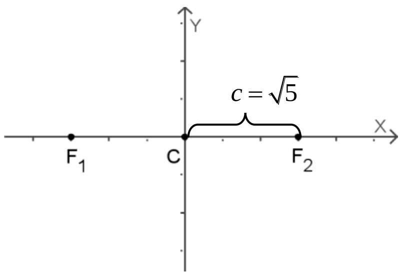
$$\underbrace{\frac{x^2}{a^2}}_{\text{eixo maior horizontal}}+\frac{y^2}{b^2}=1 \text{ e assim } \frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1.$$

Exemplo 2: Determinar os focos e a excentricidade da elipse de equação $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$.

Resolução: Observe que o centro dessa elipse é o ponto $C=(0,0)$, que $a^2=9 \Rightarrow a=3$ e que $b^2=4 \Rightarrow b=2$.

Como $b^2=a^2-c^2$ então $4=9-c^2 \Rightarrow c^2=5 \Rightarrow \boxed{c=\sqrt{5}}$.

Pela equação reduzida observamos que o eixo maior (eixo focal) é paralelo ao eixo $0x$. Como $C=(0,0)$, os focos pertencem ao eixo $0x$.



Logo, os focos são $F_1=\left(-\sqrt{5},0\right)$ e $F_2=\left(\sqrt{5},0\right)$, a excentricidade é $e=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Exemplo 3: Uma elipse tem como equação $25x^2-50x+4y^2+16y-59=0$. Escrever esta equação na forma reduzida e esboçar o gráfico.

Resolução:

Primeiramente, iremos agrupar os termos em *x*, e os termos em *y*, e faremos o completamento de quadrado.

(I) $25x^2-50x=25(x^2-\underbrace{2}_{\substack{2a=2\\a=1\\a^2=1}}x)=25(\underbrace{x^2-2x+1}_{(x-1)^2}-1=25\left[(x-1)^2-1\right]$

(II) $4y^2+16y=4(y^2+\underbrace{4}_{\substack{2a=4\\a=2\\a^2=4}}y)=4(\underbrace{y^2+4y+4}_{(y+2)^2}-4)=4\left[(y+2)^2-4\right]$.

Logo, a equação $25x^2-50x+4y^2+16y-59=0$ pode ser escrita na forma

$$25\left[(x-1)^2-1\right]+4\left[(y+2)^2-4\right]-59=0 \Rightarrow 25(x-1)^2-25+4(y+2)^2-16-59=0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{25(x-1)^2+4(y+2)^2=100}.$$

Dividindo por 100 ambos os membros desta equação, obtemos a forma reduzida:

$$\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25}=1.$$

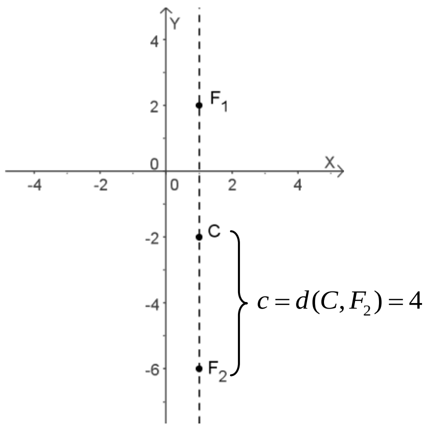
Observe que neste caso o maior denominador $a^2=25$, se encontra no termo que envolve a variável y e assim o eixo focal (ou eixo maior) é paralelo ao eixo $0y$.

Para esboçar o gráfico da elipse $\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{(y+2)^2}{25}=1$ procedemos da seguinte forma.

(i) O eixo focal é paralelo ao eixo $0y$;

(ii) $a^2=25$ e $b^2=4$, assim $b^2=a^2-c^2 \Rightarrow 4=25-c^2 \Rightarrow c^2=16 \Rightarrow \boxed{c=4}$;

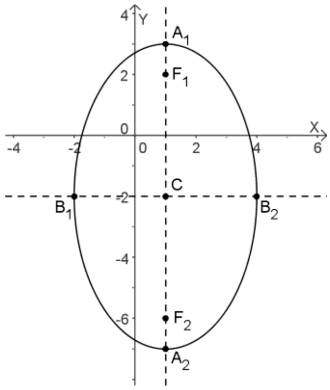
(iii) O ponto $C(1,-2)$ é o centro da elipse. Veja ilustração com essas três etapas;



(iv) determinar F_1, F_2, A_1, A_2, B_1 e B_2 através dos valores $a=5, b=2$ e $c=4$, ou seja, $F_1=(1,-2+4),\ F_2=(1,-2-4),\ A_1=(1,-2+5),\ A_2=(1,-2-5),\ B_1=(1-2,-2)$ e $B_2=(1+2,-2)$.

(v) Esboçar o gráfico com:

$C=(1,-2),\ F_1=(1,2),\ F_2=(1,-6),\ A_1=(1,3),\ A_2=(1,-7),\ B_1=(-1,-2)\ e\ B_2=(3,-2)$.



3.5 Hipérbole

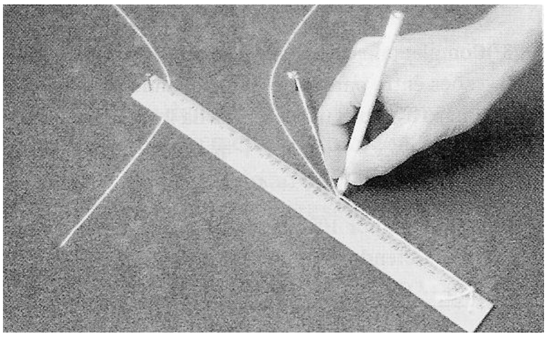
Para que possamos entender bem a definição da hipérbole, iremos primeiramente aprender a desenhá-la. Desta forma realize a seguinte experiência.

(I) em uma extremidade de uma haste (pode ser uma régua), prenda a ponta de um barbante;

(II) fixe as outras extremidades da haste e do barbante em dois pontos distintos, F_1 e F_2, de uma tábua (a diferença entre o comprimento d da régua e o comprimento l do barbante deve ser menor do que a distancia $d(F_1,F_2)$, ou seja, $d-l<d(F_1,F_2)$);

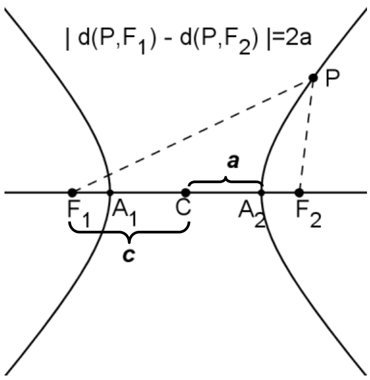
(III) com a ponta de um lápis, pressione o barbante contra a régua, deslizando o grafite sobre a tábua, deixando o barbante esticado e sempre junto da régua;

(IV) repita a operação, invertendo os pontos de fixação na tábua, isto é, fixe a haste em F_2 e o barbante em F_1. Conforme a figura abaixo.



A figura acima construída é denominada hipérbole.

Definição: Fixados dois pontos F_1 e F_2 de um plano, tais que $d\left(F_1,F_2\right)=2c, c>0$, chama-se hipérbole o conjunto dos pontos $P=\left(x,y\right)$ de um plano tais que a diferença, em módulo, das distâncias $d\left(F_1,P\right)$ e $d\left(F_2,P\right)$ é constante *2a*, com $0<2a<2c$, ou seja, $\left|d\left(F_1,P\right)-d\left(F_2,P\right)\right|=2a$.



Na figura acima temos:

(I) F_1 e F_2 são os focos da hipérbole, sendo $d(F_1, F_2) = 2c$ a distância focal;

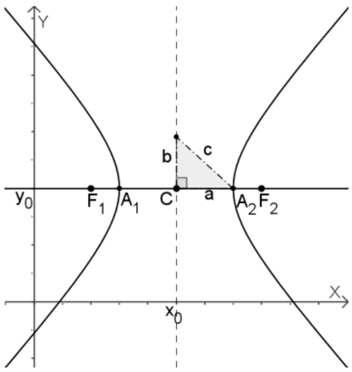
(II) A_1 e A_2 são os dois vértices da hipérbole, sendo $d(A_1, A_2) = d(F_2, A_1) - d(F_1, A_1) = 2a$

(III) C é o centro da hipérbole, sendo C o ponto médio do segmento $\overline{F_1F_2}$ ou do segmento $\overline{A_1A_2}$, ou seja $d(F_1, C) = d(F_2, C) = c$ e $d(A_1, C) = d(A_2, C) = a$;

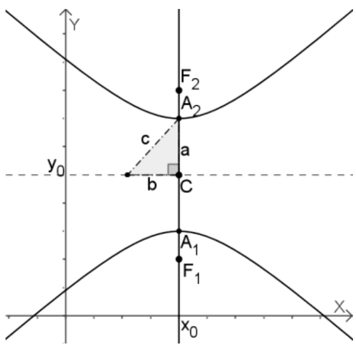
(IV) O número $e = \dfrac{c}{a}$, é a excentricidade da hipérbole (note que $e > 1$, pois $c > a$)

Dada uma hipérbole de centro $C = (x_0, y_0)$ temos os seguintes casos:

Caso 1: Se o eixo focal é paralelo ao eixo *0x*, então a hipérbole pode ser representada pela equação reduzida $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, como $b^2 = c^2 - a^2$ (Teorema Pitágoras).

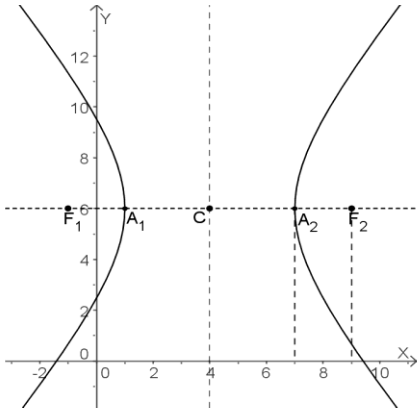


Caso 2: Se o eixo focal é paralelo ao eixo *0y*, então a hipérbole pode ser representada pela equação $\dfrac{(y - y_0)^2}{a^2} - \dfrac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$ com $b^2 = c^2 - a^2$.



Assim como na elipse, a demonstração dessas equações é conseqüência direta da definição, isto é, se $P = (x, y)$ é um ponto da hipérbole de centro $C = (x_0, y_0)$ e foco $F_1 = (x_0 + c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 - c, y_0)$ (eixo focal paralelo ao eixo *0x*), por exemplo, então desenvolvendo $|d(F_1, P) - d(F_2, P)| = 2a$, onde $c = d(C, F_1) = d(C, F_2)$, obtemos a equação $\dfrac{(x - x_0)^2}{a^2} - \dfrac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$, com $b^2 = c^2 - a^2$.

Exemplo 1: Obtenha a equação reduzida da hipérbole representada abaixo.



Resolução:

Pelo gráfico vemos que:

i) $C=(4,6)$, $A_2=(7,6)$ e $F_2=(9,6)$;

ii) Como $d(A_2,C)=a$, então $d(A_2,C)=3=a$;

iii) Como $d(F_2,C)=c$, então $d(F_2,C)=5=c$;

iv) O eixo focal é paralelo ao eixo *0x* e assim a equação da hipérbole é da forma $\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$.

Como $b^2=c^2-a^2 \Rightarrow b^2=25-9 \Rightarrow b=4$, então a equação reduzida da hipérbole acima é: $\frac{(x-4)^2}{9}-\frac{(y-6)^2}{16}=1$.

Exemplo 2: Uma hipérbole tem como equação $x^2-9y^2-6x-18y-9=0$. Escreva-a na forma reduzida.

Resolução: Vamos fazer o completamento de quadrados:

(I) $x^2-\underset{\substack{2a=6\\a=3\\a^2=9}}{6}x=\underbrace{x^2-6x+9}_{(x-3)^2}-9=(x-3)^2-9$

(II) $-9y^2-18y=-9(y^2+2y)=-9(y^2+2y+1-1)=-9\left[(y+1)^2-1\right]$.

Logo a equação $x^2-9y^2-6x-18y-9=0$ se transforma na equação $x^2-9y^2-6x-18y-9=0 \Rightarrow (x-3)^2-9-9\left[(y+1)^2-1\right]-9=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-3)^2-9-9(y+1)^2 \cancel{+9} \cancel{-9}=0 \Rightarrow \boxed{(x-3)^2-9(y+1)^2=9}$.

Dividindo ambos os membros da equação acima por 9 teremos: $\frac{(x-3)^2}{9}-\frac{(y+1)^2}{1}=1$.

Praticando para Aprender

Exercício 9: para cada elipse cuja equação está indicada a seguir, calcule a medida do eixo maior, do eixo menor, a distância focal e a excentricidade.

$a)\dfrac{(x+5)^2}{3}+\dfrac{(y+1)^2}{8}=1$ $\qquad b)\dfrac{x^2}{5}+\dfrac{(y-3)^2}{4}=1$

$c)36x^2+16y^2=576$ $\qquad d)9(x-9)^2+6(y-7)^2=54$

Exercício 10: Verifique quais equações representam uma hipérbole e reescreva na forma reduzida, determine os focos, os vértices e o centro da hipérbole.

$a)9x^2+16y^2=144$ $\qquad b)8x^2-6y^2-32x+36y-70=0$ $\qquad c)-2x^2+16x+5y^2+10y+37=0$

$d)6y^2-4x^2-64x-280=0$ $\qquad e)3(1-x)^2-y^2+2y=1$ $\qquad f)(x+y)(x-y)=4$

4 Avaliando o que foi Construído

Nesta unidade, trabalhamos com as equações reduzidas das cônicas (Circunferência, Parábola, Elipse e Hipérbole). Tudo que conhecemos hoje sobre a astronomia deve-se, em grande parte, ao estudo das cônicas. Por exemplo, a órbita que os planetas fazem em torno do Sol é descrita por elipses. Isto mostra quão importante é o estudo das Cônicas.

Agora é com você! Procure participar das discussões desenvolvidas no ambiente virtual e sempre que houver dúvidas procure seu professor tutor. Lembre-se que o conhecimento matemático é construído gradual e sistematicamente. Procure formar grupo de estudo e esteja constantemente em contato com a disciplina, seja revisando, exercitando ou discutindo no Moodle.

5 Bibliografia

1. DANTE, Luiz R. **Matemática: Contexto e Aplicações.** 2ª ed. São Paulo: Ática.Vol. 1,2,3. 2000.

2. IEZZI, G. Dolce, O. Hazzan, S. **Fundamentos de Matemática Elementar**, Vol. 1, Editora Atual, 8ª ed. 2004.

3. PAIVA, Manoel Rodrigues. **Matemática: conceito linguagem e aplicações**. São Paulo: Moderna. Vol. 1,2,3. 2002.

4. FACCHINI, Walter. **Matemática para Escola de Hoje**. São Paulo: FTD, 2006.

5. LIMA, Elon L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., **A Matemática do Ensino Médio**, Vol. 3, 2ª Edição, Coleção Professor de Matemática, Publicação da Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

6. GENTIL, Nelson S. **Matemática para o 2º grau.** Vol. 3. Ática, 7ª ed. São Paulo: 1998.

Resumo da Unidade 5

Pontos que eu considero importantes:

- ✓ ____
- ✓ ____
- ✓ ____

Ideias que posso aplicar nos meus estudos

Ideias que posso aplicar no meu trabalho

O que eu não posso esquecer!!

•

•

•

•

•

•

•

Minha Agenda

Atividades no Moodle	Data de encerramento