Geometria Analítica

NEAD - Núcleo de Educação a Distância

Curso de Licenciatura em Matemática

UFMA

Katia Frensel - Jorge Delgado

Março, 2011

Conteúdo

Prefácio

Este texto foi concebido para a disciplina de Geometria Analítica do curso de Licenciatura em Matemática da UFMA na modalidade à distância ou semi-presencial, os pre-requisitos para seu estudo não vão além da matemática do Ensino Médio. O conteúdo que apresentamos nas páginas seguintes faz uma revisão profunda e detalhada dos conceitos da Geometria Analítica abordados no Ensino Médio e serve como base para estudos posteriores de Cálculo Diferencial e Integral, Geometria e Álgebra Linear.

Nosso objetivo é o de abordar os conceitos fundamentais da Geometria Analítica não apenas do ponto de vista formal, mas também através de diversos exemplos e exercícios cuidadosamente resolvidos ao longo do texto. Muitos outros exercícios são propostos no final de cada capítulo, devendo o leitor tomar conta deles cuidadosamente para fixar o conteúdo apresentado, respostas para todos os exercícios propostos são também colocadas logo em seguida para facilitar a conferência por parte do leitor.

Na Bibliografía que sugerimos no final do texto o leitor pode encontrar diversos títulos cuja leitura ou consulta ajudará a expandir os assuntos aqui expostos ou vislumbrá-los com outro enfoque

Somos muito gratos ao NEAD/UFMA pela oportunidade que nos foi apresentada para participar do curso de Licenciatura em Matemática do projeto de Ensino à Distância, inicialmente, através deste texto. Em particular agradecemos imensamente ao Professor Artur Silva Santos pela paciência e motivação para que este texto fosse concebido.

Quaisquer sugestões e/ou críticas que nos permitam melhorar o conteúdo do presente texto serão muito bem recebidas no endereço *j.delgado.g@gmail.com*.

Niterói-RJ , março de 2011

Katia Frensel
Depto. de Geometria
IME-UFF

Jorge Delgado
Depto. de Matemática Aplicada
IME-UFF

Capítulo 1

Coordenadas na reta e no plano

A **Geometria Analítica** introduzida por **Pierre de Fermat** e **René Descartes**, por volta de 1636, foi muito importante para o desenvolvimento da Matemática. Através da representação de pontos da reta por números reais, pontos do plano por pares ordenados de números reais e pontos do espaço por ternos ordenados de números reais, curvas no plano e superfícies no espaço podem ser descritas por meio de equações, tornando possível tratar algebricamente muitos problemas geométricos e, reciprocamente, interpretar de forma geométrica diversas questões algébricas.

Neste Capítulo vamos associar coordenadas numéricas a pontos de uma reta e de um plano, veremos como determinar a distância entre pontos numa reta e num plano. Caracterizaremos também os conceitos de ponto médio de um segmento, mediatriz e círculo.

Ao longo destas notas, admitiremos que o leitor tenha conhecimento dos principais axiomas e resultados da Geometria Euclidiana no plano e no espaço, relativos aos seus elementos básicos: pontos, retas e planos. Por exemplo: por dois pontos distintos passa uma, e somente uma reta; por três pontos do espaço não situados na mesma reta passa um, e somente um plano; fixada uma unidade de medida de comprimento, a cada par de pontos A e B corresponde um número real não-negativo, denominado **distância** entre os pontos A e B ou **comprimento** do segmento $\overline{AB}$, que designamos por $d(A,B)$ e satisfaz as seguintes propriedades:

(a) $d(A,B) \geq 0$.

(b) $d(A,B) = 0 \Longleftrightarrow A = B$.

(c) $d(A,B) = d(B,A)$.

(d) $d(A,B) \leq d(A,C) + d(C,B)$ (desigualdade triangular).

(e) $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$
$\Longleftrightarrow$ A, B e C são colineares e C está entre A e B.

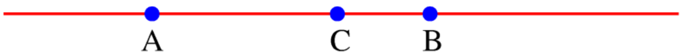


Fig. 1: O ponto C está entre A e B, logo $d(A,B) = d(A,C) + d(C,B)$.

1. Coordenadas na reta

Uma reta r é **orientada** quando sobre ela se escolheu um sentido de percurso dito **positivo**. O sentido oposto é denominado **negativo**.

Fig. 2: Escolha de um sentido de percurso na reta r.

Sejam A e B pontos na reta r. Dizemos que B **está à direita** de A (ou que A **está à esquerda** de B) quando o sentido de percurso de A para B coincide com o sentido positivo escolhido na reta r.

Fig. 3: B está à direita de A na reta orientada r.

Um **eixo** E é uma reta orientada na qual é fixado um ponto O, chamado **origem**.

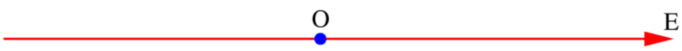


Fig. 4: Origem O escolhida no eixo E.

Todo eixo E pode ser posto em **correspondência biunívoca** com o conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais da seguinte maneira:

$$\boxed{E \longleftrightarrow \mathbb{R}}$$

(a) à origem O do eixo faz-se corresponder o número zero.

(b) a cada ponto X de E à direita de O corresponde o número real positivo $x = d(O, X)$.

(c) a cada ponto X de E à esquerda de O corresponde o número real negativo $x = -d(O, X)$. O número real x, correspondente ao ponto X, é chamado a **coordenada** do ponto X no eixo E.

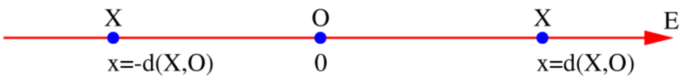


Fig. 5: Coordenada de um ponto X do eixo E em relação à origem O.

Proposição 1

Sejam X e Y dois pontos sobre o eixo E com coordenadas x e y respectivamente. Então,

$$\boxed{d(X, Y) = |y - x| = |x - y|}$$

Prova.

Se $X = Y$, não há o que provar.

Suponhamos que $X \neq Y$. Para fixar as idéias, vamos assumir que X está à esquerda de Y, isto é, $x < y$.

Temos três casos a considerar:

Caso 1. X e Y estão à direita da origem. Isto é, $0 < x < y$.

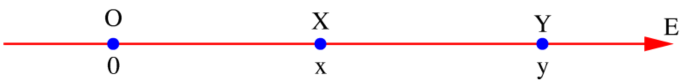


Fig. 6: Caso 1: $0 < x < y$.

Como X está entre O e Y, $d(O, X) = x$ e $d(O, Y) = y$, temos, por $d(O, Y) = d(O, X) + d(X, Y)$, que

$$y = x + d(X, Y).$$

Portanto,

$$d(X, Y) = y - x = |y - x|.$$

Caso 2. X e Y estão à esquerda da origem. Isto é, $x < y < 0$.

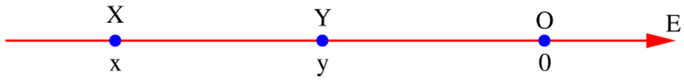


Fig. 7: Caso 2: $x < y < 0$.

Neste caso, Y está entre X e O, $d(O,X) = -x$ e $d(O,Y) = -y$.
Logo,

$$d(O,X) = d(X,Y) + d(Y,O) \iff -x = d(X,Y) - y,$$

ou seja,

$$d(X,Y) = y - x = |y - x|.$$

Caso 3. X e Y estão em lados opostos em relação à origem. Isto é, $x < 0 < y$.

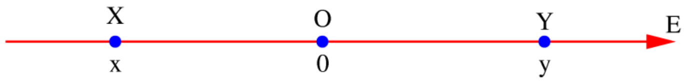


Fig. 8: Caso 3: $x < 0 < y$.

Como O está entre X e Y, $d(X,Y) = d(X,O) + d(O,Y)$.
Além disso,

$$d(X,O) = -x \text{ e } d(O,Y) = y.$$

Logo,

$$d(X,Y) = -x + y = y - x = |y - x|. \blacksquare$$

Observação 1

• Se X estiver à direita de Y, a demonstração é feita de maneira similar.

• Sejam X e Y pontos de coordenadas x e y, e M o **ponto médio** do segmento $\overline{XY}$, de coordenada m. Então,

$$\boxed{m = \frac{x+y}{2}}$$

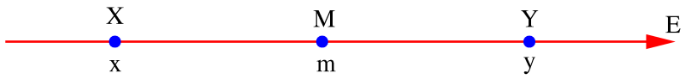


Fig. 9: Sendo M o ponto médio do segmento $\overline{XY}$, temos $d(M,X) = d(M,Y)$.

De fato, suponhamos que X está à esquerda de Y. Como o ponto médio M está entre X e Y, temos $x < m < y$. Logo,

$$d(M,X) = d(M,Y) \iff |x - m| = |y - m| \iff m - x = y - m$$

$$\iff 2m = x + y \iff m = \frac{x+y}{2}.$$

2. Coordenadas no Plano

• Designamos por $\mathbb{R}^2$ o conjunto formado pelos pares ordenados (x, y), onde x e y são números reais.

$$\boxed{\mathbb{R}^2 = \{\,(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\,\}}$$

O número x é a *primeira coordenada* e o número y é a *segunda coordenada* do par ordenado (x, y).

• Um **sistema de eixos ortogonais** num plano π é um par de eixos perpendiculares OX e OY contidos em π que têm a mesma origem O.
O eixo$-OX$ é o *eixo-horizontal* e o eixo$-OY$ é o *eixo-vertical*.

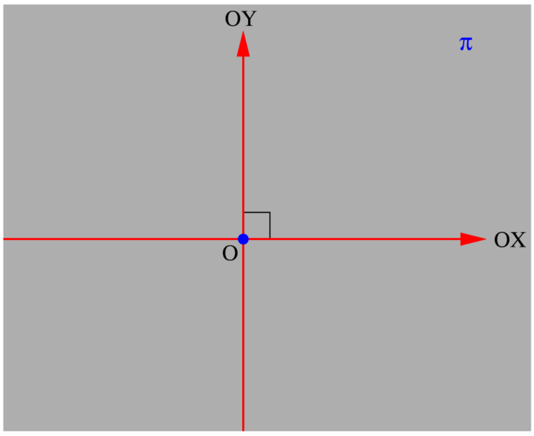


Fig. 10: Sistema OXY no plano π.

• Um plano π munido de um sistema de eixos ortogonais se corresponde com o conjunto $\mathbb{R}^2$:

$$\boxed{\pi \longleftrightarrow \mathbb{R}^2}$$

De fato, se $P \in \pi$, tomamos as retas r e s tais que:

- $r \parallel$eixo$-OY$ e $P \in r$,
- $s \parallel$eixo$-OX$ e $P \in s$.

Se o ponto X onde a reta r intersecta o eixo-OX tem coordenada x no eixo$-OX$ e o ponto Y de interseção da reta s com o eixo-OY tem coordenada y nesse eixo, associa-se ao ponto P o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

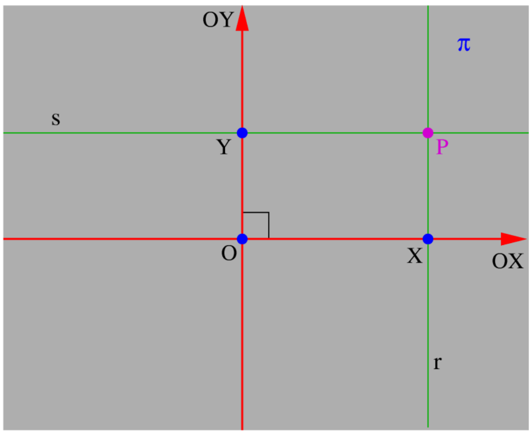


Fig. 11: Coordenadas do ponto $P \in \pi$

Reciprocamente:

Dado o par ordenado $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ temos que, *se:*

- X é o ponto do eixo$-OX$ de coordenada x;
- Y é o ponto do eixo$-OY$ de coordenada y;
- r é a reta paralela ao eixo$-OY$ que passa por X;
- s é a reta paralela ao eixo$-OX$ que passa por Y,

então $\{P\} = r \cap s$.

• Os números x e y chamam-se as *coordenadas cartesianas do ponto P relativamente ao sistema de eixos ortogonais fixado*.

A coordenada x é a *abscissa* de P e y é a *ordenada* de P.

Observação 2

No eixo$-OX$, os pontos têm coordenadas $(x, 0)$.

No eixo$-OY$, os pontos têm coordenadas $(0, y)$.

Observação 3

Os eixos ortogonais decompõem o plano em quatro regiões chamadas **quadrantes**:

Primeiro Quadrante
$= \{(x, y) \mid x > 0 \text{ e } y > 0\}$

Segundo Quadrante
$= \{(x, y) \mid x < 0 \text{ e } y > 0\}$

Terceiro Quadrante
$= \{(x, y) \mid x < 0 \text{ e } y < 0\}$

Quarto Quadrante
$= \{(x, y) \mid x > 0 \text{ e } y < 0\}$

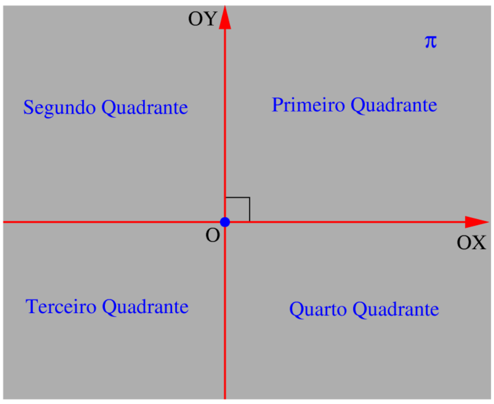


Fig. 12: Quadrantes e eixos ortogonais no plano.

Cada ponto do plano pertence a um dos eixos ortogonais ou a um dos quadrantes.

Observação 4

Dados dois eixos concorrentes quaisquer, o processo acima descrito permite estabelecer também uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e pares ordenados de números reais.

De fato (veja a figura 13), cada ponto P do plano é o ponto de interseção de duas retas paralelas aos eixos coordenados. A paralela ao eixo$-OY$ que passa por P intersecta o eixo$-OX$ num ponto cuja coordenada nesse eixo é a **primeira coordenada** x de P. Analogamente, a paralela ao eixo$-OX$ que passa por P intersecta o eixo$-OY$ num ponto cuja coordenada nesse eixo é a **segunda coordenada** y de P.

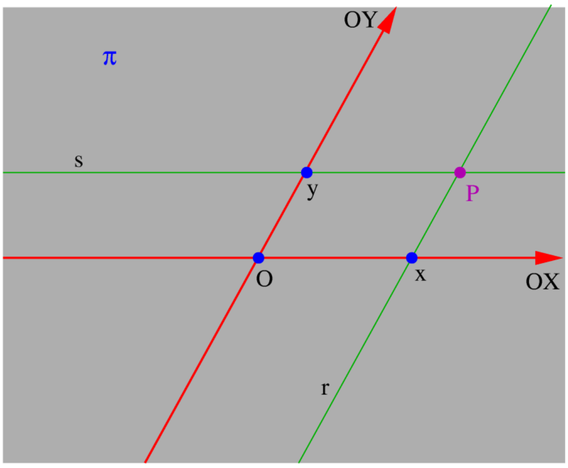


Fig. 13: Sistema de eixos não-ortogonais.

3. Distância entre dois pontos no plano

Sejam π um plano munido de um sistema de eixos ortogonais OXY, $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano π e seja $Q = (x_1, y_2)$. Como $d(P_1, Q) = |y_2 - y_1|$ e $d(P_2, Q) = |x_2 - x_1|$ temos, pelo *Teorema de Pitágoras* (ver Fig. 14),

$$d(P_1,P_2)^2 = d(P_2,Q)^2 + d(P_1,Q)^2 \iff d(P_1,P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 \iff$$

$$\boxed{d(P_1,P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

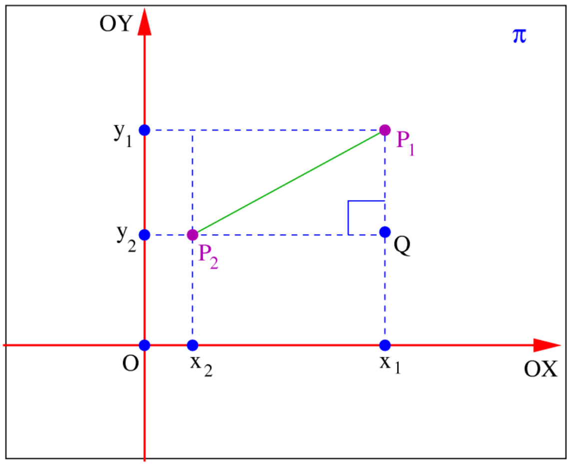


Fig. 14: Distância entre dois pontos no plano.

Observação 5

Sejam OXY um sistema de eixos concorrentes não-ortogonais, que se intersectam segundo um ângulo θ, e $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano.

Pela lei dos cossenos, a distância entre P_1 e P_2 é dada por:

$$d(P_1, P_2)^2 = d(P_1, Q)^2 + d(P_2, Q)^2 - 2\cos(\pi - \theta) d(P_1, Q)\, d(P_2, Q) \Longleftrightarrow$$

$$\boxed{d(P_1, P_2) = \sqrt{|x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2 + 2\cos(\theta)\, |x_2 - x_1|\, |y_2 - y_1|}}$$

A complexidade dessa fórmula para calcular a distância entre dois pontos num sistema de eixos não-ortogonais é uma motivação para a preferência pelos sistemas de eixos ortogonais, no qual a fórmula para o cálculo da distância é bem mais simples.

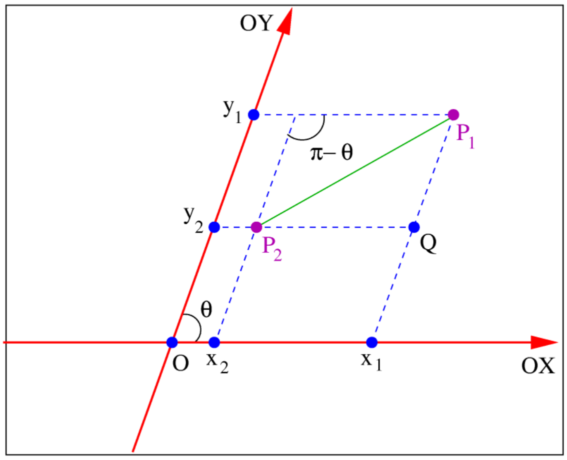


Fig. 15: Distância num sistema não-ortogonal do plano.

Definição 1

Dados um ponto A num plano π e um número $r > 0$, o **círculo C de centro A e raio $r > 0$** é o conjunto dos pontos do plano π situados à distância r do ponto A, ou seja:

$$C = \{P \in \pi \mid d(P, A) = r\}.$$

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano π e sejam a e b as coordenadas do centro A nesse sistema de eixos. Então,

$$P \in C \iff d(P, A) = r \iff d(P, A)^2 = r^2 \iff$$
$$\boxed{(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2}$$

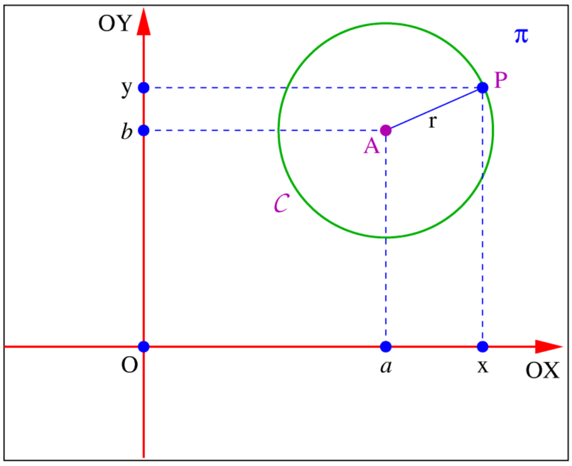


Fig. 16: Círculo de centro $A = (a, b)$ e raio $r > 0$.

Assim, associamos ao círculo C uma *equação* que relaciona a abscissa com a ordenada de cada um de seus pontos. Uma vez obtida a equação, as propriedades geométricas do círculo podem ser deduzidas por métodos algébricos.

Exemplo 1

Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação:

(a) $C : x^2 + y^2 - 4x + 6y = 0.$

Completando os quadrados, obtemos:

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 0$$
$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 + 6y + 9) = 0 + 4 + 9$$
$$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 13.$$

Portanto, o círculo C tem centro no ponto $A = (2, -3)$ e raio $r = \sqrt{13}$.

(b) $C : x^2 + y^2 + 3x - 5y + 1 = 0$.

Completando os quadrados, obtemos:

$$x^2 + 3x + y^2 - 5y = -1$$
$$\left(x^2 + 3x + \frac{9}{4}\right) + \left(y^2 - 5y + \frac{25}{4}\right) = -1 + \frac{9}{4} + \frac{25}{4}$$
$$\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{2}\right)^2 = \frac{30}{4}.$$

Assim, C é o círculo de centro no ponto $A = (-\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ e raio $\frac{\sqrt{30}}{2}$.

Exemplo 2

Dados A e B dois pontos distintos do plano π, seja $\mathcal{R}$ o conjunto dos pontos eqüidistantes de A e B, ou seja:

$$\boxed{\mathcal{R} = \{P \in \pi \mid d(P, A) = d(P, B)\}}$$

Vamos mostrar algebricamente que $\mathcal{R}$ é a **mediatriz do segmento** $\overline{AB}$, isto é, $\mathcal{R}$ é a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio M de $\overline{AB}$.

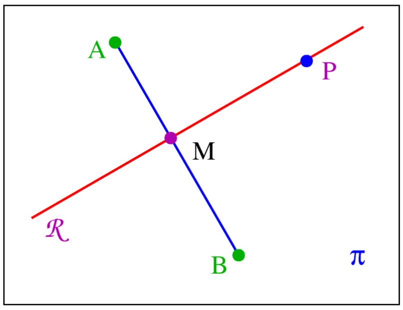


Fig. 17: Mediatriz e ponto médio de $\overline{AB}$.

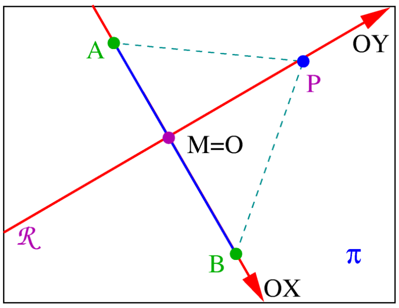


Fig. 18: Escolha do sistema de eixos OXY.

Para isso, escolhemos um sistema de eixos ortogonais OXY de modo que o eixo$-OX$ seja a reta que passa pelos pontos A e B, com origem no ponto médio M do segmento $\overline{AB}$, orientada de modo que A esteja à esquerda de B (figura 18).

Nesse sistema de eixos, A e B têm coordenadas $(-x_0, 0)$ e $(x_0, 0)$, respectivamente, para algum número real $x_0 > 0$. Então,

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in \mathcal{R} &\iff d(P, A) = d(P, B) \iff d(P, A)^2 = d(P, B)^2 \\ &\iff (x - (-x_0))^2 + (y - 0)^2 = (x - x_0)^2 + (y - 0)^2 \\ &\iff (x + x_0))^2 + y^2 = (x - x_0)^2 + y^2 \\ &\iff x^2 + 2xx_0 + x_0^2 + y^2 = x^2 - 2xx_0 + x_0^2 + y^2 \\ &\iff 2xx_0 = -2xx_0 \iff 4xx_0 = 0 \iff x = 0 \iff P \in \text{eixo} - OY\,. \end{aligned}$$

Portanto, $\mathcal{R} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = 0\} = \text{eixo} - OY$, que é, geometricamente a reta perpendicular ao segmento $\overline{AB}$ que passa pelo ponto médio M desse segmento, como queríamos provar.

Observação 6

O exemplo anterior ilustra como métodos algébricos resolvem problemas geométricos.

Exemplo 3

Dado o ponto $P = (x, y)$, considere o ponto $P' = (-y, x)$.

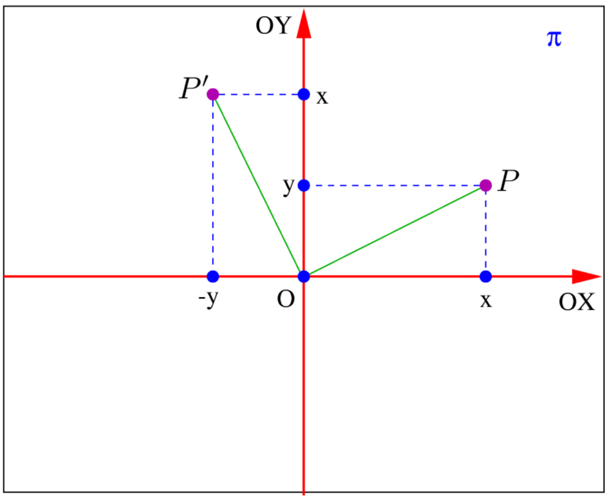


Fig. 19: Posição dos pontos P e P' no plano.

Primeiro observe que o triângulo $\triangle POP'$ é isósceles, pois:

$$\begin{cases} d(P, O)^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2 \\ d(P', O)^2 = (-y - 0)^2 + (x - 0)^2 = y^2 + x^2. \end{cases}$$

Além disso,

$$d(P, P')^2 = (-y - x)^2 + (x - y)^2 = y^2 + 2xy + x^2 + x^2 - 2xy + y^2$$
$$\Longrightarrow d(P, P')^2 = 2(x^2 + y^2) \Longrightarrow d(P, P')^2 = d(P, O)^2 + d(P', O)^2 .$$

Pela lei dos cossenos, o triângulo isósceles $\triangle POP'$ é retângulo em O.

Isso significa que o ponto P' é obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o do segmento OP em torno da origem.

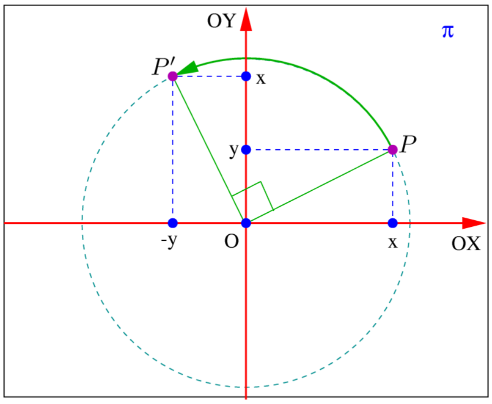


Fig. 20: P rotacionado de 90^o até coincidir com P'.

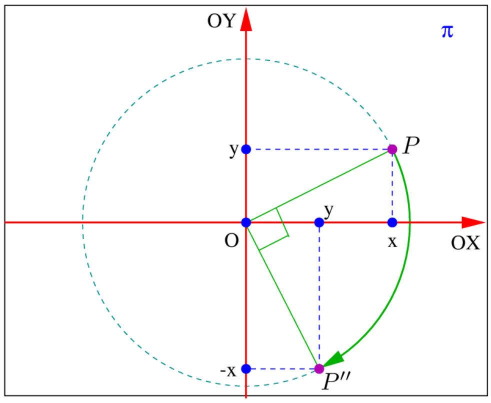


Fig. 21: P rotacionado de 90^o até coincidir com P''.

Consideremos agora o ponto $P'' = (y, -x)$. De maneira análoga, podemos provar que P'' é também obtido a partir do ponto P por uma rotação de 90^o, no sentido oposto ao anterior, do segmento OP em torno da origem (Fig. 21).

Convencionamos que a rotação de 90^o que leva o ponto $P = (x, y)$ no ponto $P' = (-y, x)$ tem **sentido positivo**, e que a rotação de 90^o que leva o ponto P no ponto P'' tem **sentido negativo**.

Exemplo 4

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e considere os pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$.

Então,

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

é o **ponto médio** do segmento $\overline{P_1P_2}$.

De fato, sendo $M = (x_M, y_M)$, $Q_1 = (x_M, y_1)$ e $Q_2 = (x_M, y_2)$, os triângulos $\triangle P_1MQ_1$ e $\triangle P_2MQ_2$ são congruentes (critério AAL).

Logo,

$$\begin{aligned}
& \bullet\ d(P_1, Q_1) = d(P_2, Q_2) \\
\iff & |x_M - x_1| = |x_2 - x_M| \\
\iff & x_M \text{ é o ponto médio entre } x_1 \text{ e } x_2 \\
\iff & x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}\,.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bullet\ d(Q_1, M) = d(Q_2, M) \\
\iff & |y_M - y_1| = |y_2 - y_M| \\
\iff & y_M \text{ é o ponto médio entre } y_1 \text{ e } y_2 \\
\iff & y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}\,.
\end{aligned}$$

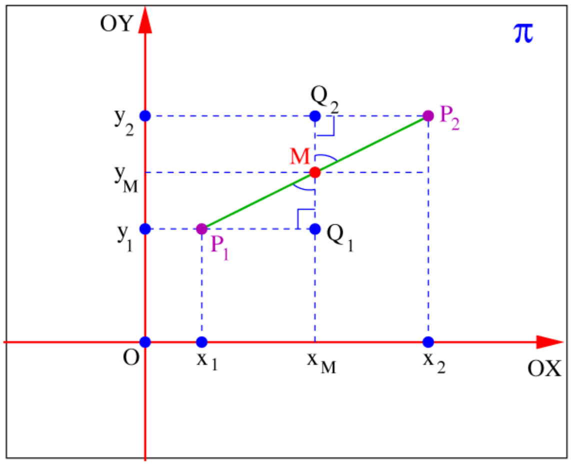


Fig. 22: M é o ponto médio do segmento P_1P_2.

Assim, as coordenadas do ponto médio M do segmento $\overline{P_1P_2}$ são os pontos médios das respectivas coordenadas dos pontos P_1 e P_2.

4. Exercícios de revisão

1. Considere os pontos $A = (1, 0)$, $B = (3, 2)$, $C = (4, 4)$, $D = (-2, 3)$, $E = (-3, -5)$. Calculando apenas distâncias entre pontos do plano responda:

(a) Quais dos pontos C, D e E se encontram na região delimitada pelo círculo α que passa pelo ponto A e tem centro no ponto B?

(b) Quais dos pontos B, D e E se encontram na região delimitada pelo círculo β que passa pelo ponto C e tem centro no ponto A?

(c) Faça um esboço da situação para comprovar suas respostas.

2. **(a)** Seja $\mathcal{R}$ o retângulo de vértices consecutivos $ABDC$ (percorridos no sentido anti-horário). Sabendo que $A = (-1, 1)$ e $D = (2, 2)$ são vértices opostos e que $\mathcal{R}$ tem seus lados paralelos aos eixos coordenados, determine os vértices B e C. Verifique que as diagonais se intersectam ao meio. O retângulo $\mathcal{R}$ é um quadrado?

(b) Responda as questões do item (a) se $D = (\pi, 3\pi/2)$.

3. Determine a equação cartesiana do círculo de centro C e raio r onde:

(a) $C = (1, 2)$, $r = \sqrt{3}$;

(b) $C = (1, -1)$, $r = \sqrt{11}$;

(c) $C = (1, 0)$, $r = 2$;

4. Determine o centro e o raio do círculo dado pela equação cartesiana:

(a) $x^2 + y^2 + 2x + 6y + 10 - \sqrt{2} = 0$;

(b) $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{2} + 2x - 3y + 6 = 0$;

(c) $x^2 + y^2 - 2\pi x + 2\pi y + \pi^2 = 0$;

5. Um círculo C de raio $r > 0$ tem seu centro $A = (x_0, y_0)$ no primeiro quadrante do plano ($x_0 > 0$, $y_0 > 0$). Determine as condições sobre os números x_0, y_0 e r de modo que C:

(a) não intersecte os eixos coordenados;

(b) intersecte o eixo-x em exatamente um ponto;

(c) intersecte o eixo-y em exatamente um ponto;

(d) intersecte o eixo-y em dois pontos;

(e) intersecte os eixos cartesianos em exatamente um ponto;

(f) intersecte o eixo-x em dois pontos e o eixo-y em um ponto;

(g) intersecte o eixo-x em exatamente um ponto e não intersecte o eixo-y;

6. Sejam A e B pontos arbitrârios no plano. Determine as coordenadas do ponto C, em termos das coordenadas dos pontos A e B obtido a partir do ponto B:

(a) por uma rotação de 90^o em torno do ponto A.

(b) por uma rotação de -90^o em torno do ponto A.

4.1. Respostas

1. (a) O raio do círculo α é $d(B,A) = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$. Temos que $d(B,C) = \sqrt{5} < \sqrt{8}$, $d(B,D) = \sqrt{26} > \sqrt{8}$ e $d(B,E) = \sqrt{85} > \sqrt{8}$. Portanto, C se encontra na região delimitada por α. (b) O raio do círculo β é $d(A,C) = 5$. Temos que $d(A,B) = 2\sqrt{2} < 5$, $d(A,D) = 3\sqrt{2} < 5$ e $d(A,E) = \sqrt{41} > 5$. Portanto, B e D se encontram na região delimitada por β.

2. (a) $B = (2,1)$, $C = (-1,2)$; $M_{AD} = \frac{1}{2}(-1+2, 1+2) = \frac{1}{2}(1,3)$ e $M_{BC} = \frac{1}{2}(2+(-1), 1+2) = \frac{1}{2}(1,3)$, logo as diagonais AD e BC se intersectam ao meio. Como $d(A,B) = 3$ e $d(A,C) = 2$, o retângulo não é um quadrado. (b) $B = (\pi, 1)$, $C = (-1, 3\pi/2)$; $M_{AD} = \frac{1}{2}(-1+\pi, 1+3\pi/2)$ e $M_{BC} = \frac{1}{2}(\pi+(-1), 1+3\pi/2)$, logo as diagonais AD e BC se intersectam ao meio. Como $d(A,B) = \pi + 1 \neq d(A,C) = 3\pi/2 - 1$, o retângulo não é um quadrado.

3. **(a)** $x^2 + y^2 - 2x - 4y + 2 = 0$; (b) $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 9 = 0$; (c) $x^2 + y^2 - 2x - 3 = 0$.

4. (a) $C = (-1,-3)$, $r = \sqrt{2}$; (b) $C = (-2,3)$, $r = 1$; (c) $C = (\pi, -\pi)$, $r = \pi$.

5. (a) $r < x_0$ e $r < y_0$; (b) $y_0 = r$; (c) $x_0 = r$; (d) $x_0 < r$; (e) $x_0 = y_0 = r$; (f) $y_0 < r = x_0$; (g) $y_0 = r < x_0$;

6. Indicação: transporte o problema para a origem, ou seja, resolva o problema com A =origem e $P = B - A$ para obter o ponto rotacionado P'. O ponto procurado será $B' = P' + A$.

Capítulo 2

Retas no plano

Nosso objetivo é determinar a equação algébrica que representa uma reta no plano. Para isso, vamos analisar separadamente dois tipos de reta: *reta vertical* e *reta não-vertical*.

1. Retas verticais e não-verticais

Definição 1

Uma reta r é **vertical** quando coincide com o eixo$-OY$ ou quando é paralela ao eixo$-OY$ (isto é, $r \cap \text{eixo} - OY = \varnothing$).

Note que todos os pontos pertencentes à reta vertical r têm a mesma abscissa, ou seja, se

$$r \cap \text{eixo} - OX = \{(x_0, 0)\},$$

então

$$r = \{(x_0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Neste contexto, dizemos que a equação da reta r é $x = x_0$ e escrevemos

$$\boxed{r : x = x_0}$$

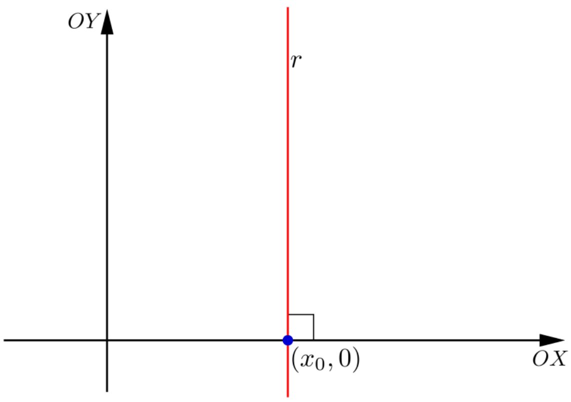


Fig. 1: r é vertical e a sua equação é $r : x = x_0$.

Designamos por r_{x_0} a reta vertical que intersecta o eixo-OX no ponto de abscissa x_0.

Definição 2

Uma **função** $f : D \to \mathbb{R}$ definida num subconjunto $D \subset \mathbb{R}$ é uma lei que a cada número real $x \in D$ associa um **único** número real $f(x)$, chamado a imagem de x pela função f.

O **gráfico** da função $f : D \to \mathbb{R}$ é o subconjunto $\mathbf{G}(f) \subset \mathbb{R}^2$ definido por:

$$\boxed{\mathbf{G}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in D \text{ e } y = f(x)\}}$$

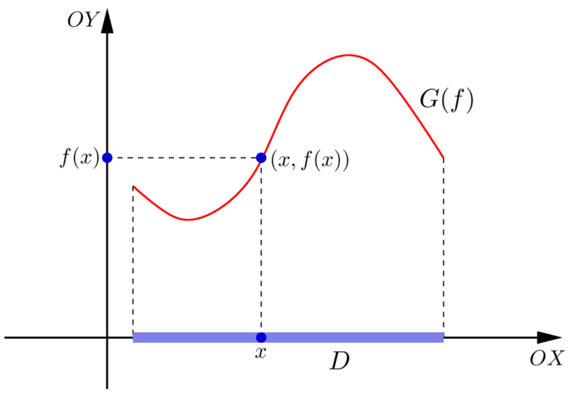


Fig. 2: Gráfico da função $f : D \to \mathbb{R}$.

Um critério para verificar se uma curva C no plano é o gráfico de uma função $f : D \to \mathbb{R}$ é:

Uma curva C no plano é o gráfico de uma função f se, e somente se, as retas verticais intersectam C em no máximo um ponto. Isto é:

$$C \text{ é gráfico de uma função} \iff \begin{cases} C \cap r_{x_0} = \varnothing \\ \text{ou} \\ C \cap r_{x_0} = \{P\}, \quad \forall x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Ou, de modo equivalente:

C não é gráfico de uma função se, e só se, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, $C \cap r_{x_0}$ consistede dois ou mais pontos.

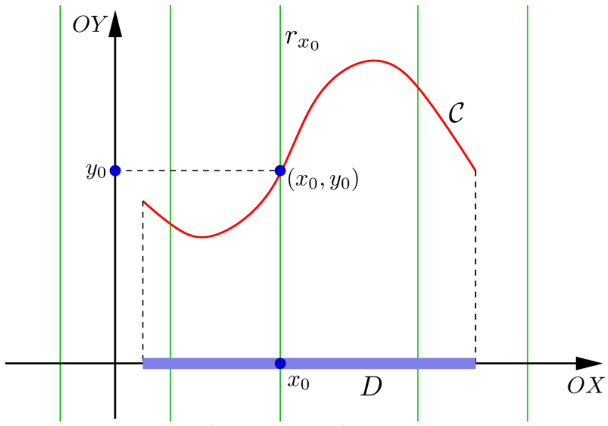


Fig. 3: A curva C é gráfico de uma função, pois as retas verticais intersectam a curva em exatamente um ponto ou em nenhum ponto.

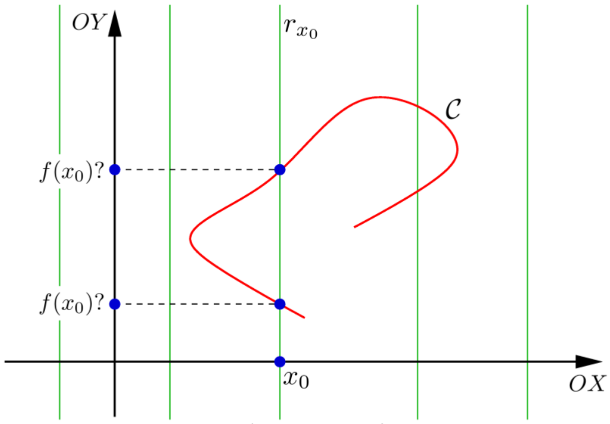


Fig. 4: A curva C **não** é gráfico de uma função, pois existem retas verticais que intersectam a curva em mais de um ponto.

De fato, se $C = \mathbf{G}(f)$, onde f é uma função de D em $\mathbb{R}$, então, para todo $x_0 \in D$, $r_{x_0} \cap C = \{(x_0, f(x_0))\}$, e para $x_0 \notin D$, $r_{x_0} \cap C = \varnothing$.

Reciprocamente: **se** C é uma curva que intersecta as verticais em no máximo um ponto e $D = \{x_0 \in \mathbb{R} \mid r_{x_0} \cap C \neq \varnothing\}$, **então** C é o gráfico da função $f : D \to \mathbb{R}$ dada por $f(x_0) = y_0$, onde (x_0, y_0) é o ponto de interseção de C com r_{x_0}, para todo $x_0 \in D$ (veja a figura 3).

Exemplo 1

Um círculo C de centro $A = (a, b)$ e raio $r > 0$ **não é** o gráfico de uma função.

De fato, a interseção $C \cap r_a = \{(a, b - r), (a, b + r)\}$ do círculo C com a reta vertical $x = a$ possui dois pontos distintos.

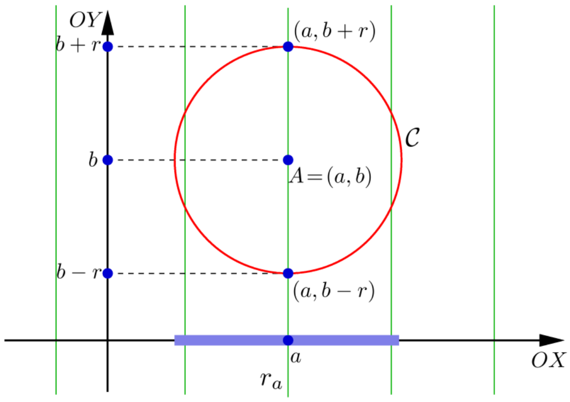


Fig. 5: Vertical $r_a : x = a$ intersectando C em mais de um ponto.

Exemplo 2

Uma *reta vertical* $r_{x_0} : x = x_0$ também não é gráfico de uma função, pois a interseção $r_{x_0} \cap r_{x_0} = r_{x_0} = \{(x_0, y) \,|\, y \in \mathbb{R}\}$ possui uma quantidade infinita de pontos.

Exemplo 3

Uma reta *não-vertical* r é o gráfico de uma função f definida em todo o conjunto $D = \mathbb{R}$ dos números reais. De fato, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$, a interseção $r \cap r_{x_0}$ possui um único ponto, pois, caso contrário, $r = r_{x_0}$ ou $r \cap r_{x_0} = \varnothing$, ou seja, r seria uma reta vertical.

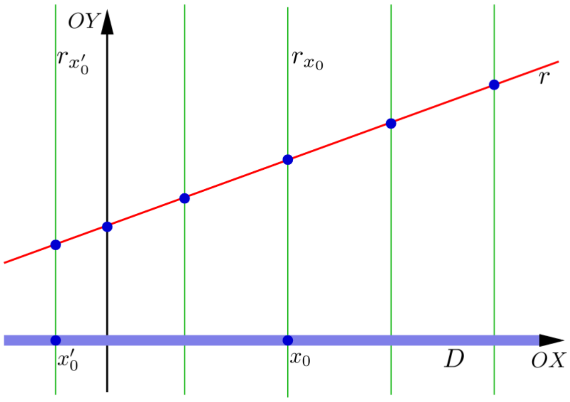


Fig. 6: Cada vertical intersecta a reta não-vertical r em um único ponto.

Definição 3

Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **afim**, se para todo $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, onde a e b são números reais. Quando $b = 0$, a função diz-se também **linear**.

Teorema 1

O gráfico de uma função afim é uma reta não-vertical e, reciprocamente, toda reta não-vertical é o gráfico de uma função afim.

Prova.

• Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, uma função afim e seja

$$\mathbf{G}(f) = \{(x, ax + b) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

seu gráfico.

Para provar que $\mathbf{G}(f)$ é uma reta, basta verificar que três pontos quaisquer de $\mathbf{G}(f)$ são colineares.

Sejam $P_1 = (x_1, ax_1 + b)$, $P_2 = (x_2, ax_2 + b)$ e $P_3 = (x_3, ax_3 + b)$ três pontos de $\mathbf{G}(f)$ tais que $x_1 < x_2 < x_3$.

Como

$$\begin{aligned}
d(P_1, P_2) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + [(ax_2 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (ax_2 - ax_1)^2} \\
&= (x_2 - x_1)\sqrt{1 + a^2}, \\
d(P_2, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_2 + b)]^2} \\
&= \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (ax_3 - ax_2)^2} \\
&= (x_3 - x_2)\sqrt{1 + a^2}, \\
d(P_1, P_3) &= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + [(ax_3 + b) - (ax_1 + b)]^2} \\
&= \sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (ax_3 - ax_1)^2} \\
&= (x_3 - x_1)\sqrt{1 + a^2},
\end{aligned}$$

obtemos que:

$$d(P_1, P_3) = d(P_1, P_2) + d(P_2, P_3).$$

Portanto, P_1, P_2 e P_3 são colineares.

• Considere, agora, uma reta r não-vertical.

Devemos verificar que existem números reais a e b tais que $r = \mathbf{G}(f)$, onde $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função afim dada por $f(x) = ax + b$.

Para isso, tome b como sendo a ordenada do único ponto $(0, b)$ onde a reta r (que não é vertical) intersecta o eixo$-OY$ e seja $a = \dfrac{y_0 - b}{x_0}$, onde (x_0, y_0) é um ponto qualquer de r distinto de $(0, b)$.

Observe que $x_0 \neq 0$, pois, caso contrário, (x_0, y_0) pertenceria ao eixo $-OY$ e r seria, então, uma reta vertical.

Já provamos que o gráfico da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = ax + b$, é uma reta não-vertical.

Como $f(0) = b$ e

$$f(x_0) = ax_0 + b = \frac{y_0 - b}{x_0} x_0 + b = y_0,$$

obtemos que $(0, b) \in \mathbf{G}(f)$ e $(x_0, y_0) \in \mathbf{G}(f)$.

Logo $r = \mathbf{G}(f)$, pois r e $\mathbf{G}(f)$ são duas retas que contêm os pontos $(0, b)$ e (x_0, y_0). ■

Observação 1

Toda reta r não-vertical se representa por uma equação do 1^o grau da forma $y = ax + b$, onde:

• b é a ordenada do ponto onde r intersecta o eixo$-OY$. Se $b = 0$, então r passa pela origem.

• a é a razão entre o acréscimo de y e o acréscimo de x quando se passa de um ponto a outro sobre a reta.

De fato, se $x_0 \neq x_1$, $y_0 = ax_0 + b$ e $y_1 = ax_1 + b$, então

$$\frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = \frac{(ax_1 + b) - (ax_0 + b)}{x_1 - x_0} = \frac{a(x_1 - x_0)}{x_1 - x_0} = a\,.$$

• O número a chama-se **inclinação** da reta $r : y = ax + b$.

Além disso,

◇ **Se** $a > 0$, a função $y = ax + b$ é **crescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = ax_1 + b < y_2 = ax_2 + b$ (ver Fig. 7).

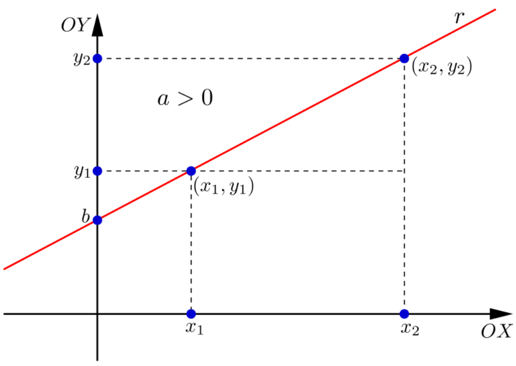


Fig. 7: Para $a > 0$, $y = ax + b$ é crescente.

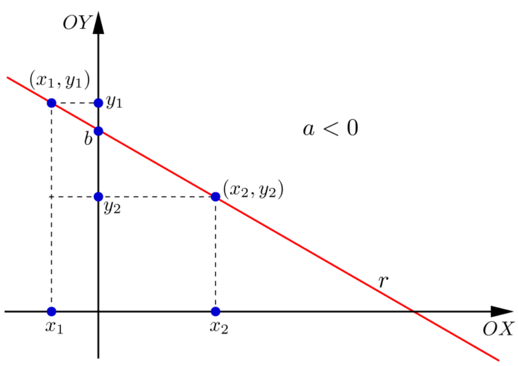


Fig. 8: Para $a < 0$, $y = ax + b$ é decrescente.

◇ **Se** $a < 0$, a função $y = ax + b$ é **decrescente**, isto é, se $x_1 < x_2$, então $y_1 = ax_1 + b > y_2 = ax_2 + b$ (ver Fig. 8).

◇ **Se $a = 0$**, a função $y = ax + b$ é **constante**, pois $y = b$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Neste caso, dizemos que $r : y = b$ é uma **reta horizontal**.

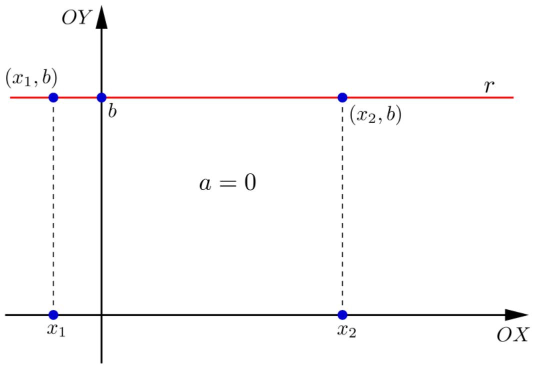


Fig. 9: Para $a = 0$, $y = ax + b$ é constante.

• Seja θ o ângulo que a reta $r : y = ax + b$ faz com o semi-eixo$-OX$ positivo. Então,

$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = a}$$

De fato, veja as figuras 10, 11 e 12:

$$a = \frac{y_2 - 0}{x_2 - x_1} = \operatorname{tg}\theta.$$

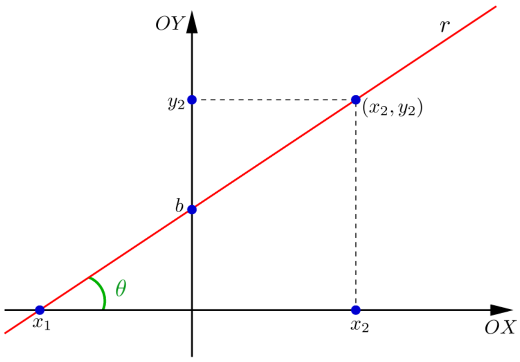


Fig. 10: Caso $0 < \theta < \frac{\pi}{2} = 90^o$.

$$\begin{aligned} a &= \frac{0 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= -\operatorname{tg}(\pi - \theta)\ . \\ &= \operatorname{tg}\theta \end{aligned}$$

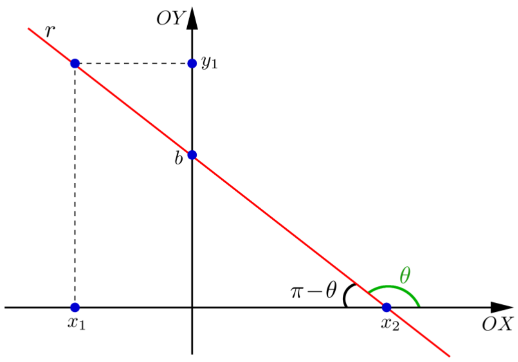


Fig. 11: Caso $\frac{\pi}{2} = 90^o < \theta < \pi = 180^o$.

$$\theta = 0 \Longrightarrow a = 0 = \operatorname{tg}\theta.$$

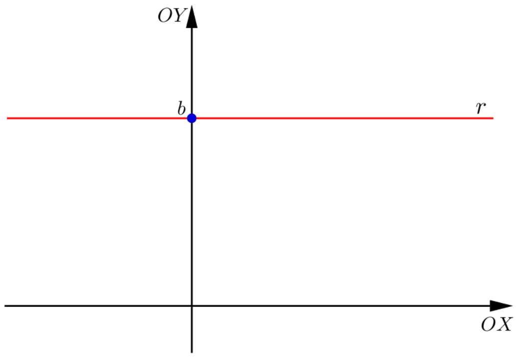


Fig. 12: Caso $\theta = 0 = 0^o$.

Exemplo 4

Determine as equações das retas que contêm os lados do triângulo de vértices nos pontos $A = (1,1)$, $B = (4,1)$ e $C = (1,3)$.

Solução.

• A reta r_1 que contêm o lado AC é vertical, pois A e C têm a mesma abscissa 1. Assim, $r_1 : x = 1$.

• A reta r_2 que contêm o lado AB é horizontal, pois A e B têm a mesma ordenada 1. Portanto, $r_2 : y = 1$.

• A reta r_3 que contêm o lado BC tem inclinação $a = \dfrac{3-1}{1-4} = -\dfrac{2}{3}$. Assim, a equação de r_3 é da forma:

$$r_3 : y = -\frac{2}{3}x + b.$$

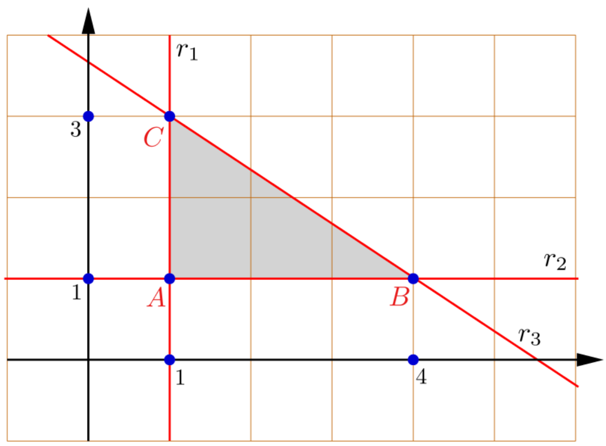


Fig. 13: Triângulo de vértices A, B e C.

Determinemos o valor de b: como $B = (4, 1) \in r_3$, temos, substituindo x por 4 e y por 1 na equação anterior:

$$1 = -\frac{2}{3} \cdot 4 + b \Longrightarrow b = 1 + \frac{8}{3} = \frac{11}{3}.$$

Portanto,

$$r_3 : y = -\frac{2}{3}x + \frac{11}{3},$$

é a equação da terceira reta. □

2. Retas paralelas

Definição 4

Se duas retas r e r' estão contidas num plano e não se intersectam, dizemos que são **paralelas**. Nesse caso escrevemos $r \parallel r'$.

Assim, se r e r' são retas contidas num plano, $r \parallel r' \Longleftrightarrow r \cap r' = \varnothing$.

Note que se $r \parallel r'$, então r é vertical se, e somente se, r' é vertical.

Proposição 1

Sejam $r : y = ax + b$ e $r' : y = a'x + b'$ duas retas não-verticais.

Então $r \parallel r'$ se, e somente se, $a = a'$ e $b \neq b'$.

Isto é, duas retas não-verticais são paralelas se, e somente se, têm a mesma inclinação e cortam o eixo$-OY$ em pontos diferentes.

Prova.

(a) Verifiquemos primeiro que se $r \parallel r'$, então $a = a'$ e $b \neq b'$.

Se $r \parallel r'$, então $b \neq b'$, pois, caso contrário, $(0, b) = (0, b') \in r \cap r'$, uma contradição, já que $r \cap r' = \varnothing$.

Além disso, $a = a'$, pois se $a \neq a'$, as ordenadas $ax_0 + b$ e $a'x_0 + b'$ dos pontos sobre as retas r e r' de abscissa $x_0 = \dfrac{b' - b}{a - a'}$, seriam iguais e, consequentemente, $r \cap r' \neq \varnothing$. De fato,

$$\begin{aligned}
ax_0 + b &= a\,\frac{b'-b}{a-a'} + b = \frac{a(b'-b)+b(a-a')}{a-a'} = \frac{ab'-ab+ab-a'b}{a-a'} \\
&= \frac{ab'-a'b}{a-a'} = \frac{ab'+a'b'-a'b'-a'b}{a-a'} = \frac{-a'b+a'b'+ab'-a'b'}{a-a'} \\
&= \frac{a'(b'-b)+b'(a-a')}{a-a'} = a'\,\frac{b'-b}{a-a'} + b'\,\frac{a-a'}{a-a'} \\
&= a'\,\frac{b'-b}{a-a'} + b' = a'\,x_0 + b'
\end{aligned}$$

(b) Suponhamos, agora, que $a = a'$ e $b \neq b'$, e verifiquemos que $r \parallel r'$. Como $b \neq b'$, temos $ax+b \neq ax+b'$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Logo, $r \cap r' = \emptyset$, isto é, r e r' são paralelas. ■

Exemplo 5

Determine a equação da reta r' que passa pelo ponto $A = (1,4)$ e é paralela à reta

$$r : y = 3x + 2.$$

Solução.

Como r' é paralela à reta não-vertical r, temos que r' é, também, não-vertical.

A equação de r' é da forma $r' : y = 3x + b'$, pois r e r' têm a mesma inclinação $a = 3$.

Além disso, como $A = (1,4) \in r'$, as coordenadas $x = 1$ e $y = 4$ desse ponto devem satisfazer a equação de r', isto é, $4 = 3 \cdot 1 + b'$. Portanto, $b' = 4 - 3 = 1$ e $r' : y = 3x + 1$ é a equação procurada. □

3. Retas perpendiculares

Duas retas são **perpendiculares** quando o ângulo entre elas é de 90^o (ou $\dfrac{\pi}{2}$ radianos). Quando r e r' são retas perpendiculares escrevemos $r \perp r'$.

Sejam r e r' retas perpendiculares. Se r é horizontal,

$$r : y = b,$$

então r' é vertical,

$$r' : x = c,$$

e vice-versa.

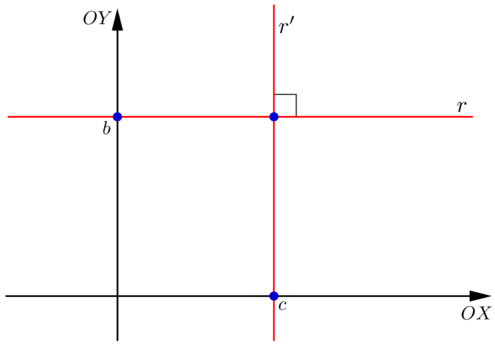


Fig. 14: Toda reta horizontal é perpendicular a toda reta vertical.

Proposição 2

Sejam r e r' retas não-verticais e não-horizontais. Isto é,

$$r : y = ax + b \quad \text{e} \quad r' : y = mx + n,$$

com $a \neq 0$ e $m \neq 0$.

Então r e r' são perpendiculares se, e somente se, $ma = -1$.

Prova.

• *Caso particular:* Suponhamos que r e r' passam pela origem, isto é, $r : y = ax$ e $r' : y = mx$.
Seja $P = (1, a) \in r$.
Observe que, fazendo uma rotação de 90^o em torno da origem, no sentido positivo, o ponto P vai cair sobre o ponto $P' = (-a, 1)$.
Logo as retas são perpendiculares se, e só se, o ponto P' pertence a r', isto é, as coordenadas de P' satisfazem a equação de r'. Assim,

$$r \perp r' \iff 1 = m\,(-a) \iff ma = -1.$$

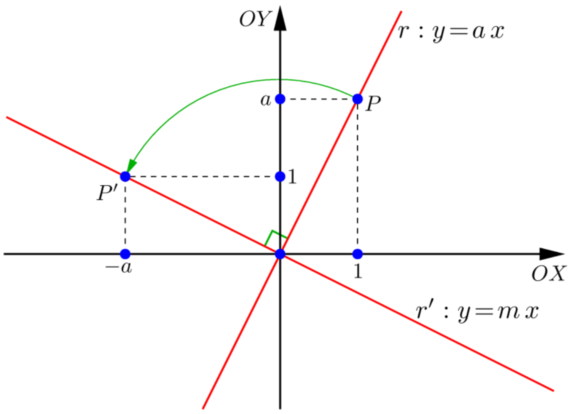


Fig. 15: Retas perpendiculares que se intersectam na origem.

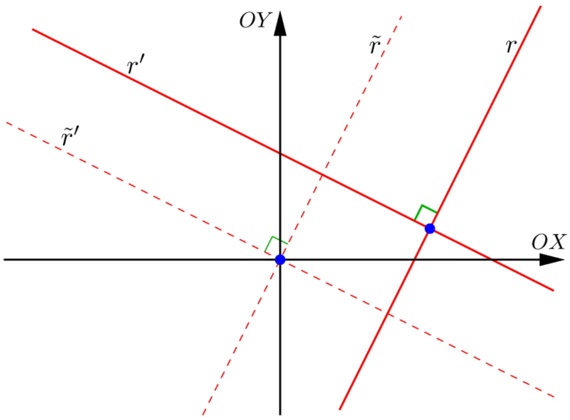


Fig. 16: Retas perpendiculares que não se intersectam na origem.

• *Caso geral:* Sejam $r : y = ax + b$ e $r' : y = mx + n$ retas perpendiculares. Consideremos as retas $\tilde{r} : y = ax$ e $\tilde{r}' : y = mx$ que passam pela origem e são paralelas, respectivamente, às retas r e r'.
Então, $r \perp r' \iff \tilde{r} \perp \tilde{r}' \iff ma = -1$. ■

Exemplo 6

Determine a equação da reta r' que passa pelo ponto A e é perpendicular à reta r, onde:

(a) $r : x = 2\,, \quad A = (5, 3)\,;$ **(b)** $r : y = 4x + 5\,, \quad A = (4, 1)\,.$

Solução.
(a) Como r é vertical, r' deve ser horizontal e a sua equação da forma $r' : y = b$.
Sendo que $A = (5, 3) \in r'$, devemos ter $3 = b$ e, portanto, $r' : y = 3$.

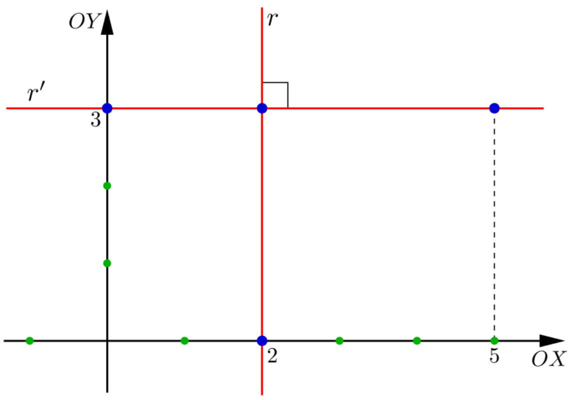


Fig. 17: Reta r' horizontal, $r' \perp r$, $A = (5, 3) \in r'$.

(b) Como r é não-vertical e não-horizontal, a equação de r' deve ser da forma $r' : y = ax + b$, com $4a = -1$ e b por determinar. Isto é, $a = -\dfrac{1}{4}$ e $r' : y = -\dfrac{1}{4}x + b$.

Para determinar o valor de b usamos que $A = (4, 1) \in r'$. Ou seja, as coordenadas de A devem satisfazer a equação de r':

$$1 = -\frac{1}{4} \cdot 4 + b \Longrightarrow b = 2\,.$$

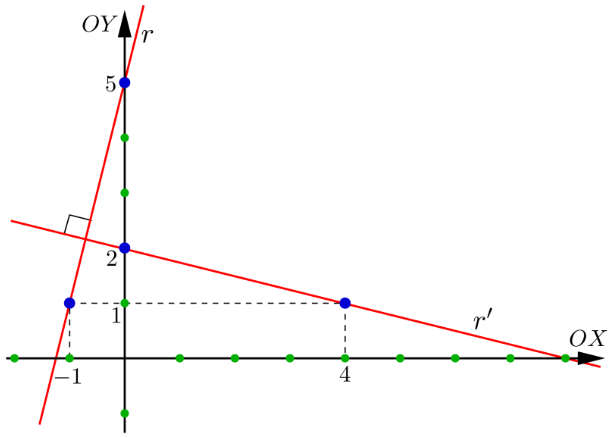


Fig. 18: Reta $r : y = 4x + 5$, $\quad r' \perp r$, $A = (4, 1) \in r'$.

Assim, $r' : y = -\dfrac{1}{4}x + 2$ é a equação procurada de r'. $\square$

Exemplo 7

Determine a mediatriz do segmento AB, onde $A = (1, 5)$ e $B = (5, 3)$

Solução.

A reta r que passa pelos pontos A e B é não-vertical e tem inclinação

$$a = \frac{3-5}{5-1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}\,.$$

Então $r : y = -\dfrac{1}{2}x + b$.

Como $A = (1, 5) \in r$, temos $5 = -\dfrac{1}{2} \cdot 1 + b$, isto é, $b = 5 + \dfrac{1}{2} = \dfrac{11}{2}$.

Portanto, $r : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{11}{2}$.

A mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é a reta r' que passa pelo ponto médio M de AB e é perpendicular a r. Então a reta r' tem inclinação $m =$

$-\dfrac{1}{a} = -\dfrac{1}{-1/2} = 2$ e sua equação é $r' : y = 2x + b$. Além disso, como $M = \left(\dfrac{1+5}{2}, \dfrac{5+3}{2}\right) = (3,4) \in r'$, $4 = 2 \cdot 3 + b$, ou seja, $b = 4 - 6 = -2$. Portanto, a equação da mediatriz do segmento $\overline{AB}$ é $r' : y = 2x - 2$. $\square$

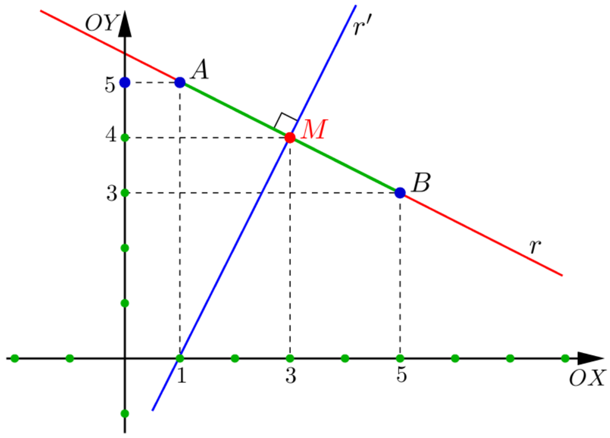


Fig. 19: Mediatriz r' do segmento AB.

4. Equação cartesiana da reta

Consideremos o plano munido de um sistema de eixos ortogonais OXY. Uma reta r no plano pode ser:

• *Vertical* quando coincide com o eixo$-OY$ ou é paralela a esse eixo. Nesse caso, a equação de r é $x = d$, onde $d \in \mathbb{R}$ é uma constante. Mais precisamente, a reta r, caracterizada pelo número $d \in \mathbb{R}$, é o conjunto

$$\boxed{r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid x = d\}}$$

• *Não-vertical*. Nesse caso, existem $m, n \in \mathbb{R}$ tais que $r : y = mx + n$, ou seja, a reta r é o conjunto

$$\boxed{r = \{(x,y) \in \mathbb{R} \mid mx - y = -n\}}$$

Assim, é fácil verificar que toda reta r do plano se expressa na forma:

$$\boxed{r : ax + by = c} \tag{1}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$, sendo a e b não ambos iguais a zero. A equação (1) é a **equação cartesiana** da reta r.

Reciprocamente, dada a equação (1), onde a e b não são simultaneamente nulos, temos que:

(a) se $b = 0$, então r é uma reta vertical e sua equação é $r : x = \frac{c}{a}$ (lembre que se $b = 0$, então, necessariamente, $a \neq 0$).

Note que, se fizermos variar c em $\mathbb{R}$, mantendo $a \neq 0$ fixo na equação $x = \frac{c}{a}$, obtemos todas as retas verticais possíveis.

(b) se $b \neq 0$, então a equação (1) representa uma reta não-vertical e se escreve na forma:

$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Isto é, r é não-vertical, tem inclinação $m = -\frac{a}{b}$ e corta o eixo$-OY$ no ponto $\left(0, \frac{c}{b}\right)$.

Observe que, variando a e c em $\mathbb{R}$ e mantendo $b \neq 0$ fixo, a equação $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ representa todas as retas não-verticais do plano.

Assim, *a equação* (1)*, onde pelo menos um dos coeficientes a ou b é diferente de zero, representa todas as retas do plano.*

Exemplo 8

Determine a equação cartesiana das retas perpendiculares à reta r que passa pelos pontos $A = (1, 0)$ e $B = (-1, 3)$.

Solução.

A reta r tem inclinação $m = \frac{3-0}{-1-1} = -\frac{3}{2}$. As retas perpendiculares a r devem, portanto, ter inclinação $m' = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-3/2} = \frac{2}{3}$. Logo a equação de uma reta perpendicular a r é

$$r'_d : y = \frac{2}{3}x + d.$$

Variando $d \in \mathbb{R}$ obtemos a equação de qualquer reta perpendicular à reta r.

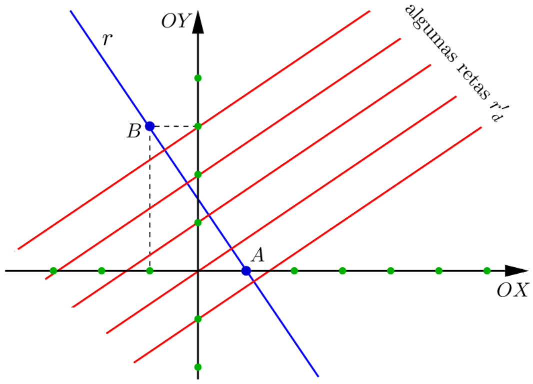


Fig. 20: Reta passando pelos pontos A e B e algumas retas da família $r'_d : 2x - 3y = c$, (exemplo 8).

Escrevemos o valor d como sub-índice em r'_d para indicar que a reta em questão depende do valor d. Ou seja, mudar o valor de d significa considerar outra reta, também perpendicular a r.

A equação da reta r'_d se escreve na forma cartesiana como:

$$r'_d : -\frac{2}{3}x + y = d\,, \qquad \text{ou, ainda,} \qquad r'_d : 2x - 3y = -3d\,.$$

Nessa equação, d é um número real qualquer, assim como $-3d$. Portanto, fazendo $c = -3d$, a equação da reta pode ser escrita na forma:

$$r'_d : 2x - 3y = c\,,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ é um número real arbitrário. □

Observação 2

• A condição de que pelo menos um dentre dois números a e b seja diferente de zero é equivalente a $a^2 + b^2 \neq 0$.

• Se $ax + by = c$ é uma reta, e $\lambda \neq 0$ é um número real, então a equação $\lambda ax + \lambda by = \lambda c$ representa a mesma reta, pois, se um ponto (x, y) do plano verifica uma dessas equações, então, necessariamente, verifica a outra.

Observação 3

A equação cartesiana da reta r que corta o eixo-horizontal no ponto de abscissa a e o eixo-vertical no ponto de ordenada b, com a e b diferentes de zero, é $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

De fato, como $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$ são pontos distintos e a equação $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ representa uma reta que passa por A e B, concluimos que a equação de r é exatamente $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$, pois por dois pontos distintos passa uma única reta.

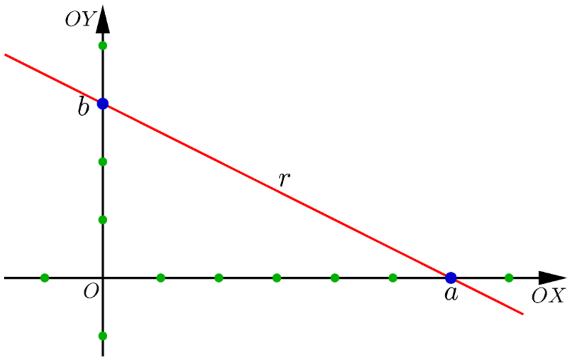


Fig. 21: Reta passando pelos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.

Exemplo 9

Uma reta r que passa pelo ponto $P = (2, 4/3)$ forma com os semi-eixos coordenados positivos um triângulo de perímetro 12. Determine sua equação.

Solução.

Sejam a e b números reais positivos tais que

$$\{(a, 0)\} = r \cap \text{eixo} - OX \quad \text{e} \quad \{(0, b)\} = r \cap \text{eixo} - OY.$$

Pela observação anterior, $r : \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ é a equação cartesiana de r.

Como $P = (2, 4/3) \in r$, temos:

$$\frac{2}{a} + \frac{4}{3b} = 1 \iff 6a + 4a = 3ab.$$

Além disso, o perímetro do triângulo $\triangle AOB$ é 12, ou seja:

$$a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12\,,$$

onde $A = (a, 0)$ e $B = (0, b)$.

Temos então, que resolver o sistema

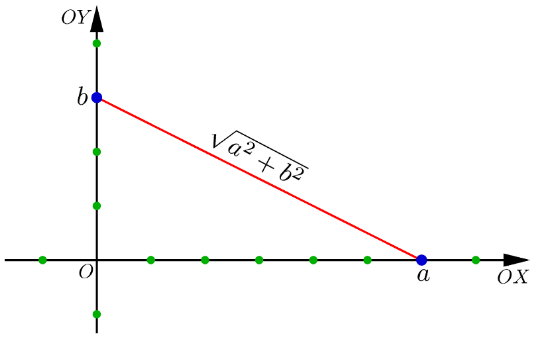


Fig. 22: Reta passando pelos pontos $(a, 0)$ e $(0, b)$.

$$\begin{cases} 6a + 4b = 3ab \\ a + b + \sqrt{a^2 + b^2} = 12\,. \end{cases} \tag{2}$$

Elevando ao quadrado a segunda equação, obtemos que:

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 = (12 - (a+b))^2 \\
\Longleftrightarrow\ & a^2 + b^2 = 144 - 24(a+b) + (a^2 + 2ab + b^2) \\
\Longleftrightarrow\ & 24(a+b) = 144 + 2ab \\
\Longleftrightarrow\ & 12(a+b) = 72 + ab\,.
\end{aligned}$$

Assim, o sistema (2) é equivalente ao sistema:

$$\begin{cases} 12(a+b) = 72 + ab \\ 4a + 6b = 32ab\,. \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -36(a+b) = -3 \cdot 72 - 3ab \\ 4a + 6b = 3ab \end{cases} \tag{3}$$

Somando as duas equações, obtemos que:

$$-32a - 30b = -3 \cdot 72 \Longleftrightarrow 16a + 15b = 108 \Longleftrightarrow b = \frac{108 - 16a}{15} \tag{4}$$

Substituindo $b = \dfrac{108 - 16a}{15}$ na equação $6b + 4a = 3ab$, temos:

$$\begin{aligned}
& \frac{6}{15}(108 - 16a) + 4a = \frac{3}{15}a(108 - 16a) \\
\Longleftrightarrow\ & 6(108 - 16a) + 60a = 3a(108 - 16a) \\
\Longleftrightarrow\ & 2(108 - 16a) + 20a = -16a^2 + 108a \\
\Longleftrightarrow\ & 16a^2 - 108a - 32a + 20a + 216 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 16a^2 - 120a + 216 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & 2a^2 - 15a + 27 = 0 \\
\Longleftrightarrow\ & a = \frac{15 \pm \sqrt{225 - 216}}{4} = \frac{15 \pm \sqrt{9}}{4} \\
\Longleftrightarrow\ & a = \frac{18}{4} = \frac{9}{2} \text{ ou } a = 3\,.
\end{aligned}$$

Portanto, se $a_1 = 9/2$, então, por (4),

$$b_1 = \frac{108 - 16 \cdot 9/2}{15} = \frac{108 - 72}{15} = \frac{36}{15} = \frac{12}{5}\,,$$

e a equação da reta r_1 é $\dfrac{2x}{9} + \dfrac{5y}{12} = 1 \Longleftrightarrow 8x + 15y = 36$.

Se $a_2 = 3$, então $b_2 = \dfrac{108 - 16 \cdot 3}{15} = \dfrac{60}{15} = 4$, e a equação da reta r_2 é $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{4} = 1 \Longleftrightarrow 4x + 3y = 12$.

Assim, o problema tem duas soluções:

$$r_1 : 8x + 15y = 16 \quad \text{e} \quad r_2 : 4x + 3y = 12. \square$$

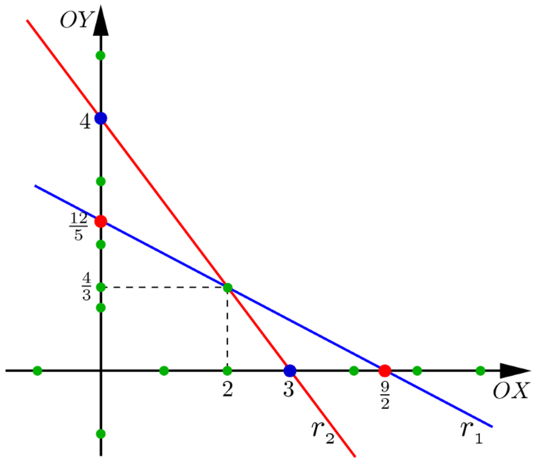


Fig. 23: Retas r_1 e r_2.

5. Exercícios de revisão

1. Sejam $A = (-1, -2)$, $B = (3, 1)$ e $C = (1, 4)$.

(a) Determine as equações das retas que contêm os pontos A, B e C.

(b) Determine as equações das retas que contêm os pontos médios C', B' e A' dos segmentos AB, AC e BC, respectivamente. Qual a relação entre as inclinações dessas retas e as retas do item anterior?

(c) Sejam P, Q e R pontos não-colineares do plano. Verifique que os lados do triângulo cujos vértices são os pontos médios dos segmentos PQ, PR e QR são paralelos aos lados do triângulo $\triangle PQR$.

Indicação: dados os pontos não-colineares P, Q e R escolha um sistema ortogonal de coordenadas de modo que $P = (p, 0)$, $Q = (0, q)$ e $R = (r, 0)$, com $p < 0 < r$. Basta comparar a inclinação da reta que contém o lado PR com a inclinação da reta que contém o segmento R', P', onde R' é o ponto médio de PQ e P' é o ponto médio de QR.

2. Determine a mediatriz do segmento AB, onde $A = (2, 3)$ e $B = (5, 4)$.

3. Determine a equação da reta paralela à reta $y = 2x + 1$ que passa pelo ponto médio do segmento AB, onde $A = (1, -1)$ e $B = (2, 3)$.

4. Verifique que as interseções das retas $5x - y - 6 = 0$, $x + 5y = 22$, $5x - y = 32$ e $x + 5y + 4 = 0$ são os vértices de um quadrado.

5. Uma reta que passa pela interseção das retas $7x - 2y = 0$ e $4x - y = 1$ é perpendicular à reta $3x + 8y = 19$. Determine sua equação.

6. Determine a equação da reta:

(a) paralela à reta $2x + 5y = 1$ que passa pelo ponto $(1, 2)$.

(b) perpendicular à reta $y = 3x + 1$ que passa pelo ponto $(-3, 1)$.

(c) perpendicular à reta $x = 3$ que passa pelo ponto $(2, 0)$.

7. Sabendo-se que o círculo C tem seu centro no ponto $A = (1, 3)$ e passa pelo ponto $P = (1, -1)$, dê a equação da reta r tangente a C que passa pelo ponto P, isto é, a reta r que passa por P e é perpendicular ao segmento AP. Determine, também, a outra reta tangente a C paralela a r.

8. Seja C o círculo de centro no ponto $A = (0, 3)$ e raio 1.

(a) Determine as retas tangentes ao círculo C que passam pela origem. Isto é, se r é uma reta que passa pela origem e é tangente a C no ponto $Q \in C$, então r é perpendicular ao segmento AQ. Este tipo de situações será mais explorada no capítulo seguinte.

(b) Por simetria, determine as retas tangentes ao círculo C que passam pelo ponto $(0, 6)$.

9. Verifique que os pontos $P = (2, 5)$, $Q = (8, -1)$ e $R = (-2, 1)$ são vértices de um triângulo retângulo.

10. Sejam r uma reta no plano e P um ponto que não pertence a r. Seja $Q \in r$ o ponto onde a reta $r^\perp$ perpendicular a r que passa por P intersecta r. O *simétrico* ou *refletido* do ponto P em relação a uma reta r é o ponto $P' \in r^\perp$ tal que $d(P, Q) = d(P', Q)$. Determine:

(a) o simétrico do ponto $P = (a, b)$ em relação à reta $r : y = 2x + 1$.

(b) a reta $\tilde{s}$ simétrica da reta $s : y = 4x - 3$ em relação à reta $r : y = 2x + 1$.

5.1. Respostas

1. (a) As retas são $r_{AB}: y = \frac{3}{4}x - \frac{5}{4}$, $r_{AC}: y = 3x + 1$, $r_BC: y = -\frac{3}{2}x + \frac{11}{2}$. (b) $C' = (1, -1/2)$, $B' = (0, 1)$ e $A' = (2, 5/2)$ são os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente. As retas são: $r_{A'B'}: y = \frac{3}{4}x + 1$; $r_{A'C'}: 3x - \frac{7}{2}$; $r_{B'C'}: y = -\frac{3}{2}x + 1$, paralelas, respectivamente, às retas r_{AB}, r_{AC} e r_{BC} pois tem as inclinações correspondentes iguais. (c) Desenvolva a indicação.

2. $y = -3x + 14$.

3. $y = 2x - 2$.

4. Quadrado de lado $\sqrt{26}$ e vértices $(2, 4)$, $(7, 3)$, $(1, -1)$ e $(6, 2)$.

5. $8x - 3y = -5$.

6. (a) $2x + 5y = 12$. (b) $x + 3y = 0$. (c) $y = 0$.

7. $r: y = -1$, a outra reta é $y = 7$.

8. (a) As retas r_1 e r_2 procuradas passam pela origem e pelos pontos $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{8}{3}\right)$ e $\left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{8}{3}\right)$, respectivamente. Logo, $r_1: y = 2\sqrt{2}x$ e $r_2: y = -2\sqrt{2}x$. (b) Por simetria, as retas r_3 e r_4 que passam pelo ponto $(0, 6)$ e são tangentes ao círculo C passam pelos pontos $\left(\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{10}{3}\right)$ e $\left(\frac{-2\sqrt{2}}{3}, \frac{10}{3}\right)$, respectivamente. Logo, $r_3: y = -2\sqrt{2}x + 6$ e $r_4: y = 2\sqrt{2}x + 6$.

9. O triângulo $\triangle PQR$ é retângulo no vértice P, a inclinação do lado PQ é -1 a do lado PR é 1.

10. (a) $\left(\frac{4b-3a-4}{5}, \frac{3b+4a+2}{5}\right)$. (b) $\tilde{s}: 13x - 16y = 33$.

Capítulo 3

Retas e círculos

Vamos caracterizar de forma algébrica a posição relativa de duas retas no plano e de uma reta e de um círculo no plano. Iremos também calcular a distância de um ponto a uma reta.

1. Posição relativa de duas retas no plano

Sabemos que duas retas r e r' no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra):

(a) coincidentes: $r = r'$;

(b) paralelas: $r \cap r' = \varnothing$;

(c) concorrentes: $r \cap r' = \{P\}$.

Ainda no terceiro caso, as retas podem ou não ser perpendiculares.

A partir das equações cartesianas de r e r', determinaremos quando ocorre cada uma dessas situações.

Teorema 1

Sejam r e r' retas no plano dadas por:

$$r : ax + by = c \qquad e \qquad r' : a'x + b'y = c' .$$

Então r e r' são paralelas ou coincidentes se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que

$$\lambda a = a' \qquad e \qquad \lambda b = b' .$$

Prova.

Parte 1. Suponhamos primeiramente que r e r' são paralelas ou coincidentes e verifiquemos a existência do número $\lambda \neq 0$ que satisfaz as condições do enunciado.

Temos duas situações a considerar:

(i) r e r' são ambas verticais ou horizontais;

(ii) r e r' não são verticais nem horizontais, intersectando, assim, ambos os eixos coordenados.

Na situação **(i)**, quando as retas são verticais ($b = b' = 0$), basta tomar $\lambda = \dfrac{a'}{a}$, e quando as retas são horizontais ($a = a' = 0$), basta tomar $\lambda = \dfrac{b'}{b}$.

Na situação **(ii)**, os números a, a', b e b' são todos diferentes de zero e as retas se escrevem:

$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}, \qquad \text{e} \qquad r' : y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'}.$$

Como as retas são paralelas (ou coincidentes), elas têm a mesma inclinação: $-\dfrac{a}{b} = -\dfrac{a'}{b'}$. Logo $\dfrac{a'}{a} = \dfrac{b'}{b}$, que é o número λ procurado (verifique!).

Parte 2. Suponhamos agora que $\lambda a = a'$ e $\lambda b = b'$, onde $\lambda \neq 0$, e verifiquemos que as retas devem ser paralelas ou coincidentes.

Como $\lambda \neq 0$, das condições acima, temos $b = 0 \iff b' = 0$. Ou seja, r é vertical ($b = 0$) se, e somente se, r' é vertical ($b' = 0$), e, portanto, r e r' são paralelas ou coincidentes.

Suponhamos, agora, que $b \neq 0$ e $b' \neq 0$.

Sendo assim, a equação de r' é:

$$r' : (\lambda a)\,x + (\lambda b)\,y = c',$$

ou seja,

$$r' : y = -\frac{\lambda a}{\lambda b}x + \frac{c'}{\lambda b} = -\frac{a}{b}x + \frac{c'}{\lambda b},$$

enquanto a equação de r pode ser escrita na forma:

$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}.$$

Como r e r' têm inclinação $-\dfrac{a}{b}$, essas retas são paralelas ou coincidentes. ■

Corolário 1

As retas $r : ax + by = c$ e $r' : a'x + b'y = c'$ são **coincidentes** *se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que*

$$\lambda a = a' \,, \quad \lambda b = b' \qquad \text{e} \qquad \lambda c = c' \,.$$

Prova.

Pelo Teorema anterior, se as retas são coincidentes, então existe $\lambda \neq 0$ tal que $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$.

Seja (x_0, y_0) um ponto da reta r. Como $r = r'$, as coordenadas $x = x_0$ e $y = y_0$ satisfazem também a equação de r'. Logo,

$$c' = a'x_0 + b'y_0 = \lambda a x_0 + \lambda b y_0 = \lambda c \,,$$

isto é $c' = \lambda c$.

Reciprocamente, se existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $\lambda a = a'$, $\lambda b = b'$ e $\lambda c = c'$, então é claro que as equações de r e r' representam a mesma reta, isto é, $r = r'$. ■

Corolário 2

As retas $r : ax + by = c$ e $r' : a'x + b'y = c'$ são paralelas se, e somente se, existe $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que

$$\lambda a = a' \,, \quad \lambda b = b' \qquad \text{e} \qquad \lambda c \neq c' \,.$$

Prova.

Se as retas r e r' são paralelas, pelo Teorema anterior, existe $\lambda \neq 0$, tal que, $a' = \lambda a$ e $b' = \lambda b$. Como $r \cap r' = \varnothing$, temos que, se $(x_0, y_0) \in r$, então $(x_0, y_0) \notin r'$. Isto é,

$$c' \neq a'x_0 + b'y_0 = \lambda a x_0 + \lambda b y_0 = \lambda c \,,$$

ou seja, $c' \neq \lambda c$.

A recíproca é evidente (justifique!). ■

Exemplo 1

Verifique se as retas

$$r_1 : 2x + y = 1, \quad r_2 : 6x + 3y = 2 \quad \text{e} \quad r_3 : 4x + 2y = 2 \,,$$

são paralelas ou coincidentes.

Solução.
Multiplicando a equação de r_1 por 3, obtemos $r_1 : 6x + 3y = 3$ e, como $3 \neq 2$, temos $r_1 \parallel r_2$.
Multiplicando a equação de r_1 por 2, obtemos a equação de r_3. Logo $r_1 = r_3$.
Além disso, $r_2 \parallel r_3$. □

Vejamos agora como caracterizar a perpendicularidade entre duas retas dadas na forma cartesiana.

Teorema 2
As retas $r : ax + by = c$ *e* $r' : a'x + b'y = c'$ *são* **perpendiculares** *se, e somente se,*
$$aa' + bb' = 0.$$

Prova.
(a) Provemos primeiro que **se** r é perpendicular a r' **então** $aa' + bb' = 0$.
Se r é vertical ($b = 0$), então r' é horizontal ($a' = 0$) e $aa' + bb' = 0$.
Analogamente, se r é horizontal ($a = 0$), então r' é vertical ($b' = 0$) e $aa' + bb' = 0$.
Suponhamos, agora, que r e r' são retas perpendiculares que cortam ambos os eixos coordenados (isto é, não ocorrem as duas possibilidades anteriores).
Então os números a, a', b e b' são todos diferentes de zero, e as retas se expressam na forma,
$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \qquad \text{e} \qquad r' : y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{a'}\,.$$
Como r e r' são perpendiculares, temos
$$-\frac{a}{b} = -\frac{1}{-\frac{a'}{b'}}\,.$$
Ou seja, $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{b'}{a'}$ e, portanto, $aa' + bb' = 0$.
Com isso provamos que: $r \perp r' \Longrightarrow aa' + bb' = 0$.
(b) Reciprocamente, suponhamos que $aa' + bb' = 0$ e provemos que r e r' são perpendiculares.

Se $a = 0$, ou seja, r é horizontal, então $bb' = 0$. Como a e b não podem ser simultaneamente iguais a zero, devemos ter $b \neq 0$ e, portanto $b' = 0$, isto é, r' é vertical. Logo $r \perp r'$.
Analogamente, se $b = 0$, isto é, r é vertical, podemos verificar que, necessariamente, $a' = 0$, ou seja, r' é horizontal. Portanto $r \perp r'$.
Suponhamos, agora, que $a \neq 0$ e $b \neq 0$. Então $a' \neq 0$, $b' \neq 0$ e as equações reduzidas de r e r' são, respectivamente,

$$r : y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \qquad \text{e} \qquad r' : y = -\frac{a'}{b'}x + \frac{c'}{b'}.$$

Como $aa' + bb' = 0$, temos:

$$aa' = -bb' \iff \frac{a}{b} = -\frac{b'}{a'} \iff -\frac{a}{b} = -\frac{1}{-\frac{a'}{b'}},$$

mostrando assim que as retas r e r' são perpendiculares. Isto termina a prova do Teorema. ■

Exemplo 2

Determine a equação da reta s que passa pelo ponto $(1, 2)$ e é perpendicular à reta $r : x + 3y = 1$.

Solução.
Seja $s : ax + by = c$ uma reta perpendicular a r. Pelo Teorema anterior, $a + 3b = 0$.
Fixando $b = -1$, obtemos $a = -3b = -3(-1) = 3$.
Portanto, a equação de s deve ser da forma $s : 3x - y = c$.
Se a reta s passa pelo ponto $(1, 2)$, então as coordenadas $x = 1$ e $y = 2$ devem satisfazer a equação de s, isto é, $3 \cdot 1 - 2 = c$. Logo $c = 1$ e a equação procurada da reta s é $3x - y = 1$. □

2. Posição relativa de uma reta e um círculo

Em Geometria Plana, aprendemos que um círculo C e uma reta r no plano podem estar em três posições relativas (uma em relação à outra):

(a) $r \cap \mathcal{C}$ consiste de dois pontos: a reta r é dita **secante** ao círculo $\mathcal{C}$.

(b) $r \cap \mathcal{C}$ consiste de exatamente um ponto: a reta r é dita **tangente** ao círculo $\mathcal{C}$. Neste caso, o ponto de interseção é chamado **ponto de tangência** de r com $\mathcal{C}$.

(c) $r \cap \mathcal{C} = \varnothing$: a reta r é dita **exterior** ao círculo $\mathcal{C}$.

No seguinte Teorema estabelecemos uma propriedade importante da tangência a um círculo.

Teorema 3

Se *a reta r é tangente no ponto P (ponto de tangência) ao círculo $\mathcal{C}$ de centro A e raio $\alpha > 0$,* **então** *a reta que passa por A e P é perpendicular à reta r.*

Prova.

Seja OXY o sistema de eixos ortogonais que tem origem no ponto A e eixo$-OX$ positivo contendo o ponto P. A escolha desse sistema de eixos ortogonais visa facilitar a demonstração do Teorema.

Neste sistema de coordenadas, $A = (0,0)$ e $P = (\alpha, 0)$.

Para demonstrar o Teorema, basta mostrar que a equação da reta r no sistema de coordenadas escolhido é

$$r : x = \alpha.$$

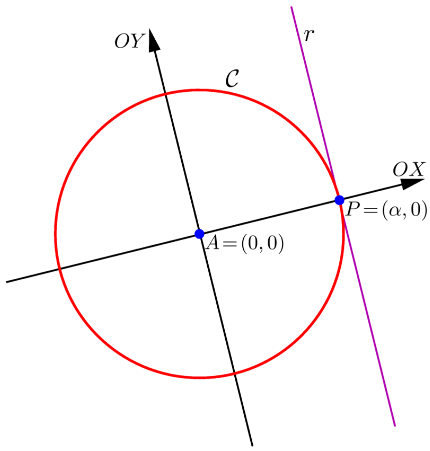


Fig. 1: Escolha do sistema de coordenadas.

Suponhamos, *raciocinando por absurdo*, que r não é vertical. Isto é, $r : y = ax + b$. Como $P = (\alpha, 0) \in r$, devemos ter $0 = a\,\alpha + b$.

Logo $b = -a\,\alpha$, e a equação de r é

$$r : y = ax - a\alpha\,, \qquad \text{ou seja,} \qquad r : y = a(x - \alpha)\,.$$

Consideremos o sistema:

$$\begin{cases} y = a(x-\alpha) \\ x^2 + y^2 = \alpha^2\,, \end{cases} \tag{1}$$

onde $x^2 + y^2 = \alpha^2$ é a equação do círculo C no sistema de coordenadas escolhido.
Um ponto é comum à reta r e ao círculo C se, e somente se, suas coordenadas satisfazem as duas equações do sistema (1).
Substituindo y da primeira equação na segunda, obtemos:

$$\begin{aligned} x^2 + a^2(x-\alpha)^2 = \alpha^2 &\iff x^2 - \alpha^2 + a^2(x-\alpha)^2 = 0 \\ &\iff (x-\alpha)(x+\alpha) + a^2(x-\alpha)^2 = 0 \\ &\iff (x-\alpha)\left[x + \alpha + a^2(x-\alpha)\right] = 0\,. \end{aligned}$$

Então

$$x = \alpha \qquad \text{ou} \qquad x + \alpha + a^2(x-\alpha) = 0\,,$$

isto é,

$$x = \alpha \qquad \text{ou} \qquad x = \frac{\alpha(a^2-1)}{1+a^2}\,.$$

Logo, o sistema (1) tem duas soluções: $P = (\alpha, 0)$ correspondente a $x = \alpha$; e $P' = \left(\dfrac{\alpha(a^2-1)}{1+a^2}, -\dfrac{2a\alpha}{1+a^2}\right)$ correspondente a $x = \dfrac{\alpha(a^2-1)}{1+a^2}$.
Mas isso é absurdo, pois a reta r e o círculo C são tangentes e $P' \neq P$.
Assim, a hipótese de que r é uma reta não-vertical é falsa. Isto conclue a prova do Teorema. ■

Exemplo 3

Sabendo-se que o círculo C está centrado em $Q = (1,3)$ e que o ponto $P = (1,-1) \in C$, dê a equação da reta r tangente a C que passa por P.

Encontre, também, a outra reta tangente a C e paralela a r.

Solução.

A equação do círculo C é

$$C : (x-1)^2 + (y-3)^2 = \alpha^2\,,$$

onde $\alpha > 0$ é o raio.
Como $P = (1, -1) \in C$, temos

$$(1-1)^2 + (-1-3)^2 = \alpha^2 , \quad \text{ou seja} \quad \alpha^2 = (-4)^2 = 16.$$

Portanto, C tem raio $\alpha = 4$ e sua equação é

$$C : (x-1)^2 + (y-3)^2 = 16 .$$

Pelo Teorema anterior, a reta r que é tangente a C no ponto P é perpendicular à reta s que contém os pontos Q e P.

A reta s é vertical, pois os pontos Q e P têm abscissas iguais, e sua equação é $s : x = 1$.
Consequentemente, a reta r deve ser horizontal.
Como $P = (1, -1) \in r$, todos os pontos de r devem ter ordenada igual a -1. Isto é, $r : y = -1$ é a equação procurada da reta r.
Seja r' a outra reta tangente a C paralela à reta r.

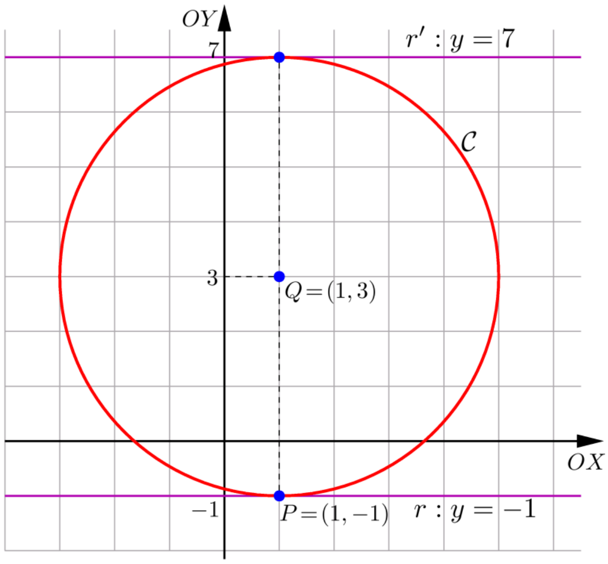


Fig. 2: Círculo C e tangentes horizontais.

Como $r' : y = a$, para algum $a \in \mathbb{R}$, e $r \cap C$ consiste de apenas um ponto, a equação

$$(x-1)^2 + (a-3)^2 = 16 ,$$

deve ter apenas uma solução para x. Mas isso ocorre somente quando $16 - (a-3)^2 = 0$, isto é, $a - 3 = \pm 4$, ou seja, $a = 3 + 4 = 7$ ou $a = 3 - 4 = -1$. A segunda possibilidade coresponde à reta $r : y = -1$ e a primeira à reta $r' : y = 7$ procurada. $\square$

3. Distância de um ponto a uma reta

Dados um ponto P e uma reta r no plano, já sabemos calcular a distância de P a cada ponto $P' \in r$.

Definição 1

Definimos a **distância**, $d(P,r)$, **do ponto** P **à reta** r por

$$\boxed{d(P,r) = \min\{d(P,P') \mid P' \in r\}}$$

Dizemos que um ponto $P^\star \in r$ **realiza a distância** de P à reta r, se

$$d(P,P^\star) \leq d(P,P'), \quad \text{para todo } P' \in r.$$

Usando o *Teorema de Pitágoras* vemos que o ponto $P^\star$ que realiza a distância do ponto P à reta r é o *pé da perpendicular a r que passa pelo ponto P*.

Assim,

$$\begin{aligned} d(P,r) &= \min\{d(P,P') \mid P' \in r\} \\ &= d(P,P^\star). \end{aligned}$$

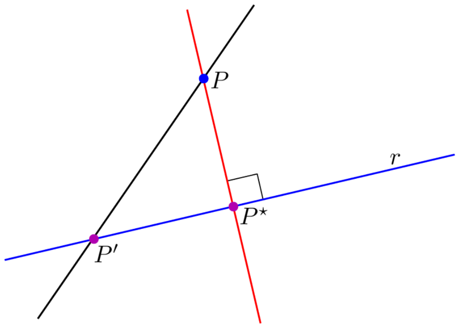


Fig. 3: $P^\star$ realiza a distância de P à reta r.

Há outra maneira de ver a distância de um ponto P a uma reta r:

- Se $P \in r$, a distância de P a r é igual a zero.
- Se $P \notin r$, consideremos os círculos C_α de centro P e raio $\alpha > 0$.

Se α é pequeno então $C_\alpha \cap r = \varnothing$, e se α é grande então $C_\alpha \cap r$ consiste de exatamente dois pontos.

Portanto, existe um único valor $\alpha^\star > 0$ tal que $C_{\alpha^\star}$ é tangente a reta r num ponto $P^\star$. Isto é, $C_{\alpha^\star} \cap r = \{P^\star\}$.

Pelo Teorema 3, a reta que passa por P e $P^\star$ é perpendicular a r. Logo $\alpha^\star$ é a distância de P a r, ou seja:

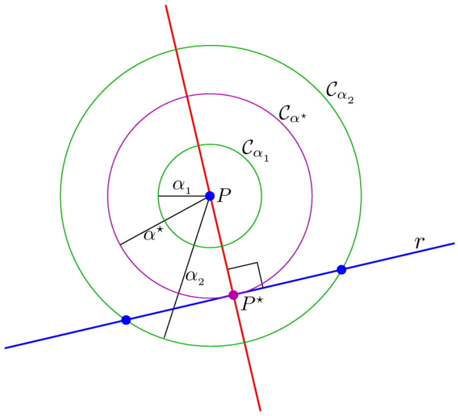


Fig. 4: $\alpha_1 < \alpha^\star = d(P,r) < \alpha_2$.

$$\boxed{\alpha^\star = d(P,r)}$$

No seguinte Teorema, estabelecemos uma *fórmula para o cálculo da distância de um ponto P a uma reta r no plano*.

Teorema 4

Sejam $r : ax + by = c$ uma reta e $P = (x_0, y_0)$ um ponto no plano. Então *a distância de P a r é dada por*

$$\boxed{d(P,r) = \frac{|\,ax_0 + by_0 - c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

Prova.
Se $P \in r$, então as coordenadas de P satisfazem a equação de r, ou seja, $ax_0 + by_0 = c$, e, portanto,

$$\frac{|\,ax_0 + by_0 - c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{0}{\sqrt{a^2+b^2}} = 0 = d(P,r),$$

e o Teorema está provado neste caso.
Suponhamos agora que $P \notin r$, e consideremos, para todo $\alpha > 0$, o sistema de equações

$$\begin{cases} ax + by = c\,, \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = \alpha^2\,, \quad \alpha > 0, \end{cases} \tag{2}$$

onde a primeira equação é da reta r e a segunda equação é do círculo $\mathcal{C}_\alpha$ de centro no ponto P e raio $\alpha > 0$.
Vamos determinar α para o qual a solução do sistema é única. Isto é, para o qual o círculo $\mathcal{C}_\alpha$ de raio α é tangente à reta r.
• Se $b \neq 0$, então a primeira equação de (2) nos dá

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}\,.$$

Em particular, a reta r não é vertical. Substituindo essa expressão de y na segunda equação do sistema (2), obtemos:

$$\begin{aligned}
(x-x_0)^2 + \left(-\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} - y_0\right)^2 &= \alpha^2 \\
\iff (x-x_0)^2 + \left(-\frac{1}{b}\left[a\,x - c + y_0 b\right]\right)^2 &= \alpha^2 \\
\iff (x-x_0)^2 + \left(-\frac{1}{b}\right)^2 \left[a\,x - c + y_0 b\right]^2 &= \alpha^2 \\
\iff (x-x_0)^2 + \frac{1}{b^2}\left(a\,x - c + y_0 b\right)^2 &= \alpha^2 \\
\iff b^2(x-x_0)^2 + \left(a\,x - c + y_0 b\right)^2 &= \alpha^2 b^2 \\
\iff b^2(x-x_0)^2 + \left(a\,x - ax_0 + ax_0 + by_0 - c\right)^2 &= \alpha^2 b^2 \\
\iff b^2(x-x_0)^2 + \left(a\,(x-x_0) + [ax_0 + by_0 - c]\right)^2 &= \alpha^2 b^2
\end{aligned}$$

Fazendo $x' = x - x_0$ e $Q_0 = ax_0 + by_0 - c$, temos:

$$\begin{aligned} b^2(x')^2 + (a\,(x') + Q_0)^2 &= \alpha^2 b^2 \\ \iff b^2(x')^2 + a^2\,(x')^2 + 2ax'Q_0 + Q_0^2 &= \alpha^2 b^2 \\ \iff (a^2+b^2)\,(x')^2 + 2aQ_0x' + \left(Q_0^2 - \alpha^2 b^2\right) &= 0\,. \end{aligned}$$

Esta última equação (de grau dois) terá uma única solução para x' (e, portanto, uma única solução para x) se, e somente se, o seu discriminante é igual a zero:

$$\Delta = (2aQ_0)^2 - 4\,(a^2+b^2)\left(Q_0^2 - \alpha^2 b^2\right) = 0.$$

Ou seja

$$\begin{aligned} 4a^2Q_0^2 - 4a^2Q_0^2 + 4a^2b^2\alpha^2 - 4b^2Q_0^2 + 4\alpha^2 b^4 &= 0 \\ 4a^2b^2\alpha^2 - 4b^2Q_0^2 + 4\alpha^2 b^4 &= 0 \\ 4b^2\left(a^2\alpha^2 - Q_0^2 + \alpha^2 b^2\right) &= 0 \\ a^2\alpha^2 - Q_0^2 + \alpha^2 b^2 &= 0, \quad \text{pois } b \neq 0 \\ \alpha^2\,(a^2+b^2) - Q_0^2 &= 0 \\ \alpha^2\,(a^2+b^2) &= Q_0^2 \\ \alpha^2 &= \frac{Q_0^2}{a^2+b^2}, \end{aligned}$$

Lembrando que $Q_0 = ax_0 + by_0 - c$ e extraindo a raiz quadrada, obtemos:

$$\alpha = \frac{|\,ax_0 + by_0 - c\,|}{\sqrt{a^2+b^2}}\,,$$

Na situação em que a reta r é vertical ($b = 0$), $r : x = c$, temos $Q_0 = x_0 - c$, e o sistema (2) fica

$$\begin{cases} x = c\,, \\ (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \alpha^2\,. \end{cases} \tag{3}$$

Substituindo a primeira equação na segunda, obtemos

$$(c - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \alpha^2\,.$$

Essa equação terá uma única solução para y se, e somente se,

$$\alpha^2 = (c - x_0)^2\,.$$

Logo,

$$\alpha = |x_0 - c| = |Q_0| = \frac{|1x_0 + 0y_0 - c|}{\sqrt{1^2 + 0^2}}\,,$$

concluindo a demonstração do Teorema. ■

Observação 1

Na demonstração do Teorema anterior observamos que o sistema (2):

- não tem solução se $\Delta < 0$, ou seja, $\alpha < \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$;
- tem duas soluções se $\Delta > 0$, ou seja, $\alpha > \dfrac{|ax_0 + by_0 - c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$, .

Fica provado, portanto, o seguinte Teorema:

Teorema 5

Sejam r uma reta e C um círculo de centro A e raio $\alpha > 0$. Então,

(a) $C \cap r = \varnothing \iff d(A,r) > \alpha$.

(a) $C \cap r$ *consiste de um único ponto* $\iff d(A,r) = \alpha$.

(a) $C \cap r$ *consiste de exatamente dois pontos* $\iff d(A,r) < \alpha$.

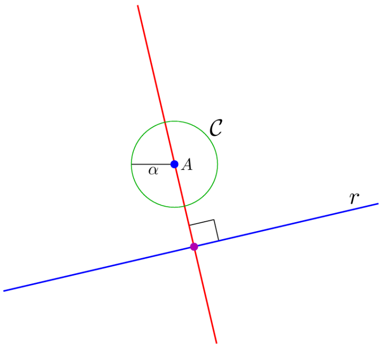


Fig. 5: $d(A,r) > \alpha$.

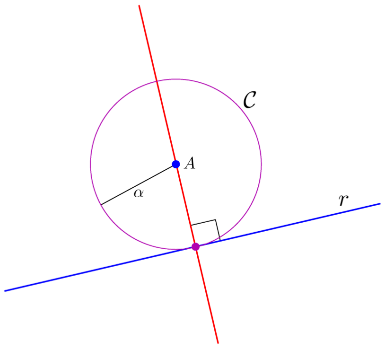


Fig. 6: $d(A,r) = \alpha$.

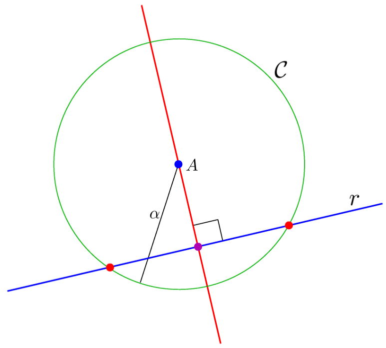


Fig. 7: $d(A,r) < \alpha$.

Exemplo 4

Calcule a distância do ponto $P = (1,-1)$ à reta $r : x + 2y = 1$.

Solução.

Vamos resolver o problema de três maneiras:

(1) Usando a fórmula obtida no Teorema 4: sendo $x_0 = 1$, $y_0 = -1$, $a = 1$, $b = 2$ e $c = 1$, temos

$$d(P,r) = \frac{|1 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) - 1|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{|1-2-1|}{\sqrt{1+4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}.$$

(2) Determinando $\alpha \geq 0$ de modo que o sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ (x-1)^2 + (y+1)^2 = \alpha^2\,, \end{cases}$$

tenha uma única solução.

Substituindo $x = 1 - 2y$ na segunda equação, obtemos:

$$(1 - 2y - 1)^2 + (y+1)^2 = \alpha^2\,.$$

Então $4y^2 + y^2 + 2y + 1 = \alpha^2$, isto é,

$$5y^2 + 2y + (1 - \alpha^2) = 0.$$

Essa equação possui uma única solução se, e somente se, o seu discriminante é igual a zero:

$$\begin{aligned} \Delta = 2^2 - 4 \cdot 5 \cdot (1-\alpha^2) &= 0 \\ 4 - 20(1-\alpha^2) &= 0 \\ 1 - 5(1-\alpha^2) &= 0 \\ 1 - 5 + 5\alpha^2 &= 0 \\ \alpha^2 &= \frac{4}{5} \quad \Longrightarrow \quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(P, r) = \alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

(3) Seja r' a reta que passa pelo ponto $P = (1, -1)$ e é perpendicular à reta $r : x + 2y = 1$.

Como r tem inclinação $m = \dfrac{-1}{2}$, a reta r' tem inclinação

$$n = -\frac{1}{m} = -\frac{1}{-1/2} = 2\,.$$

Logo a equação de r' deve ser $r' : y = 2x + d$.

Sendo $P = (1, -1) \in r'$, temos $-1 = 2 \cdot 1 + d \Longrightarrow d = -1 - 2 = -3$.

Assim, $r' : y = 2x - 3$. Note, também, que a equação de r se escreve: $r : y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$.

Seja $r \cap r' = \{P^\star\}$.

Se $P^\star = (x, y)$, então $2x - 3 = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{1}{2}$, ou seja, $\left(2 + \dfrac{1}{2}\right)x = \dfrac{1}{2} + 3$.

Portanto, $\quad x = \dfrac{2}{5} \cdot \dfrac{7}{2} = \dfrac{7}{5} \quad$ e $\quad y = 2 \cdot \dfrac{7}{5} - 3 = -\dfrac{1}{5}\,.$

Logo $P^\star = \left(\dfrac{7}{5}, -\dfrac{1}{5}\right)$ e

$$\begin{aligned} d(P,r) &= d(P,P^\star) = \sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}+1\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{2}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{4+16}{5^2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \end{aligned}$$

concluindo, assim, o cálculo desejado. □

4. Exercícios de revisão

1. A distância da reta $4x - 3y + 1 = 0$ ao ponto P é igual a 4. Se a ordenada de P é 3 determine a abscissa de P.

2. Determine as equações das retas que passam pelo ponto $(2, -1)$ e formam, cada uma, um ângulo de 45° com a reta $2x - 3y + 7 = 0$.

3. Determine, quando possível, o número $\lambda \in \mathbb{R}$ para que $d(Q, r) = 3$, onde

(a) $r : x - y = 3$ e $Q = (\lambda, \lambda)$, $\lambda \geq 0$.

(b) $r : \lambda x = y$ e $Q = (2, \sqrt{3})$.

4. Determine a equação do lugar geométrico descrito por um ponto que se movimenta no plano de maneira que sua distância à reta $4x - 3y + 12 = 0$ é sempre igual a duas vezes sua distância ao eixo OX.

5. A reta $x + y + 12 = 0$ é tangente a um círculo C de centro $(-2, -4)$. Calcule a área do disco delimitado por C.

6. Calcule o perímetro do triângulo determinado pelas retas $y = 2x + 1$, $2y = x - 1$ e $y + x = 1$. Determine sua altura em relação à reta $y + x = 1$ e calcule sua área.

7. Determine (se for possível) $\lambda \in \mathbb{R}$, de modo que as retas $x + 2y = 1$, $3x - y = 2$ e $x + y = \lambda$ se intersectem duas a duas, em três pontos que sejam os vértices de um triângulo de área 4.

8. Considere o sistema não-linear:

$$\begin{cases} y - 2x + 2 = 0 \\ (x-3)^2 + (y+1)^2 = r \end{cases},$$

onde $r \in \mathbb{R}$. Faça uma análise do número de soluções desse sistema em função do parâmetro r.

9. Sejam $\mathcal{C}$ e $\mathcal{D}$ círculos centrados em P e Q com raios a e b, respectivamente, e seja $c = d(P, Q)$. Mostre que:

(a) $\mathcal{C} \cap \mathcal{D} = \varnothing$ se, e só se, $c > a + b$ ou $b > a + c$ ou $a > b + c$.

(b) $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ consiste de um ponto se, e só se, $a + b = c$ ou $a + c = b$ ou $b + c = a$.

(c) $\mathcal{C} \cap \mathcal{D}$ consiste de dois pontos se, e só se, $c < a + b$, $b < a + c$ e $a < b + c$.

10. Um ponto se movimenta de maneira que sua distância ao ponto $(1, -1)$ é sempre igual ao dobro de sua distância à reta $3x - 2y + 6 = 0$. Determine a equação do lugar geométrico descrito pelo ponto. Ou seja, determine a equação que devem satisfazer as coordenadas do ponto em questão.

4.1. Respostas

1. $x = 7$ ou $x = -3$.

2. $y = 5x - 11$ e $y = -\frac{1}{5}x - \frac{3}{5}$.

3. (a) Não existe λ. (b) Não existe λ.

4. É o conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $16x^2 - 24xy - 91y^2 + 96x - 72y + 144 = 0$.

5. $18\pi^2$.

6. Perímetro= $\sqrt{2} + 2\sqrt{5}$; altura= $\frac{3\sqrt{2}}{2}$; área= $\frac{3}{2}$.

7. $\lambda = \frac{6+4\sqrt{14}}{7}$ ou $\lambda = \frac{6-4\sqrt{14}}{7}$.

8. O sistema tem uma única solução se $r = 5$, duas soluções se $r > 5$ e não tem solução se $r < 5$.

9. Escolha um sistema de eixos ortogonais OXY tal que $P = (0,0)$, $Q = (c,0)$, isto é $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = a^2$ e $\mathcal{D} : (x-c)^2 + y^2 = b^2$.

10. Trata-se do conjunto dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $23x^2 - 48xy + 3y^2 + 170x - 112y + 118 = 0$, isto é, $9\left(3x - 2y + \frac{29}{3}\right)^2 - 3(2x+3y+1)^2 = 22^2$. No final do texto veremos que se escolhermos um sistema de eixos ortogonais $O'X'Y'$ de modo que $O'Y'$ é a reta $r : 3x - 2y + \frac{29}{3} = 0$, $O'X'$ é a reta $2x + 3y + 1 = 0$ orientada de tal modo que o ponto $P = (1,-1)$ tem abscissa $x' = d\,((1,-1), r) = \frac{44}{3\sqrt{13}} > 0$, isto é $P = \left(\frac{44}{3\sqrt{13}}, 0\right)$ nas coordenadas x', y'. O conjunto acima é igual ao conjunto dos pontos $(x', y') \in \mathbb{R}^2$ tais que $\frac{(x')^2}{\left(\frac{22}{3\sqrt{13}}\right)^2} - \frac{(y')^2}{3\left(\frac{22}{3\sqrt{13}}\right)^2} = 1$, que é a equação de uma hipérbole no plano.

Capítulo 4

Distância entre duas retas. Regiões no plano

Veremos primeiro como calcular a distância entre duas retas paralelas no plano. Para isso, lembramos que, no Capítulo anterior, calculamos a distância de um ponto P de coordenadas (x_0, y_0) a uma reta $r : ax + by = c$ e obtivemos a seguinte fórmula:

$$d(P, r) = \frac{|\, ax_0 + by_0 - c\,|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Para entender melhor a argumentação feita no Capítulo anterior, iniciaremos apresentando outros exemplos.

Exemplo 1

Faça uma análise do número de soluções do sistema não linear

$$\begin{cases} y = 2x + 1\,, \\ (x-2)^2 + (y-1)^2 = r\,, \end{cases} \qquad \text{onde } r \in \mathbb{R}.$$

em função do *parâmetro* r.

Solução.

Sejam a reta de equação $s : y = 2x + 1$ e o ponto $C = (2, 1)$.

Como $(x-2)^2 + (y-1)^2 \geq 0$, a equação $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r$ não terá solução quando $r < 0$.

Por outro lado, como C não pertence à reta s (porque?), podemos concluir que o sistema não tem solução, também, para $r = 0$.
Finalmente, no caso $r > 0$ a equação $(x-2)^2 + (y-1)^2 = r$ representa o círculo de centro no ponto $C = (2,1)$ e raio $\sqrt{r}$.
Pelo Teorema 5 do Capítulo anterior, basta calcular $d(C,s)$ para completar a análise do número de soluções do sistema.
Como a equação cartesiana de s é $2x - y = -1$, com $a = 2$, $b = -1$ e $c = -1$, temos:

$$d(C,s) = \frac{|2\cdot 2 - 1\cdot 1 + 1|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2}} = \frac{4}{\sqrt{5}}\,.$$

Concluímos que o sistema dado tem uma única solução quando $r = \dfrac{16}{5}$, tem duas soluções quando $r > \dfrac{16}{5}$ e não tem solução quando $r < \dfrac{16}{5}$. □

Exemplo 2

Determinar as retas que passam pelo ponto $(2,7)$ e são tangentes ao círculo C de centro $A = (3,0)$ e raio 3.

Solução.
Seja r uma reta tangente ao círculo $C : (x-3)^2 + y^2 = 9$ que passa pelo ponto $P = (2,7)$.
• Se r fosse vertical, $x = 2$ seria sua equação, pois a abscissa de P é 2. Como $r \cap C$ possui dois pontos, r não pode ser tangente a C. De fato, $(x,y) \in r \cap C$ se, e somente se, $x = 2$ e $(2-3)^2 + y^2 = 9$, isto é, $x = 2$ e $y = \pm\sqrt{8} = \pm 2\sqrt{2}$.
• Pelo visto acima, r não pode ser vertical, e, portanto, $r : y = ax + b$, isto é, $r : ax - y = -b$. Como $P = (2,7) \in r$, temos $7 = 2a + b$, isto é, $b = 7 - 2a$ e, portanto, $r : ax - y = 2a - 7$. Além disso, devemos ter $d(A,r) = 3$ para que r seja tangente a C, ou seja,

$$\frac{|a\cdot 3 + (-1)\cdot 0 - (2a-7)|}{\sqrt{a^2 + (-1)^2}} = 3\,.$$

Essa identidade é satisfeita se, e somente se:

$$|a+7| = 3\sqrt{a^2+1} \iff (a+7)^2 = 9(a^2+1)$$
$$\iff \quad a^2 + 14a + 49 = 9a^2 + 9 \iff 8a^2 - 14a - 40 = 0$$

$$\iff \quad 4a^2 - 7a - 20 = 0 \iff a = \frac{1}{8}\left(7 \pm \sqrt{49+320}\right) = \frac{1}{8}\left(7 \pm 3\sqrt{41}\right)$$

Logo,

$$r_1 : y = \frac{1}{8}\left(7 + 3\sqrt{41}\right)\, x + \left(7 - \frac{2}{8}\left(7 + 3\sqrt{41}\right)\right),$$

e

$$r_2 : y = \frac{1}{8}\left(7 - 3\sqrt{41}\right)\, x + \left(7 - \frac{2}{8}\left(7 - 3\sqrt{41}\right)\right),$$

ou seja,

$$r_1 : y = \left(\frac{7 + 3\sqrt{41}}{8}\right)\, x + \left(\frac{21 - 3\sqrt{41}}{4}\right),$$

e

$$r_2 : y = \left(\frac{7 - 3\sqrt{41}}{8}\right)\, x + \left(\frac{21 + 3\sqrt{41}}{4}\right),$$

são as retas tangentes ao círculo C que passam pelo ponto $P = (2,7)$. □

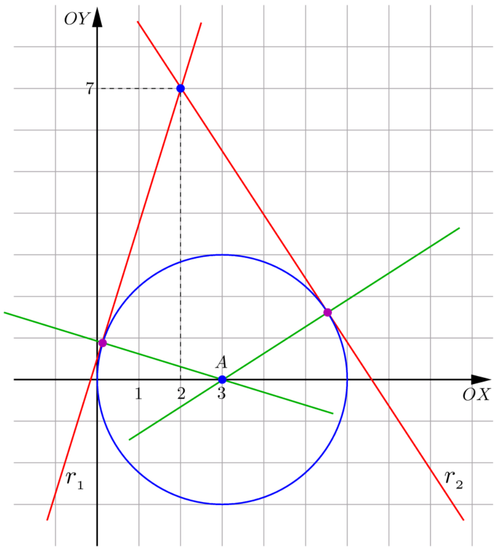


Fig. 1: Tangentes a C passando por $P = (2,7)$.

1. Distância entre duas retas no plano

Definimos a **distância** entre duas retas r e r' como sendo a menor distância entre um ponto de r e um ponto de r'. Isto é,

$$\boxed{d(r,r') = \min\{d(P,P') \mid P \in r \text{ e } P' \in r'\}}$$

Então $d(r,r') = 0$ se r e r' são coincidentes ou concorrentes.

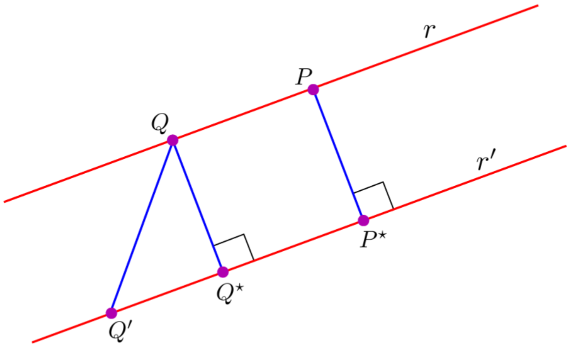


Fig. 2: Distância entre duas retas paralelas.

Sejam r e r' retas paralelas.

Sabemos que, dado $P \in r$, existe um único ponto $P^\star \in r'$, pé da perpendicular a r' traçada por P, tal que

$$d(P,P') \geq d(P,P^\star)\,, \quad \text{para todo } P' \in r'\,.$$

Como $r \parallel r'$, temos $d(Q,Q^\star) = d(P,P^\star)$, quaisquer que sejam $P,Q \in r$, já que $QPP^\star Q^\star$ é um retângulo.

Então $d(Q,Q') \geq d(Q,Q^\star) = d(P,P^\star) = d(P,r')$, quaisquer que sejam $Q \in r$ e $Q' \in r'$.

Logo,

$$d(r,r') = d(P,r')\,, \quad \text{qualquer que seja} \quad P \in r\,.$$

Como conseqüencia do Teorema 4, temos o seguinte corolário.

Corolário 1

Sejam $r : ax + by = c$ e $r' : ax + by = c'$ retas paralelas ($c \neq c'$) ou coincidentes ($c = c'$). Então,

$$\boxed{d(r,r') = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Prova.

Seja $P = (x_0, y_0)$ um ponto da reta r. Então

$$d(r,r') = d(P,r') = \frac{|ax_0 + by_0 - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}\,.$$

Como $ax_0 + by_0 = c$, obtemos $d(r,r') = \dfrac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. ■

Exemplo 3

Determine as equações das retas paralelas à reta $r : 2x + y = 1$ que distam 3 unidades de r.

Solução.

Seja $s : 2x + y = c$ uma reta paralela à reta r. Temos,

$$d(r,s) = 3 \iff \frac{|c-1|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 3 \iff |c-1| = 3\sqrt{5}\,.$$

Logo $c = 1 + 3\sqrt{5}$ ou $c = 1 - 3\sqrt{5}$, ou seja, as retas

$$s_1 : 2x + y = 1 + 3\sqrt{5} \quad \text{e} \quad s_2 : 2x + y = 1 - 3\sqrt{5}\,,$$

são as retas paralelas a r que distam 3 unidades da reta r.

Vejamos outra solução do mesmo problema sem usar a fórmula da distância entre duas retas paralelas.

Seja $t : y = \frac{1}{2}x$ a reta perpendicular à reta r que passa pela origem.

Logo $r \cap t = \{P\}$, onde $P = \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)$.

Sejam $(2y, y)$ os pontos pertencentes à reta t que distam 3 de r, ou seja,

$$d\left((2y,y), \left(\frac{2}{5}, \frac{1}{5}\right)\right) = 3\,.$$

Então,

$$4\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = 9\,.$$

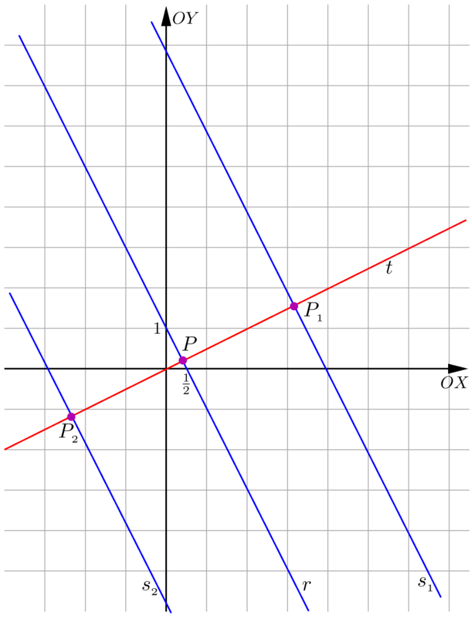


Fig. 3: Retas a distância 3 de r.

Portanto, $\left(y - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{9}{5}$, ou seja, $y = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}$.

Como $t : x = 2y$, os pontos ao longo de t que estão a distância 3 de P são:

$$P_1 = \left(\frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}, \frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}\right) \qquad \text{e} \qquad P_2 = \left(-\frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{2}{5}, -\frac{3}{\sqrt{5}} + \frac{1}{5}\right).$$

Consideremos agora as retas s_1 e s_2 paralelas à reta r que passam por P_1 e P_2, respectivamente.

Como $d(s_1, r) = d(P_1, P) = 3$ e $d(s_2, r) = d(P_2, P) = 3$, s_1 e s_2 são as retas paralelas a r que distam 3 unidades de r, e suas equações são:

$$s_1 : 2x + y = 2\left(\frac{6\sqrt{5}+2}{5}\right) + \frac{3\sqrt{5}+1}{5} = \frac{15\sqrt{5}+5}{5} = 3\sqrt{5}+1$$

e

$$s_1 : 2x + y = 2\left(\frac{-6\sqrt{5}+2}{5}\right) + \frac{-3\sqrt{5}+1}{5} = \frac{-15\sqrt{5}+5}{5} = -3\sqrt{5}+1. \quad \square$$

2. Esboço de regiões no plano

Consideremos a reta $r : ax+by = c$ e a reta s que passa pelos pontos $(0,0)$ e (a,b). Então $s : bx - ay = 0$, pois $(0,0)$ e (a,b) satisfazem a equação de s.

Afirmativa 1: As retas r e s são perpendiculares.

De fato, $a \cdot b + b \cdot (-a) = 0$. Logo, pelo Teorema 2 do Capítulo 3, temos $r \perp s$ (Fig. 4).

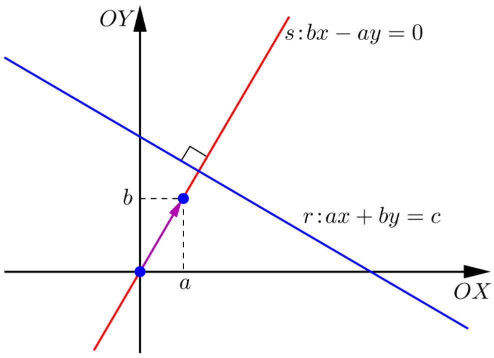


Fig. 4: Retas r e s perpendiculares.

Afirmativa 2: Por cada ponto (x_0, y_0) do plano passa uma única reta r' paralela à reta r (Fig. 5).

De fato, basta tomar $r' : ax + by = c$, onde $c = ax_0 + by_0$.

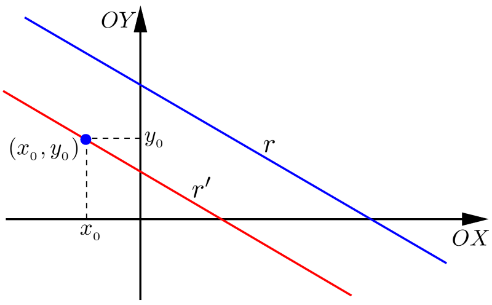


Fig. 5: Retas r e r' paralelas.

Afirmativa 3: O plano π é união de retas paralelas a uma reta dada:

$$\pi = \bigcup_{c\in\mathbb{R}} \{ (x,y) \mid ax+by=c \} .$$

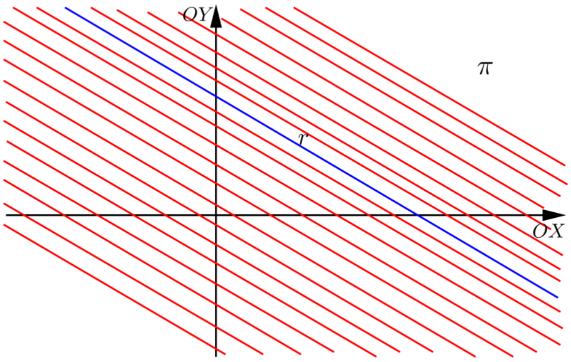


Fig. 6: Plano π visto como união de retas paralelas.

Afirmativa 4: Consideremos as retas paralelas $r_1 : ax+by=c_1$ e $r_2 : ax+by=c_2$, e os pontos P_1 e P_2, tais que

$$\{P_1\} = r_1 \cap s \text{ e } \{P_2\} = r_2 \cap s,$$

onde $s : bx - ay = 0$.

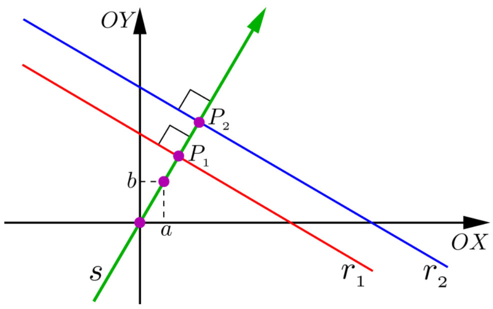


Fig. 7: Retas paralelas r_1 e r_2 com perpendicular s passando pela origem.

O sentido de percurso de P_1 para P_2 na reta s coincide com o sentido de percurso de $(0,0)$ para (a,b) em s **se, e só se,** $c_1 < c_2$**.**

De fato, basta analisar a situação nos quatro casos seguintes:

Caso 1. $b=0$**.**

Caso 2. $a=0$**.**

Caso 3. $a>0$ **e** $b\neq 0$**.**

Caso 4. $a<0$ **e** $b\neq 0$**.**

Caso 1. $b = 0$**.** Neste caso: $r_1 : x = \dfrac{c_1}{a}$, $r_2 : x = \dfrac{c_2}{a}$ e $s : y = 0$.

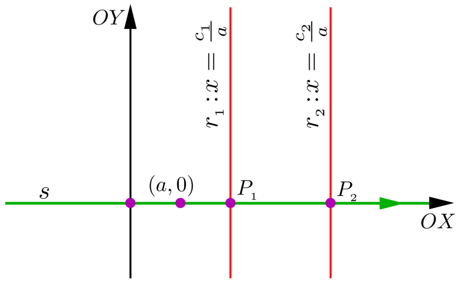


Fig. 8: Caso $b = 0$ e $a > 0$.

Se $a > 0$, então $\dfrac{c_1}{a} < \dfrac{c_2}{a} \iff c_1 < c_2$.

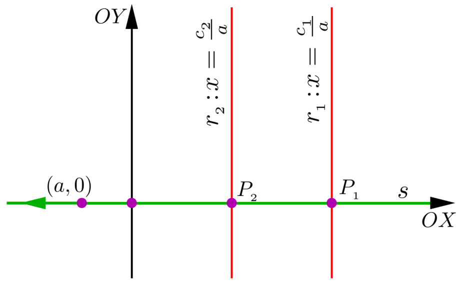


Fig. 9: Caso $b = 0$ e $a < 0$.

Se $a < 0$, então $\dfrac{c_2}{a} < \dfrac{c_1}{a} \iff c_1 < c_2$.

Caso 2. $a = 0$**.** Neste caso: $r_1 : y = \dfrac{c_1}{b}$, $r_2 : y = \dfrac{c_2}{b}$ e $s : x = 0$.

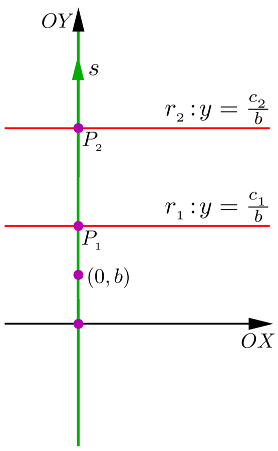


Fig. 10: Caso $a = 0$ e $b > 0$.

Se $b > 0$, então $\dfrac{c_1}{b} < \dfrac{c_2}{b} \iff c_1 < c_2$.

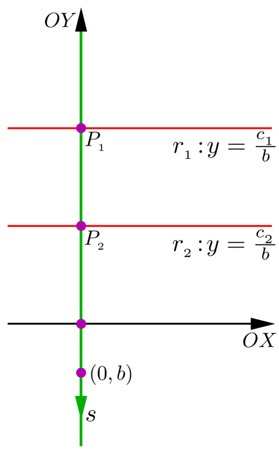


Fig. 11: Caso $a = 0$ e $b < 0$.

Se $b < 0$, então $\dfrac{c_2}{b} < \dfrac{c_1}{b} \iff c_1 < c_2$.

Caso 3. $a > 0$ **e** $b \neq 0$**.** Se $P_1 = (x_1, y_1)$, temos

$$P_1 \in s \iff y_1 = \frac{b}{a}x_1 \quad \text{e} \quad P_1 \in r_1 \iff ax_1 + by_1 = c_1.$$

Logo,

$$ax_1 + \frac{b^2}{a}x_1 = c_1 \iff \boxed{x_1 = \frac{ac_1}{a^2 + b^2}}$$

Analogamente, se $P_2 = (x_2, y_2) \in s \cap r_2$, então

$$\boxed{x_2 = \frac{ac_2}{a^2 + b^2}}$$

Subcaso $a > 0$ e $b > 0$. Pelas formas das abscissas x_1 e x_2, temos

$$x_1 < x_2 \iff \frac{ac_1}{a^2+b^2} < \frac{ac_2}{a^2+b^2} \iff c_1 < c_2.$$

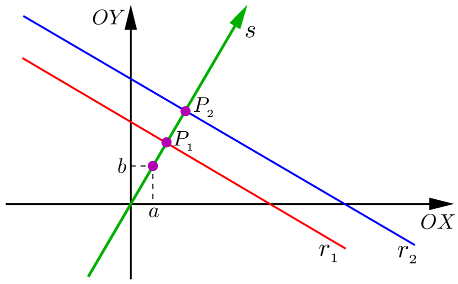


Fig. 12: $a > 0$ e $b > 0$. O sentido de percurso em s é de x crescente.

Subcaso $a > 0$ e $b < 0$. Fazendo uma análise como no subcaso anterior:

$$x_1 < x_2 \iff c_1 < c_2.$$

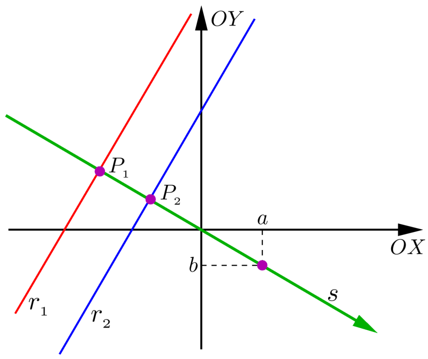


Fig. 13: $a > 0$ e $b < 0$. O sentido de percurso em s é de x crescente.

Caso 4. $a < 0$ e $b \neq 0$. As abscissas x_1 de P_1 e x_2 de P_2 satisfazem as mesmas relações que no caso anterior.

Subcaso $a < 0$ e $b > 0$. Como $a < 0$, temos,

$$x_2 = \frac{ac_2}{a^2+b^2} < x_1 = \frac{ac_1}{a^2+b^2} \iff c_1 < c_2.$$

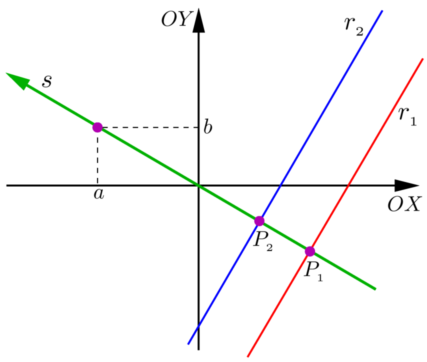


Fig. 14: $a < 0$ e $b > 0$. O sentido de percurso em s é de x decrescente.

Subcaso $a < 0$ e $b < 0$. A análise é similar ao subcaso anterior.

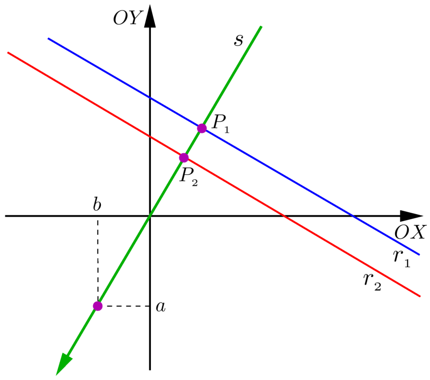


Fig. 15: $a < 0$ e $b < 0$. O sentido de percurso em s é de x decrescente.

Exemplo 4

Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ do plano cujos pontos tem suas coordenadas satisfazendo simultaneamente as desigualdades do sistema

$$\mathcal{R} : \begin{cases} y \leq 2x \\ x + y \geq 1 \,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ dadas por:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \mid 2x - y \geq 0\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid x + y \geq 1\} \,.$$

(a) Determinando a região $\mathcal{R}_1$

Considere a reta

$$r_1 : 2x - y = 0.$$

O ponto $(a, b) = (2, -1)$ pertence à reta s_1 perpendicular a r_1 que passa pela origem e o número $c = 2x - y$ aumenta conforme se avança ao longo da reta s_1 seguindo o sentido da origem para o ponto

$$(a, b) = (2, -1).$$

Portanto, a região $\mathcal{R}_1$ é o semi-plano determinado por r_1 que fica abaixo de r_1, como vemos na figura ao lado, incluindo a própria reta r_1.

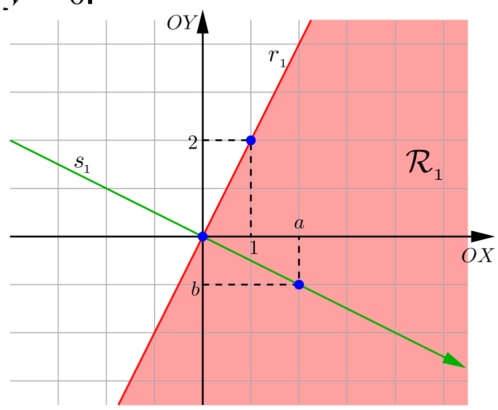


Fig. 16: Região $\mathcal{R}_1$. $a = 2 > 0$ e $b = -1 < 0$. O sentido de percurso em s_1 é de x crescente.

(b) Determinando a região $\mathcal{R}_2$

Para determinar a região $\mathcal{R}_2$, consideremos agora a reta $r_2 : x + y = 1$.

Neste caso, $a = 1 > 0$ e $b = 1 > 0$. O ponto $(a, b) = (1, 1)$ pertence à reta s_2 perpendicular a r que passa pela origem e, como no item anterior, o número $c = x + y$ aumenta conforme se avança ao longo da reta s_2 seguindo o sentido da origem para o ponto (a, b).

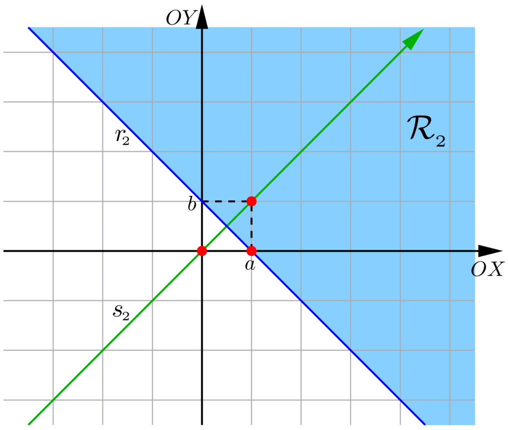


Fig. 17: Região $\mathcal{R}_2$. $a = 1 > 0$ e $b = 1 > 0$. O sentido de percurso em s_2 é de x crescente.

Assim, as coordenadas de um ponto pertencente a uma reta $x + y = c$ satisfazem a desigualdade $x + y \geq 1$ se, e somente se, a reta está contida na região sombreada indicada na figura ao lado. Ou seja, a região $\mathcal{R}_2$ é o semi-plano determinado por r_2 que fica acima de r_2, incluindo a reta r_2.

(c) Determinando a região $\mathcal{R}$

Finalmente, a região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$, formada pelos pontos do plano que pertencem ao semi-plano abaixo da reta r_1 e ao semi-plano acima da reta r_2, simultaneamente. A região $\mathcal{R}$ é esboçada na Fig. 18. $\square$

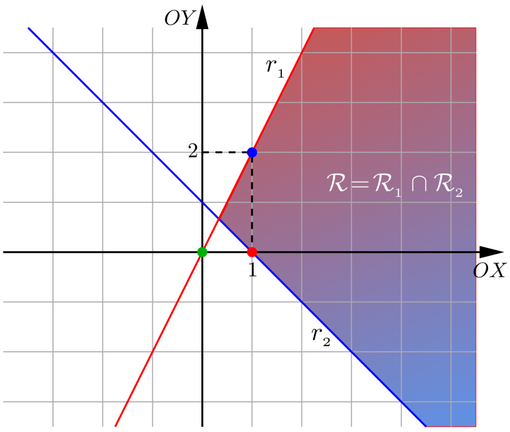


Fig. 18: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$ do Exemplo 4.

Exemplo 5

Determinar e esboçar a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema

$$\mathcal{R} : \begin{cases} |y| \leq x - 1 \\ x - y > 2\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é a interseção de duas regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$.

A primeira região, $\mathcal{R}_1$, consiste dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a primeira desigualdade:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \mid |y| \leq x - 1\}.$$

A segunda região $\mathcal{R}_2$ consiste dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a segunda desigualdade:

$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid x - y > 2\}.$$

(a) Determinação da região $\mathcal{R}_1$

Começamos lembrando que $|y| = \begin{cases} y\,, & \text{se } y \geq 0 \\ -y\,, & \text{se } y < 0\,. \end{cases}$

Portanto, a desigualdade $|y| \leq x - 1$ equivale a duas desigualdades condicionadas:

• Na condição $y \geq 0$, temos $|y| = y$.

Logo a desigualdade $|y| \leq x - 1$ equivale a $y \leq x - 1$, ou seja, $x - y \geq 1$.

Designamos por S_1 o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $y \geq 0$ e $x - y \geq 1$:

$$S_1 = \{(x, y) \mid y \geq 0 \quad \text{e} \quad x - y \geq 1\}\,, \quad \text{ou seja,} \quad S_1 : \begin{cases} x - y \geq 1 \\ y \geq 0\,. \end{cases}$$

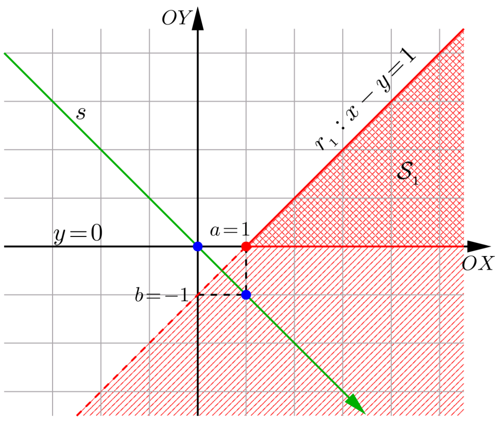


Fig. 19: Região S_1 determinada pelas desigualdades $x - y \geq 1$ e $y \geq 0$.

• Na condição $y < 0$, temos $|y| = -y$.

Logo a desigualdade $|y| \leq x - 1$ equivale a $-y \leq x - 1$, ou seja, $x + y \geq 1$.

Designamos por S_2 o conjunto dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem, simultaneamente, as desigualdades $y < 0$ e $x + y \geq 1$.

$$S_2 = \{(x, y) \mid y < 0 \quad \text{e} \quad x + y \geq 1\}\,, \quad \text{ou seja,} \quad S_2 : \begin{cases} x + y \geq 1 \\ y < 0\,. \end{cases}$$

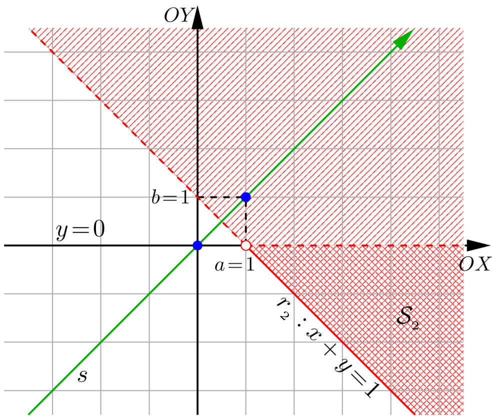


Fig. 20: Região S_2 determinada pelas desigualdades $x + y \geq 1$ e $y < 0$.

Finalmente, a região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos que pertencem à região S_1 ou à região S_2. Ou seja,

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \mid |y| \leq x - 1\} = S_1 \cup S_2 .$$

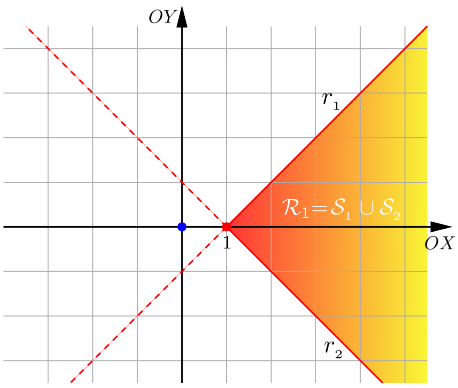


Fig. 21: Região $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \mid |y| \leq x - 1\}$.

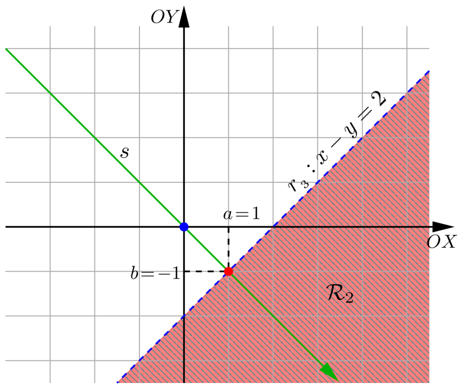


Fig. 22: Região $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid x - y > 2\}$.

(b) Determinação da região $\mathcal{R}_2$

Como a região $\mathcal{R}_2$ consiste dos pontos cujas coordenadas (x, y) satisfazem $x - y > 2$, temos que, um ponto de coordenadas (x, y) pertence à região $\mathcal{R}_2$ se, e somente se, pertence a uma reta de equação $x - y = c$ com $c > 2$. Portanto, a região $\mathcal{R}_2$ procurada consiste dos pontos do semi-plano que fica abaixo da reta r_3, excluindo os pontos da própria reta (Fig. 22).

(c) Determinação da região $\mathcal{R}$

Finalmente, um ponto pertence à região $\mathcal{R}$ se, e somente se, pertence às regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$ simultaneamente. Isto é, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2$. Na Fig. 23 esboçamos a região $\mathcal{R}$. $\square$

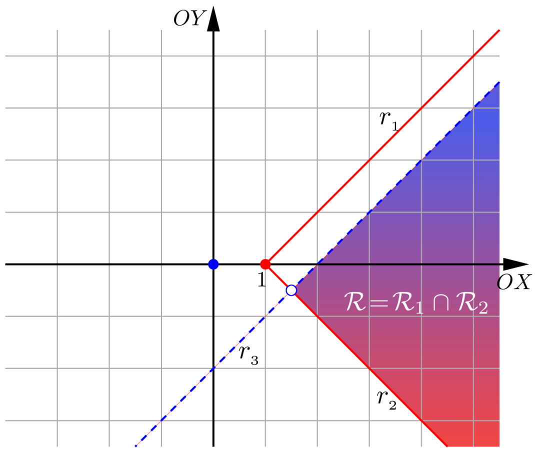


Fig. 23: Região $\mathcal{R}$ determinada pelas desigualdades $|y| \leq x - 1$ e $x - y = 2$.

Exemplo 6

Determine e esboçe a região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 \leq 1 \\ x - y \leq -1 \\ x + y \geq 0. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ consiste dos pontos do plano cujas coordenadas satisfazem as três inequações do sistema dado.

Logo, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$, onde

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1 &= \{(x, y) \,|\, x^2 + y^2 \leq 1\}, \\ \mathcal{R}_2 &= \{(x, y) \,|\, x - y \leq -1\}, \\ \mathcal{R}_3 &= \{(x, y) \,|\, x + y \geq 0\}. \end{aligned}$$

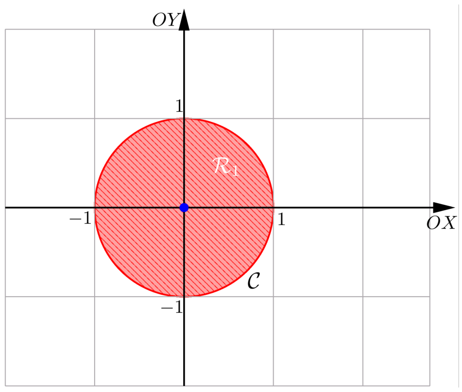


Fig. 24: $\mathcal{R}_1$ é o círculo de centro na origem e raio 1.

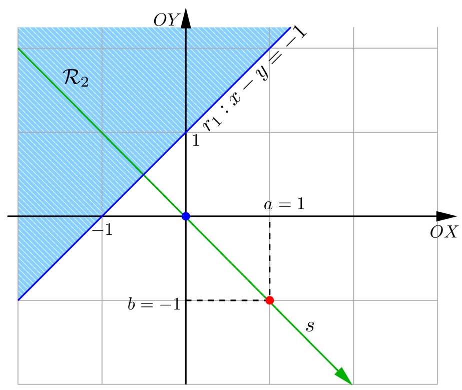


Fig. 25: $\mathcal{R}_2$ é o semi-plano em cima da reta r_1.

(a) Determinação da região $\mathcal{R}_1$

Os pontos do plano cujas coordenadas satisfazem a equação $x^2 + y^2 = c$ formam o círculo de centro na origem e raio $\sqrt{c}$, para $c > 0$. Se $c = 0$, $P = (0, 0)$ é o único ponto que satisfaz a equação $x^2 + y^2 = 0$.
Assim, um ponto pertence à região $\mathcal{R}_1$ se, e somente se, o ponto é a origem ou pertence a um círculo de raio $\sqrt{c} \le 1$. Portanto, $\mathcal{R}_1$ é o disco de centro na origem e raio 1 (Fig. 24).

(b) Determinação da região $\mathcal{R}_2$.

Seja $r_1 : x - y = -1$. Como $(a, b) = (1, -1)$, $\mathcal{R}_2$ é o semi-plano acima da reta r_1, incluindo a própria reta (Fig. 25).

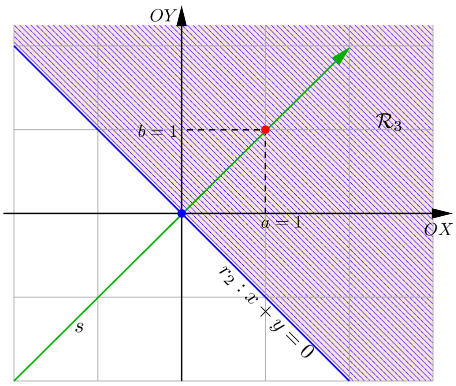


Fig. 26: $\mathcal{R}_3$ é o semi-plano em cima da reta r_2.

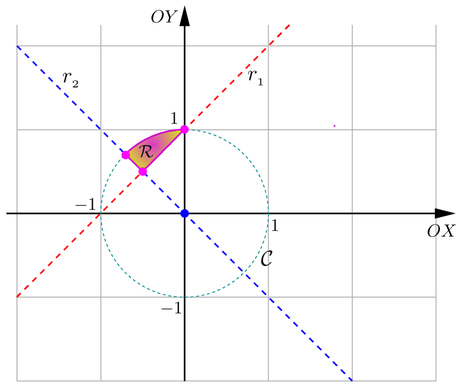


Fig. 27: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \mathcal{R}_3$.

(c) Determinação da região $\mathcal{R}_3$.

Raciocinando de maneira similar aos casos já tratados, vemos que a região $\mathcal{R}_3$ é o semi-plano acima da reta $r_2 : x + y = 0$, incluindo a reta r_2, pois $(a, b) = (1, 1)$ (Fig. 26).

Esboço da região $\mathcal{R}$.

Para esboçar a região $\mathcal{R}$ são considerados apenas os pontos do plano que pertencem simultaneamente às três regiões anteriores (Fig. 27). $\square$

Exemplo 7

Determine e faça um esboço da região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema de inequações

$$\mathcal{R} : \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 \ge 4 \\ x + y \ge 1 \\ x + y \le 1 + 2\sqrt{2}\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das três regiões abaixo:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1 &= \{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2 \geq 4\}\,,\\ \mathcal{R}_2 &= \{(x,y)\,|\,x+y \geq 1\}\,,\\ \mathcal{R}_3 &= \{(x,y)\,|\,x+y \leq 1+2\sqrt{2}\}\,.\end{aligned}$$

(a) Determinação da região $\mathcal{R}_1$

Para determinarmos a região $\mathcal{R}_1$, consideremos o círculo C dado por

$$C:(x-1)^2+y^2=4\,.$$

Observamos que

$$C_c:(x-1)^2+y^2=c^2,\, c>0$$

é a equação do círculo de centro no ponto $(1,0)$ e raio c.

Assim, se $c<2$, os pontos do círculo C_c estão contidos na região limitada pelo círculo C, e se $c>2$, os pontos do círculo C_c são exteriores ao círculo C.

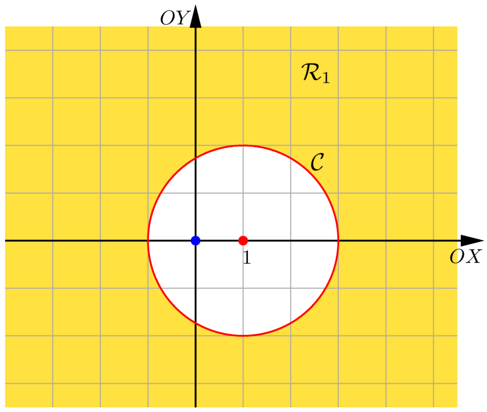


Fig. 28: Região $\mathcal{R}_1 = \{(x,y)\,|\,(x-1)^2+y^2 \geq 4\}$.

Portanto, a região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos (x,y) que são exteriores a C ou pertencem ao próprio círculo.

(b) Determinação das regiões $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$

Observe que as retas r_1 e r_2, abaixo, são paralelas:

$$r_1 : x+y=1 \quad \text{e} \quad r_2 : x+y=1+2\sqrt{2}$$

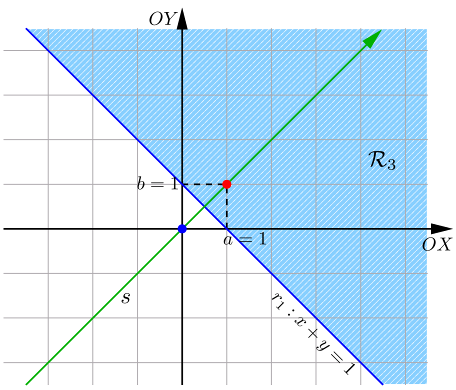


Fig. 29: Região $\mathcal{R}_2 = \{(x,y)\,|\,x+y \geq 1\}$.

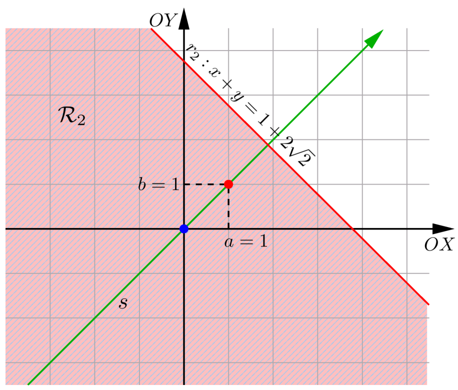


Fig. 30: Região $\mathcal{R}_3 = \{(x,y)\,|\,x+y \leq 1+2\sqrt{2}\}$.

Como $(a,b)=(1,1)$, o valor c aumenta na equação $x+y=c$ quando nos movimentamos ao longo da reta s, perpendicular a r_1, no sentido da origem para o ponto (a,b).

Portanto, a reta r_2, com valor $c = 1 + 2\sqrt{2}$ maior, fica acima da reta r_1, com valor $c = 1$. Veja as regiões $\mathcal{R}_2$ e $\mathcal{R}_3$ nas figuras 29 e 30.

(c) Determinação da região $\mathcal{R}$

Finalmente, a região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das três regiões obtidas anteriormente e cujo esboço apresentamos na Fig. 31.

Observe que a reta r_2 é tangente ao círculo C, pois

$$d((1,0), r_2) = \frac{|1 + 0 - 1 - 2\sqrt{2}|}{\sqrt{1+1}} = 2$$

é igual ao raio de C e a reta r_1 é secante a C, pois

$$d((1,0), r_1) = \frac{|1 + 0 - 1|}{\sqrt{2}} = 0 < 2. \ \square$$

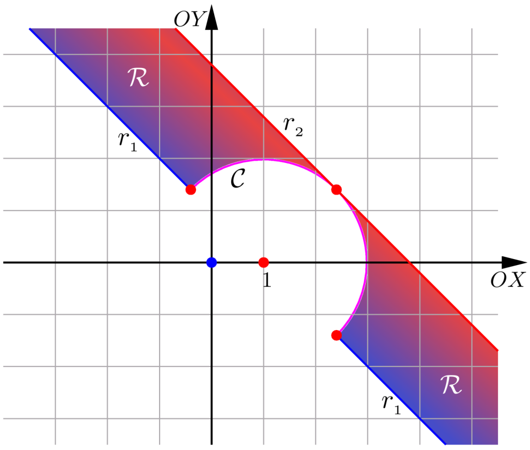


Fig. 31: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$.

3. Exercícios de revisão

1. Calcule a distância da reta $x + y = 2$ à reta $x + y = 3$.

2. Determine as equações das retas paralelas à reta $r : 2x + 3y - 1 = 0$ que distam $\sqrt{13}$ de r.

3. Determine condições sobre os números a e b para que as retas $2y = ax + b$ e $y = 2x + a$ sejam paralelas mas não coincidentes.

4. Determine as equações das retas tangentes ao círculo de centro $C = (1,0)$ e raio 2 que sejam paralelas à reta $x + y - 1 = 0$.

5. Considere os pontos $A = (1, 1)$, $B = (2, 2)$, $D = (4, 2)$ e a reta r que passa pelos pontos A e D. Determine os pontos $C \in r$ de modo que a área do triângulo ABC seja igual a 2.

6. Esboçe as regiões definidas pelos sistemas de inequações:

(a) $\begin{cases} y \leq 2x \\ x + y \geq 1 \end{cases}$ **(b)** $\begin{cases} y < 2x \\ x + y \geq 0 \end{cases}$ **(c)** $\begin{cases} |y| \leq 2x \\ |x| \leq |y| + 2 \end{cases}$.

7. Esboçe a região definida pelo sistema de inequações:

$$\begin{cases} |x| - |y| \leq 1 \\ x^2 + (y-1)^2 \leq 4 \end{cases} .$$

8. Esboçe a região definida pelo sistema de inequações:

$$\begin{cases} x + y + 1 \leq 0 \\ (x+1)^2 + (y-1)^2 \geq 9 \end{cases} .$$

9. Determine os círculos tangentes às retas $r_1 : 4x + 3y = 1$ e $r_2 : 3x - 4y = 2$, com centro sobre a reta $r : 2x + y = 2$.

3.1. Respostas

1. $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

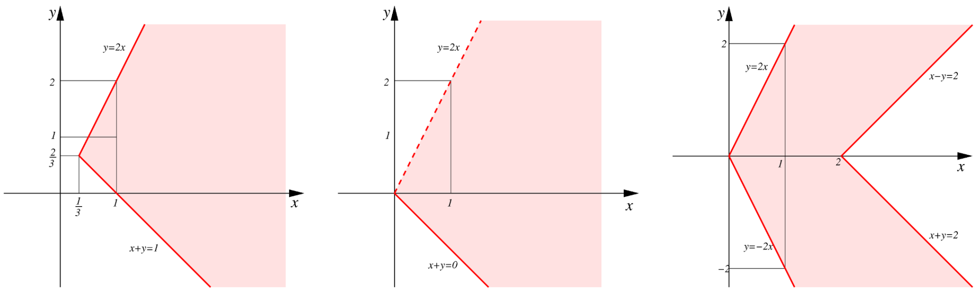
2. $2x + 3y = 14$ e $2x + 3y = -12$.

3. $a = 4$ e $b \neq 8$.

4. $x + y = 1 + 2\sqrt{2}$, $x + y = 1 - 2\sqrt{2}$.

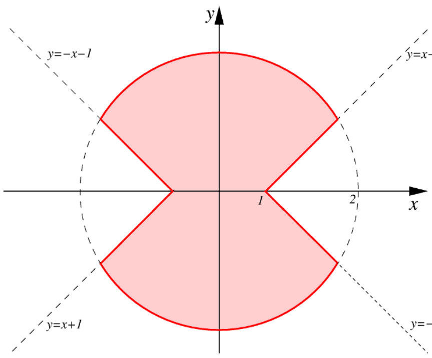
5. $C = (4, 2) = D$ ou $C = (-2, 0)$.

6.

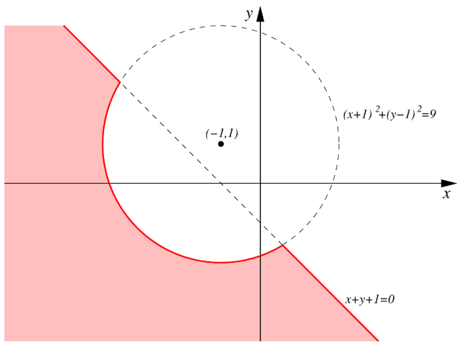


(a) (b) (c)

7.



8.



9. $\left(x - \frac{15}{13}\right)^2 + \left(y + \frac{4}{13}\right)^2 = \frac{49}{169}$ e $\left(x - \frac{5}{9}\right)^2 + \left(y - \frac{8}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$.

Capítulo 5

Equações paramétricas da reta

Na Geometria Euclidiana aprendemos que por dois pontos dados no plano passa uma única reta, neste capítulo vamos caracterizar essa reta por meio de duas equações dependentes de um parâmetro e por isso chamadas equações paramétricas da reta.

1. Reta passando pela origem e por um ponto P

Definição 1

Se $P = (a, b)$ é um ponto no plano e t é um número real, designamos por tP o ponto do plano cujas coordenadas são obtidas multiplicando as coordenadas de P pelo número t:

$$tP = (ta, tb).$$

Com essa definição vamos descrever, em termos de um *parâmetro* $t \in \mathbb{R}$, a reta que passa pela origem e por um ponto P dado.

Proposição 1

Seja $P = (a, b)$ um ponto do plano diferente da origem e seja ℓ_P a reta que passa pela origem e pelo ponto P. Então:

$$\ell_P = \{t\,P \mid t \in \mathbb{R}\} = \{t\,(a, b) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

Prova.

De fato, se $P = (0, b)$, com $b \neq 0$, então a reta ℓ_P é o eixo$-OY$ e o ponto $tP = (t0, tb) = (0, tb)$ pretence também ao eixo$-OY$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Reciprocamente, todo ponto X do eixo$-OY$ é da forma $X = (0, y)$ para algum $y \in \mathbb{R}$. Logo,

$$X = (0, y) = \left(\frac{y}{b}0, \frac{y}{b}b\right) = \frac{y}{b}(0, b) = tP,$$

com $t = \dfrac{y}{b}$

Se $P = (a, b)$, com $a \neq 0$, então a reta ℓ_P contém a origem, não é vertical, tem inclinação $m = \dfrac{b}{a}$ e equação $y = \dfrac{b}{a}x$.

Dado $t \in \mathbb{R}$ arbitrário, temos que $tb = \dfrac{b}{a}ta$, ou seja, as coordenadas do ponto

$$X = tP = t(a, b) = (ta, tb)$$

satisfazem a equação de ℓ_P.

Portanto, o ponto $X = tP$ pertence à reta ℓ_P, para todo $t \in \mathbb{R}$.

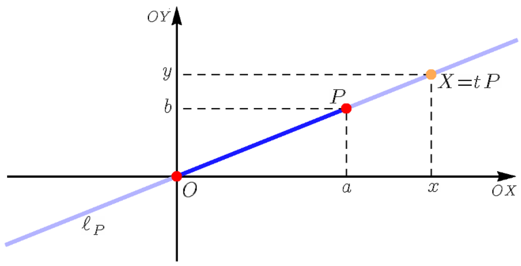


Fig. 1: Ponto $X = tP$ na reta ℓ_P

Reciprocamente, se $X = (x, y) \in \ell_P$, então $y = \dfrac{b}{a}x = \dfrac{x}{a}b$ e, como $x = \dfrac{x}{a}a$, temos

$$X = (x, y) = \left(\frac{x}{a}a, \frac{x}{a}b\right) = \frac{x}{a}(a, b) = \frac{x}{a}P = tP,$$

com $t = \dfrac{x}{a} \in \mathbb{R}$. ■

Assim, se $P = (a, b)$ é um ponto do plano diferente da origem e $X = (x, y)$ é um ponto pertencente à reta ℓ_P que passa pela origem e pelo ponto P, então as coordenadas x e y de X satisfazem $x = ta$ e $y = tb$ para algum número real t. Dizemos então que

$$\begin{cases} x = ta \\ y = tb \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são *equações paramétricas* da reta ℓ_P. Nessas equações, o número t é chamado *parâmetro*. Segundo a proposição anterior, as equações paramétricas de ℓ_P estabelecem uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta ℓ_P e o conjunto dos números reais (parâmetros), isto é, a cada número real t corresponde exatamente um ponto na reta ℓ_P e reciprocamente.

Na Fig. 2 mostramos a localização do ponto $X = tP$ na reta ℓ_P em relação ao parâmetro t. Note que, se $t = 0$, então $X = 0P = O$; se $t = 1$, então $X = 1P = P$; se $t = -1$, então $X = -1P = -P$ é o simétrico de P em ℓ_P em relação à origem; se $0 < t < 1$, então $X = tP$ percorre o segmento de extremidades O e P na reta ℓ_P etc.

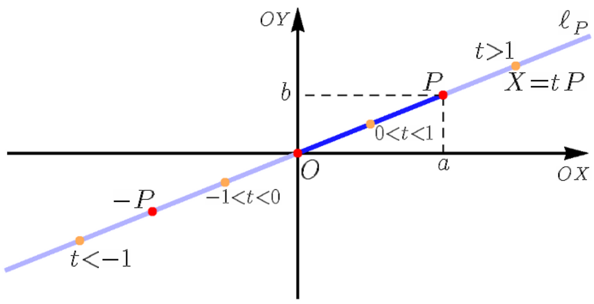


Fig. 2: Localização do ponto $X = tP$ em termos do parâmetro t.

Observação 1

Se P e Q são pontos diferentes da origem e $Q \in \ell_P$, então $\ell_P = \ell_Q$.

Isto é, a reta que passa pela origem e pelo ponto P é a mesma que a reta que passa pela origem e pelo ponto Q. Consequentemente, as equações paramétricas de ℓ_P e de ℓ_Q caracterizam o mesmo conjunto de pontos do plano.

De fato, como $Q \in \ell_P$ é um ponto diferente da origem, existe um número real $\lambda \neq 0$ tal que $Q = \lambda P$, equivalentemente, $P = \frac{1}{\lambda}Q$. Logo,

$$X = tP \in \ell_P \iff X = t\frac{1}{\lambda}Q \iff X = sQ \in \ell_Q, \text{ com } s = \frac{t}{\lambda},$$

e, se $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$, as equações paramétricas

$$\ell_P : \begin{cases} x = ta \\ y = tb \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad \ell_Q : \begin{cases} x = sc \\ y = sd \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R} \tag{1}$$

descrevem a mesma reta.

Reciprocamente, se existe um número $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$, tal que $c = \lambda a$ e $d = \lambda b$ então as equações paramétricas (1) descrevem a mesma reta, isto é, $\ell_P = \ell_Q$.

Exemplo 1

Determine equações paramétricas para a reta ℓ_P que passa pela origem e pelo ponto $P = (2,3)$. O ponto $Q = (-3,-1)$ pertence a ℓ_P? E o ponto $R = (-1,-3/2)$ pertence a ℓ_P?

Solução.
A reta ℓ_P se expressa na forma paramétrica como:

$$\ell_P : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para o ponto $Q = (-3,-1)$ pertencer a ℓ_P deve existir um número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} -3 = 2t \\ -1 = 3t \end{cases}$. Da primeira equação obtemos $t = -\frac{3}{2}$, mas esse valor não verifica a segunda equação. Portanto $Q \notin \ell_P$.
Analogamente, para o ponto $R = (-1,-3/2)$ pertencer a ℓ_P deve existir um número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\begin{cases} -1 = 2t \\ -3/2 = 3t \end{cases}$. Neste caso, o valor $t = -1/2$ obtido na primeira equação, satisfaz também a segunda equação. Portanto $R \in \ell_P$. $\square$

Proposição 2

Dois pontos $P = (a,b)$ e $Q = (c,d)$ do plano, diferentes da origem, são colineares com a origem *se, e só se, o determinante cujas linhas são as coordenadas de P e Q, respectivamente, é igual a zero, ou seja:*

$$Q = (c,d) \in \ell_P \iff \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc = 0.$$

Prova.
($\Longrightarrow$) Se $Q = (c,d) \in \ell_P$, existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $Q = \lambda P$:

$$(c,d) = \lambda(a,b) = (\lambda a, \lambda b) \Longrightarrow \begin{cases} c = \lambda a \\ d = \lambda b \end{cases} \Longrightarrow ad - bc = a\lambda b - b\lambda a = 0.$$

($\Longleftarrow$) Suponhamos agora que $ad - bc = 0$.

Caso $a = 0$: Neste caso $bc = 0$, ou seja, $b = 0$ ou $c = 0$. Logo:

- $b = 0$ não pode ocorrer, pois supomos $P \neq (0,0)$.
- $c = 0$ e $b \neq 0 \Longrightarrow (0,d) = \dfrac{d}{b}(0,b) \Longrightarrow \overrightarrow{Q} = \dfrac{d}{b}P$.

Caso $a \neq 0$: Neste caso $ad - bc = 0 \Longrightarrow d = b\dfrac{c}{a}$. Logo:

$$\frac{c}{a}P = \frac{c}{a}(a,b) = \left(\frac{c}{a}a, \frac{c}{a}b\right) = (c,d) = Q.$$

Portanto, em qualquer caso, $Q \in \ell_P$. ■

Exemplo 2

Consideremos novamente a reta ℓ_P que passa pela origem e pelo ponto $P = (2,3)$ como no exemplo anterior. Determinemos, usando a Proposição 2, se os pontos $Q = (-3,-1)$ e $R = (-1,-3/2)$ pertencem a ℓ_P.

Solução.

Para o ponto Q:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -3 & -1 \end{vmatrix} = 2(-1) - 3(-3) = -2 + 9 = 7 \neq 0.$$

Logo, $Q \notin \ell_P$.

Para o ponto R:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -3/2 \end{vmatrix} = 2(-3/2) - 3(-1) = -3 + 3 = 0.$$

Logo, $R \in \ell_P$. □

Observação 2

Se $P = (a,b)$ é um ponto do plano diferente da origem e seja

$$\ell_P : \begin{cases} x = ta \\ y = tb \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

a reta que passa pela origem e pelo ponto P.

Vejamos como obter a equação cartesiana da reta ℓ_P a partir das equações paramétricas:

(a) Se a reta ℓ_P é vertical, isto é, a reta é o eixo$-OY$, então $a = 0$ e a equação carteisna de ℓ_P é $x = 0$.

(b) Se ℓ_P não é vertical ($a \neq 0$), eliminamos o parâmetro t nas equações paramétricas para obter a equação cartesiana de ℓ_P: da primeira equação obtemos $t = \dfrac{x}{a}$ e, subtituíndo na segunda, $y = \dfrac{x}{a}b$, ou seja,

$$\ell_P : y = \frac{b}{a}x \quad \text{ou} \quad \ell_P : bx - ay = 0$$

é a equação cartesiana de ℓ_P. Em particular $m = \dfrac{b}{a}$ é a inclinação de ℓ_P.

Observação 3

Seja $Q = (b, -a)$ o ponto cujas coordenadas são os coeficientes de x e y na equação cartesiana $\ell_P : bx - ay = 0$ e seja ℓ_Q a reta que passa pela origem e pelo ponto Q:

$$\ell_Q : \begin{cases} x = tb \\ y = -ta \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

A reta ℓ_Q tem inclinação $m' = \dfrac{-a}{b}$. Como $m\,m' = \dfrac{b}{a}\dfrac{-a}{b} = -1$ as retas ℓ_P e ℓ_Q são perpendiculares (reveja a Proposição 2 do Capítulo 2).

Observação 4

Seja $\ell : ax + by = 0$ uma reta não vertical que passa pela origem. Então, $b \neq 0$ e a equação de ℓ se escreve na forma $y = -\dfrac{a}{b}x$. Tomando x como parâmetro, vemos que ℓ se representa pelas equações paramêtricas:

$$\ell : \begin{cases} x = t \\ y = -\dfrac{a}{b}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

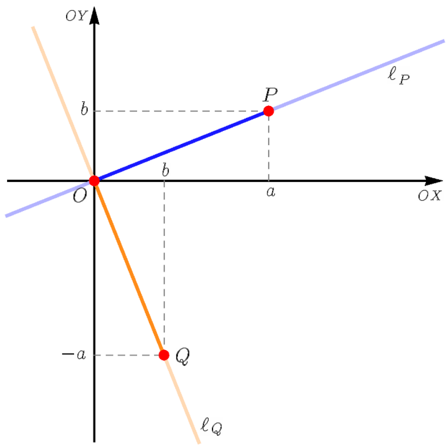


Fig. 3: Retas perpendiculares ℓ_P e ℓ_Q

Outra maneira de escrever equações paramêtricas para ℓ: partindo da equação $y = -\dfrac{a}{b}x$, tomamos o parâmetro $t = \dfrac{x}{b}$. Com isso:

$$\ell : \begin{cases} x = bt \\ y = -at \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Preste atenção na relação entre os coeficientes de t nestas equações paramétricas da reta ℓ e nos coeficientes da equação cartesiana de ℓ.

Finalmente, lembre que uma reta dada se representa tanto na forma paramétrica quanto na forma cartesiana de uma infinidade de maneiras diferentes, porém, equivalentes.

Exemplo 3

Determine equações paramétricas para a reta $r : 3x + 2y = 0$ e para a reta $r^\perp$ perpendicular a r.

Solução.

Tomando $t = 3x$, obtemos $x = \frac{1}{3}t$ e $y = -\frac{1}{2}3x = -\frac{1}{2}t$. Obtemos assim as equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = \frac{1}{3}t \\ y = -\frac{1}{2}t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Então, r é a reta que passa pela origem e pelo ponto $P = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right)$. Como r contém $Q = 6P = 6\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}\right) = (2, -3)$, obtemos as equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 2t \\ y = -3t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

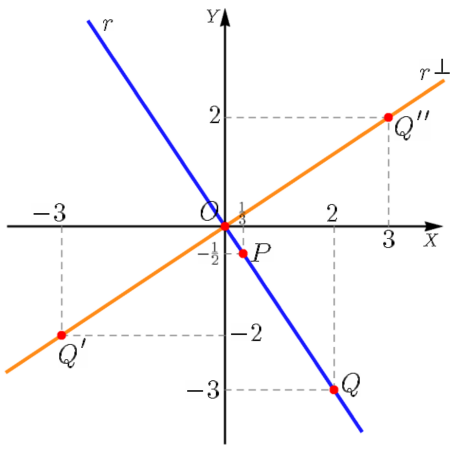


Fig. 4: Retas r e $r^\perp$.

Os pontos $Q' = (-3, -2)$ e seu simétrico $Q'' = (3, 2)$ pertencem à reta $r^\perp$ que passa pela origem e é perpendicular a r. Logo, $r^\perp$ se escreve na forma paramétrica como:

$$r^\perp : \begin{cases} x = 3t \\ y = 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Na Fig. 4 visualizamos a localização dos pontos P, Q, Q' e Q'' em relação às retas r e $r^\perp$. $\square$

2. Reta passando por dois pontos dados.

Sejam $\overline{O} = (x_0, y_0)$ e $Q = (x, y)$ pontos no plano dados em termos de suas coordenadas no sistema de eixos OXY. Seja o sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ com origem no ponto $\overline{O}$ e eixos paralelos e com a mesma orientação que os eixos do sistema OXY (Fig. 5). As coordenadas $(\overline{x}, \overline{y})$ de Q no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ se relacionam com as coordenadas (x, y) de Q no sistema OXY pelas *relações de mudança de coordenadas*:

$$\begin{cases} \overline{x} = x - x_0 \\ \overline{y} = y - y_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x = \overline{x} + x_0 \\ y = \overline{y} + y_0 \end{cases}.$$

Sejam agora $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ pontos do plano.

No sistema $P\overline{X}\,\overline{Y}$ o ponto Q tem coordenadas

$$(\overline{x_1}, \overline{y_1}) = (x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

e, no sistema $P\overline{X}\,\overline{Y}$, a reta ℓ_{PQ} que passa por P e Q é dada parametricamente pelas equações:

$$\ell_{PQ} : \begin{cases} \overline{x} = \overline{x_1} t \\ \overline{y} = \overline{y_1} t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

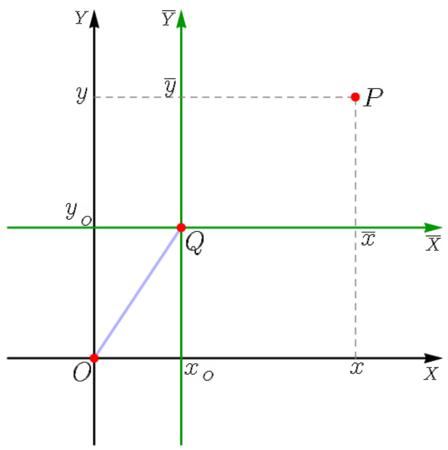


Fig. 5: Sistemas OXY e $Q\overline{XY}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas, essas equações paramétricas se escrevem, no sistema OXY, na forma:

$$\ell_{PQ} : \begin{cases} x - x_0 = (x_1 - x_0)t \\ y - y_0 = (y_1 - y_0)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Dizemos que

$$\ell_{PQ} : \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

são *equações paramétricas da reta* ℓ_{PQ} que passa por $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ no sistema OXY.

Observação 5

Lembrando que duas retas são paralelas quando não se intersectam, isto é, quando tem inclinações iguais, a reta

$$\ell_{PQ} : \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

que passa pelos pontos $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$ é paralela à reta

$$\tilde{\ell} : \begin{cases} x = (x_1 - x_0)t \\ y = (y_1 - y_0)t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

que passa pela origem e pelo ponto $(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$. Em particular, se $x_1 \neq x_0$, então as retas ℓ_{PQ} e $\tilde{\ell}$ não são verticais e têm inclinação

$$m = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}.$$

Se ℓ_{PQ} não é vertical, isto é, $x_0 \neq x_1$, sua equação cartesiana é

$$\ell_{PQ} : y = mx + b,$$

onde b se determina com a implicação $x = 0 \Longrightarrow y = b$, ou seja:

$$\begin{aligned} 0 = x = x_0 + (x_1 - x_0)t \ &\Longrightarrow \ t = -\frac{x_0}{x_1 - x_0} \\ &\Longrightarrow \ b = y_0 + (y_1 - y_0)\left(-\frac{x_0}{x_1 - x_0}\right) \\ &\Longrightarrow \ b = y_0 - \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}x_0 \\ &\Longrightarrow \ b = y_0 - mx_0\,, \end{aligned}$$

logo,

$$\ell_{PQ} : y = mx + b = mx + (y_0 - mx_0) = m(x - x_0) + y_0,$$

ou seja,

$$\ell_{PQ} : y - y_0 = m(x - x_0),$$

com $m = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}$, é a equação cartesiana da reta não-vertical ℓ_{PQ}

Exemplo 4

Determine equações paramétricas para a reta r que passa pelos pontos $P = (-1, -2)$ e $Q = (3, 1)$, sua inclinação e a equação cartesiana.

Solução.
Como $-1 \neq 3$ a reta r não é vertical, suas equações paramétricas são:

$$r : \begin{cases} x = -1 + (3 - (-1))t \\ y = -2 + (1 - (-2))t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja} \quad r : \begin{cases} x = 4t - 1 \\ y = 3t - 2 \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}.$$

A inclinação de r é $m = \dfrac{1-(-2)}{3-(-1)} = \dfrac{3}{4}$, logo, $r : y - (-2) = \dfrac{3}{4}(x - (-1))$.

Portanto, $r : y + 2 = \dfrac{3}{4}(x+1)$, ou $r : 3x - 4y = 5$ é a equação cartesiana de r. □

Definição 2

Dados pontos $A = (a, b)$ e $B = (c, d)$ definimos

• o ponto $A + B$ como sendo o ponto cujas coordenadas são a soma das coordenadas correspondentes de A e B: $A + B = (a + c, b + d)$;

• o ponto $-A$ como sendo o ponto cujas coordenadas são os simétricos das coordenadas de A: $-A = (-a, -b)$.

Escrevemos $B - A$ para designar o ponto $B + (-A)$: $B - A = (c - a, d - b)$.

Proposição 3

Se A e B são pontos do plano tais que $A \neq B$, $A \neq O$, $B \neq O$ e $C = A + B$, então o quadrilátero $OACB$ é um paralelogramo.

Prova.
Sejam $A = (a, b)$, $B = (c, d)$, $C = (a + c, b + d)$ e

- ℓ_1 a reta que passa pela origem e pelo ponto A;
- ℓ_2 a reta que passa pelos pontos B e C;
- ℓ_3 a reta que passa pela origem e pelo ponto B;
- ℓ_4 a reta que passa pelos pontos A e C.

Para verificar que o quadrilátero $OACB$ é um paralelogramo, basta verificar que as retas ℓ_1 e ℓ_2 são paralelas e que as retas ℓ_3 e ℓ_4 são paralelas.
Se $a = 0$ a reta ℓ_1 é vertical (igual ao eixo$-OY$). A reta

$$\ell_2 : \begin{cases} x = c + ((0 + c) - c)t \\ y = d + ((b + d) - d)t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja,} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = c \\ y = d + bt \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$$

é também vertical.

Se $a \neq 0$, a inclinação da reta ℓ_1 é $m_1 = \dfrac{b}{a}$, e a inclinação da reta

$$\ell_2 : \begin{cases} x = c + ((a+c) - c)t \\ y = d + ((b+d) - d)t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja,} \quad \ell_2 : \begin{cases} x = c + at \\ y = d + bt \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

é, também, $m_2 = \dfrac{b}{a}$.

Portanto, ℓ_1 e ℓ_2 são paralelas.

Análogamente se verifica que as retas ℓ_3 e ℓ_4 são paralelas. Portanto, o quadrilátero $OACB$ é um paralelogramo. ■

Observação 6

Sejam $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$, um ponto $R = (x, y)$ pertence a ℓ_{PQ} se, e só se, suas coordenadas satisfazem as equações paramétricas

$$\ell_{PQ} : \begin{cases} x = x_0 + (x_1 - x_0)t \\ y = y_0 + (y_1 - y_0)t \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Ou seja, para algum $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_0 + (x_1 - x_0)t, y_0 + (y_1 - y_0)t) \\ &= (x_0, y_0) + t(x_1 - x_0, y_1 - y_0). \end{aligned}$$

Assim, as equações paramétricas de ℓ_{PQ} se sintetizam na forma:

$$\ell_{PQ} : R = P + t(Q - P), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Também podemos escrever as equações paramétricas da reta ℓ_{PQ} assim:

$$R = (x, y) \in \ell_{PQ} \iff \text{existe } t \in \mathbb{R} \text{ tal que:}$$

$$\begin{aligned} (x, y) &= (x_0 + (x_1 - x_0)t, y_0 + (y_1 - y_0)t) \\ &= (tx_1 + (1-t)x_0, ty_1 + (1-t)y_0) \\ &= (1-t)(x_0, y_0) + t(x_1, y_1). \end{aligned}$$

Ou seja, as equações paramétricas de ℓ_{PQ} também se escrevem na forma:

$$\ell_{PQ} : R = (1-t)P + tQ, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Nestas expressões paramétricas de ℓ_{PQ} entendemos que o ponto R varía quando o parâmetro t varia em $\mathbb{R}$. Isto é,

$$\ell_{PQ} = \{P + t(Q - P) \mid t \in \mathbb{R}\} = \{(1-t)P + tQ \mid t \in \mathbb{R}\}.$$

Observação 7

Seja r a reta dada pela equação cartesiana $ax + by = c$, com $c \neq 0$.

(a) Se $b = 0$, a reta r é vertical e $x = \frac{c}{a} = x_0$ é sua equação cartesiana.

Como os pontos $P = (x_0, 0)$ e $Q = (x_0, 1)$ pertencem à reta r, obtemos:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + (x_0 - x_0)\,t \\ y = 0 + (1-0)t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}, \quad \text{ou seja,} \quad r : \begin{cases} x = x_0 \\ y = t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas da reta vertical $r : x = x_0 = \frac{c}{a}$.

(b) Se $b \neq 0$, a reta r não é vertical, tem inclinação $m = -\frac{a}{b}$.

Tomando $x = 0$ e $x = 1$, vemos que r passa pelos pontos $P = \left(0, \frac{c}{b}\right)$ e $Q = \left(1, \frac{c-a}{b}\right)$. Fazendo $y_0 = \frac{c}{b}$, temos $P = (0, y_0)$ e $Q = (1, y_0 + m)$.

Logo,

$$r : \begin{cases} x = 0 + (1-0)t \\ y = y_0 + ((y_0 + m) - y_0)t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

ou seja,

$$r : \begin{cases} x = t \\ y = mt + y_0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas da reta não-vertical $r : ax + by = c$, onde $b \neq 0$, $y_0 = \frac{c}{b}$ é a ordenada na origem e $m = -\frac{a}{b}$ é a inclinação de r.

Proposição 4

Seja $\lambda \in \mathbb{R}$ uma constante não-nula e ℓ e ℓ' retas dadas parametricamente pelos sistemas de equações:

$$\ell : \begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad e \quad \ell' : \begin{cases} x = x_0 + \lambda as \\ y = y_0 + \lambda bs \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Então $\ell = \ell'$.

Prova.
As retas ℓ e ℓ' são paralelas, pois ambas são paralelas à reta

$$\ell_0 : \begin{cases} x = at \\ y = bt \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

que passa pela origem e pelo ponto de coordenadas (a, b).
Como ℓ e ℓ' passam pelo ponto (x_0, y_0), obtemos $\ell = \ell'$ (por cada ponto do plano passa uma única reta paralela a uma reta dada). ■

Exemplo 5

Determine equações paramétricas para a reta $\ell : 3x - 2y = 1$.

Solução.
A reta r não é vertical e nem passa pela origem.
A equação cartesiana de ℓ se escreve na forma $y = \frac{3}{2}x - 1$. Tomando x como parâmetro, ou seja $x = t$, vemos que:

$$\ell : \begin{cases} x = t \\ y = \frac{3}{2}t - 1 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

são equações paramétricas para a reta ℓ.
A reta ℓ pode também se expressar pelas equações paramétricas:

$$\ell : \begin{cases} x = 2s \\ y = 3s - 1 \end{cases}, \quad s \in \mathbb{R},$$

(tome $\lambda = 2$ na Proposição 4). □

3. Mais sobre as equações da reta

Definição 3

Sejam A, B, P e Q pontos do plano tais que $A \neq B$ e $P \neq Q$. Se as retas ℓ_{PQ} e ℓ_{AB} são paralelas dizemos que os segmentos AB e PQ são *paralelos* e que o segmento AB é *paralelo* à reta ℓ_{PQ}.

Exemplo 6

Determine equações paramétricas para a reta ℓ que passa pelo ponto $A = (1, 4)$ e é paralela ao segmento que liga o ponto $P = (5, 2)$ com a origem.

Solução.

A reta que passa pela origem e pelo ponto P é $\ell_P : \begin{cases} x = 5t \\ y = 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$.

Portanto, a reta procurada é $\ell : \begin{cases} x = 1 + 5t \\ y = 4 + 2t \end{cases}, \; t \in \mathbb{R}$. $\square$

Observação 8

Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $P = (x_1', y_1')$ e $Q = (x_2', y_2')$ pontos do plano tais que $A \neq B$ e $P \neq Q$.

• Se $x_1 = x_2$, a reta ℓ_{AB} é vertical e só será paralela à reta ℓ_{PQ} se esta última fôr também vertical, isto é, $x_1' = x_2'$.

• Se $x_1 \neq x_2$, a reta não-vertical ℓ_{AB} é paralela à reta ℓ_{PQ} se e somente se, ℓ_{PQ} fôr também não-vertical ($x_1' \neq x_2'$) e tiver inclinação igual à inclinação da reta ℓ_{AB}. Como as inclinações das retas ℓ_{AB} e ℓ_{PQ} são, respectivamente,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{e} \quad m' = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'},$$

temos que as retas não-verticais ℓ_{AB} e ℓ_{PQ} são paralelas se, e só se,

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = m'.$$

ou seja, se, e só se,

$$y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1) \quad \text{e} \quad y_2' - y_1' = m(x_2' - x_1').$$

Portanto, as retas não-verticais ℓ_{AB} e ℓ_{PQ} são paralelas se, e só se, os pontos $B - A = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ e $Q - P = (x_2' - x_1', y_2' - y_1')$ são colineares com a origem, isto é, se, e só se,

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 \end{vmatrix} = 0$$

Note que se as retas ℓ_{AB} e ℓ_{PQ} são verticais, então as entradas na primeira coluna do determinante acima são iguais a zero e, portanto, o determinante é igual a zero.

Sintetizamos as conclusões da Observação 8 da seguinte maneira:

Proposição 5

Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$, $P = (x'_1, y'_1)$, $Q = (x'_2, y'_2)$ pontos do plano tais que $A \neq B$ e $P \neq Q$. A reta ℓ_{AB} que passa pelos pontos A e B é paralela à reta ℓ_{PQ} que passa pelos pontos P e Q se, e só se, o determinante cujas linhas são as coordenadas dos pontos $B - A$ e $Q - P$ é igual a zero, isto é,

$$\ell_{AB} \parallel \ell_{PQ} \iff \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x'_2 - x'_1 & y'_2 - y'_1 \end{vmatrix} = 0$$

Exemplo 7

Determine se a reta ℓ_{AB} que passa pelos pontos $A = (1, -1)$ e $B = (3, 1)$ é paralela à reta

$$\ell : \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 4 + 2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solução.

A reta ℓ passa pelos pontos $P = (2, 4)$ e (tomando $t = 1$) $Q = (1, 6)$.
Como $B - A = (3 - 1, 1 - (-1)) = (2, 2)$ e $Q - P = (1 - 2, 6 - 4) = (-1, 2)$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 + 2 = 6 \neq 0,$$

as retas ℓ_{AB} e ℓ não são paralelas. □

Exemplo 8

Determine se os pontos $P = (3, -4)$, $Q = (-1, 0)$ e $R = (-4, 3)$ são colineares.

Solução.
Os pontos P, Q e R são colineares se, e só se, os segmentos PQ e PR são paralelos (ou seja, as retas ℓ_{PQ} e ℓ_{PR} são coincidentes). Como

$$Q - P = (-1 - 3, 0 - (-4)) = (-4, 4),$$
$$R - P = (-4 - 3, 3 - (-4)) = (-7, 7)$$

e $\begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -7 & 7 \end{vmatrix} = 0$, concluímos que os pontos P, Q e R são colineares.

Outra solução: como as inclinações m_{PQ} e m_{PR} das retas ℓ_{PQ} e ℓ_{PR} são:

$$m_{PQ} = \frac{0 - (-4)}{-1 - 3} = \frac{4}{-4} = -1 \quad \text{e} \quad m_{PR} = \frac{3 - (-4)}{-4 - 3} = \frac{7}{-7} = -1.$$

os pontos são colineares. □

Da Proposição 5 obtemos um critério prático para determinar quando três pontos dados são colineares:

Proposição 6

Os pontos $P = (x_1, y_1)$, $Q = (x_2, y_2)$ e $R = (x_3, y_3)$ são colineares se, e só se,

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Em particular, a equação cartesiana da reta que passa por P e Q é:

$$\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x \\ y_1 & y_2 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Prova.
Com efeito, da Proposição 5 temos que P, Q e R são colineares se, e só se $\ell_{PQ} \parallel \ell_{PR}$ (na verdade, as retas são coincidentes), isto é, se, e só se:

$$\begin{aligned} 0 &= \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (y_2 - y_1)(x_3 - x_1) \\ &= x_2y_3 - x_2y_1 - x_1y_3 + x_1y_1 - y_2x_3 + y_2x_1 + y_1x_3 - y_1x_1 \\ &= x_1y_2\,1 + x_2y_3\,1 + x_3y_2\,1 - x_3y_2\,1 - x_1y_3\,1 - x_2y_1\,1 \end{aligned}$$

que é exatamente o desenvolvimento do determinante do enunciado. ■

Exemplo 9

Determine a equação cartesiana da reta ℓ que passa por $A = (1, -2)$ e $B = (3, -4)$.

Solução.

Temos que:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & x \\ -2 & -4 & y \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -4 + 3y - 2x + 4x - y + 6 = 2x + 2y + 2.$$

Pela Proposição 6, a equação procurada é $\ell : 2x + 2y + 2 = 0$. Isto é, $\ell : x + y + 1 = 0$. □

Observação 9

Os pontos $P' = (-b, a)$ e $P'' = -P = (b, -a)$ pertencem à reta perpendicular à reta que passa pela origem e pelo ponto $P = (a, b)$ (reveja a Seção 3, Capítulo 1).

Assim, dados $P = (a, b)$ e $Q = (c, d)$, *a reta ℓ que passa pelo ponto Q e é normal, ou seja, perpendicular, ao segmento OP* é dada parametricamente pelas equações:

$$\ell : \begin{cases} x = c - bt \\ y = d + at \end{cases}, \ t \in \mathbb{R},$$

ou, equivalentemente,

$$\ell : \begin{cases} x = c + bt \\ y = d - at \end{cases}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Multiplicando a primeira equação por a, a segunda por b e somando, obtemos a equação cartesiana

$$\ell : ax + by = D,$$

onde $D = ac + bd$, também chamada *equação normal* da reta ℓ que passa pelo ponto $Q = (c, d)$ e é perpendicular ao segmento OP, com $P = (a, b)$.

Na equação normal da reta ℓ observe que os coeficientes a e b de x

e y, respectivamente, são as coordenadas do ponto $P = (a, b)$ tal que $OP \perp \ell$, e que o valor de D é determinado conhecendo as coordenadas do ponto $Q \in \ell$.

Exemplo 10

Determinar a equação cartesiana da reta r que passa por $A = (2,3)$ e é normal ao segmento OP, onde $P = (1,2)$.

Solução.
Como $OP \perp r$, temos $r : x + 2y = c$. Sendo que $A = (2,3) \in r$, obtemos $c = 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8$.
Portanto, a equação procurada é $r : x + 2y = 8$. $\square$

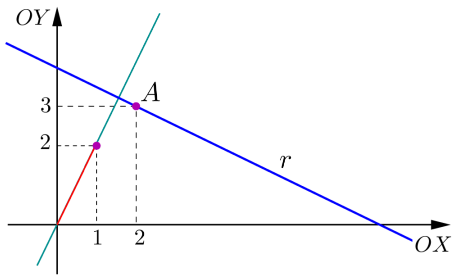


Fig. 6: Exemplo 10.

Exemplo 11

Determinar a equação cartesiana da reta r que passa por $B = (2,3)$ e é paralela ao segmento OP, onde $P = (1,2)$.

Solução.
Conhecer um ponto de r e um segmento paralelo à reta equivale a dar as equações paramétricas

$$r : \begin{cases} x = 2 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Como $OP \parallel r$, com $P = (1,2)$, temos

$$OP'' \perp r, \text{ com } P'' = (2, -1)$$

Portanto, $r : 2x - y = c$.
Já que $B = (2,3) \in r$, obtemos: $c = 2 \cdot 2 - 3 = 1$.
Logo $r : 2x - y = 1$. $\square$

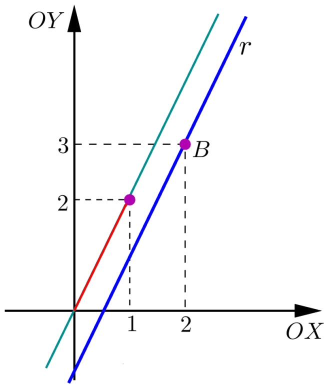


Fig. 7: Exemplo 11.

Exemplo 12

Determine a equação cartesiana da reta $\ell : \begin{cases} x = 2 - s \\ y = 1 + 3s \end{cases} ; \; s \in \mathbb{R}$.

Solução.
Das equações paramétricas vemos que ℓ é paralela ao segmento OP, onde $P = (-1, 3)$ e que $Q = (2, 1) \in \ell$.
Se $P' = (3, 1)$, o segmento OP' é perpendicular ao segmento OP e, portanto, normal a ℓ.
Logo a equação cartesiana de ℓ é:

$$\ell : 3x + y = c.$$

Como $Q = (2, 1) \in \ell$, obtemos: $c = 3 \cdot 2 + 1 = 7$.
Portanto, a equação cartesiana de ℓ é

$$\ell : 3x + y = 7. \square$$

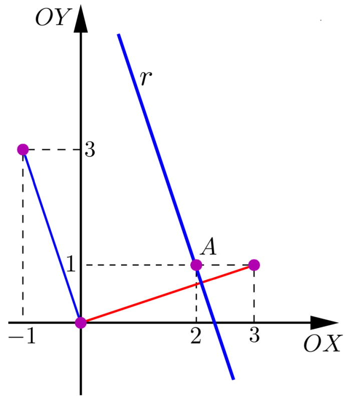


Fig. 8: Exemplo 12.

Exemplo 13

Determine equações paramétricas para a reta $r : 4x + 3y = 12$.

Solução.
Precisamos determinar um segmento OP paralelo a r e um ponto de r. Da equação cartesiana, temos que, se $P' = (4, 3)$:

$$OP' \perp r \Longrightarrow OP \parallel r\,,$$

onde $P = (3, -4)$.

Para determinar um ponto de r, tomamos $x = 0$ na equação cartesiana de r e calculamos o valor correspondente de y:

$$\begin{aligned} x = 0 \quad &\Longrightarrow \quad 4 \cdot 0 + 3y = 12 \\ &\Longrightarrow \quad 3y = 12 \Longrightarrow y = 4\,. \end{aligned}$$

Portanto, $Q = (0, 4) \in r$ e obtemos as equações paramétricas:

$$r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 4 - 4t \end{cases} ; \; t \in \mathbb{R}. \square$$

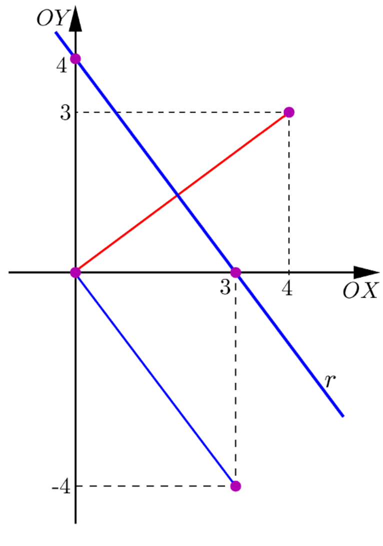


Fig. 9: Exemplo 13.

4. Bissetrizes de duas retas concorrentes

Definição 4

A reta s é uma **bissetriz** das retas r e r' no plano quando os ângulos entre r e s e entre r' e s são iguais (Fig. 10).

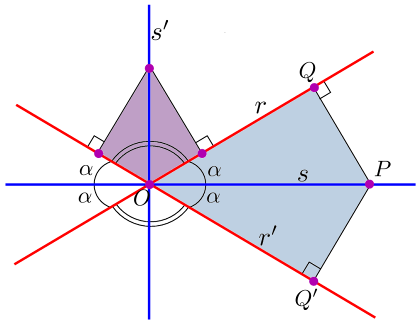


Fig. 10: Bissetrizes s e s' das retas r e r'.

Proposição 7

Se s e s' são as bissetrizes das retas concorrentes r e r', então

$$\boxed{s \cup s' = \{P \mid d(P, r) = d(P, r')\}}$$

Prova.

$(\Longrightarrow)$ Seja s uma bissetriz das retas r e r' que se cortam no ponto O. Seja $P \in s$ um ponto arbitrário. A reta perpendicular a r que passa por P intersecta r no ponto Q e a reta perpendicular a r' que passa por P intersecta r' no ponto Q' (Fig. 10).

Consideremos os triângulos retângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$.

Sendo s bissetriz de r e r', os ângulos $\widehat{POQ}$ e $\widehat{POQ'}$ têm a mesma medida e, como os ângulos $\widehat{PQO}$ e $\widehat{PQ'O}$ são retos, concluímos que os ângulos $\widehat{OPQ}$ e $\widehat{OPQ'}$ têm a mesma medida.

Portanto, os triângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$ são congruentes, pois têm o lado OP em comum.

Em particular, as medidas $d(P, r) = |PQ|$ e $d(P, r') = |PQ'|$ são iguais.

Como $P \in s$ foi escolhido arbitrariamente, concluímos que os pontos de s são eqüidistantes de r e r'.

$(\Longleftarrow)$ Reciprocamente, vejamos que se P é um ponto eqüidistante de r e r', então a reta s que passa pelos pontos O e P é uma bissetriz de r e r'.

Usando ainda a figura 10, a nossa hipótese equivale a $|PQ| = |PQ'|$.

Como os triângulos $\triangle PQO$ e $\triangle PQ'O$ têm o lado OP em comum, obtemos, pelo Teorema de Pitágoras, que os lados OQ e OQ' têm a mesma medida e, portanto, os triângulos retângulos $\triangle OPQ$ e $\triangle OPQ'$ são congruentes.

Logo os ângulos $\widehat{QOP}$ e $\widehat{Q'OP}$ têm a mesma medida e, assim, a reta s é bissetriz de r e r'. $\blacksquare$

Equações das bissetrizes de duas retas concorrentes

Pela Proposição 7, as bissetrizes s e s' de duas retas concorrentes

$$r : ax + by = c \qquad \text{e} \qquad r' : a'x + b'y = c'$$

são caracterizadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in s \cup s' &\iff d(P, r) = d(P, r') \\ &\iff \frac{|ax + by - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|a'x + b'y - c'|}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} . \end{aligned}$$

Ou seja:

$$\boxed{P = (x, y) \in s \cup s' \iff \frac{ax + by - c}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \pm \frac{a'x + b'y - c'}{\sqrt{(a')^2 + (b')^2}} .}$$

Tomando nessa identidade o sinal positivo, obtemos a equação de uma das bissetrizes e, tomando o sinal negativo, obtemos a equação da outra bissetriz.

Exemplo 14

Determinar as bissetrizes das retas $r : 2x + y = 1$ e $r' : 3x + 2y = 2$.

Solução.

Sejam s e s' as bissetrizes de r e r'.

Então:

$$\begin{aligned} P = (x, y) \in s \cup s' &\iff \frac{2x + y - 1}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \pm \frac{3x + 2y - 2}{\sqrt{3^2 + 2^2}} \\ &\iff \frac{2x + y - 1}{\sqrt{5}} = \pm \frac{3x + 2y - 2}{\sqrt{13}} \\ &\iff 2x + y - 1 = \pm \sqrt{\frac{5}{13}}\,(3x + 2y - 2) . \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{cases} s : 2x + y - 1 = \sqrt{\dfrac{5}{13}}\,(3x + 2y - 2) \\ s' : 2x + y - 1 = -\sqrt{\dfrac{5}{13}}\,(3x + 2y - 2)\,, \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} s : \left(2 - 3\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right) x + \left(1 - 2\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right) y = 1 - 2\sqrt{\dfrac{5}{13}} \\ s' : \left(2 + 3\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right) x + \left(1 + 2\sqrt{\dfrac{5}{13}}\right) y = 1 + 2\sqrt{\dfrac{5}{13}} \end{cases}$$

são as equações das bissetrizes procuradas. □

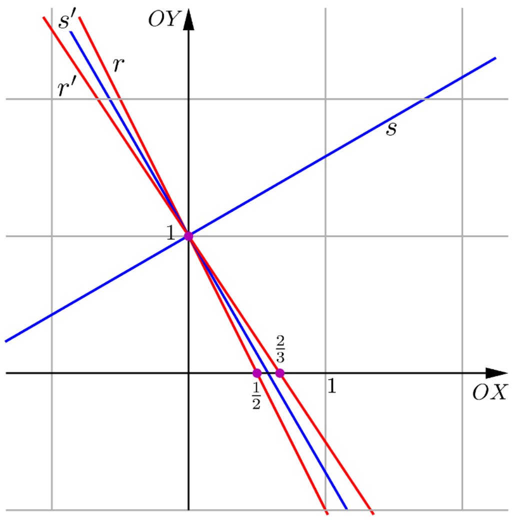


Fig. 11: Exemplo 14.

Bissetriz de um ângulo

Definição 5

Sejam O, P e Q pontos não-colineares do plano e seja r uma reta passando pelo ponto O. A reta r *bissecta* o ângulo $\widehat{POQ}$ se, dado um ponto $R \in r$, $R \neq O$, as medidas dos ângulos $\widehat{POR}$ e $\widehat{QOR}$ são iguais.

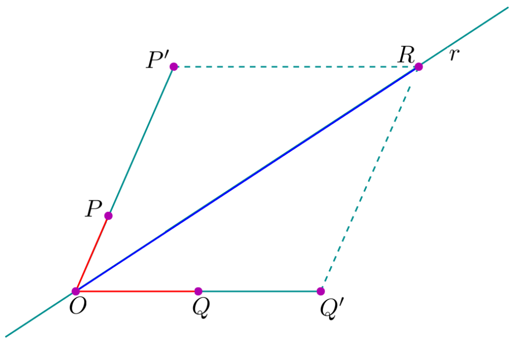


Fig. 12: Bissectando o ângulo $\widehat{POQ}$.

Como determinar a bissetriz do ângulo $\widehat{POQ}$?

Sejam O, P e Q pontos não-colineares e consideremos um sistema ortogonal de coordenadas com origem no ponto O.

Sejam $p = d(O,P) = |OP|$ e $q = d(O,Q) = |OQ|$. Se $P' = qP$ e $Q' = pQ$, os segmentos $OP' \subset \ell_P$ e $OQ' \subset \ell_Q$ são congruentes. De fato, se $P = (x_0, y_0)$ e $Q = (x_1, y_1)$, temos:

$$\begin{aligned} |OP'| &= d(O,P') = d(O,qP) = \sqrt{(qx_0)^2 + (qy_0)^2} \\ &= |q|\sqrt{x_0^2 + y_0^2} = q\,d(O,P) = qp\,, \end{aligned}$$

Analogamente, verificamos que $|OQ'| = pq$.

Se $R = P' + Q' = (qx_0 + px_1, qy_0 + py_1)$ então o quadrilátero $OP'RQ'$ é um losango, pois os segmentos OP' e OQ' são congruentes. Assim, o segmento OR, que é uma diagonal do losango $OP'RQ'$, bissecta o ângulo $\widehat{P'OQ'} = \widehat{POQ}$. Portanto, a reta r que passa pelos pontos O e R bissecta o ângulo $\widehat{POQ}$.

Exemplo 15

Sejam $A = (1,-1)$, $B = (1,1)$ e $C = (2,1)$. Determine a reta r que bissecta o ângulo $\widehat{BAC}$.

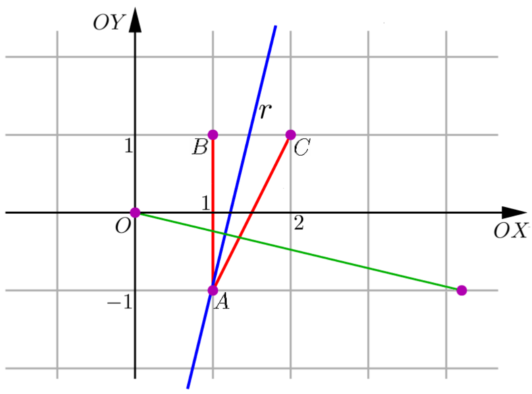


Fig. 13: Reta r bissectando o ângulo $\widehat{POQ}$.

Solução.

Sejam $P = B - A = (0,2)$ e $Q = C - A = (1,2)$. Temos $p = |OP| = 2$ e $q = |OQ| = \sqrt{5}$.

Pelo visto acima, a reta r' que passa pela origem e pelo ponto R dado por:

$$R = qP + pQ = \sqrt{5}(0,2) + 2(1,2) = \left(2, 2\left(2+\sqrt{5}\right)\right) = \left(2, 4+2\sqrt{5}\right)$$

é paralela à reta r que bissecta o ângulo $\widehat{BAC}$.

Finalmente, como

$$r' : \begin{cases} x = 2t \\ y = (4+2\sqrt{5})t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

temos que:

$$r : \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = -1 + (4 + 2\sqrt{5})t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R},$$

é a equação da bissetriz procurada. □

5. Exercícios de revisão

1. Dê as equações paramétricas e faça um esboço da reta que passa pelo ponto A e é paralela ao segmento OB, onde:

(a) $A = (1, 2)$ e $B = (-1, -2)$.

(b) $A = (0, -1)$ e $B = (2, 3)$.

2. Dê as equações paramétricas das retas determinadas por A e B, onde

(a) $A = (1, 3)$ e $B = (2, -1)$.

(b) $A = (5, 4)$ e $B = (0, 3)$.

3. Determine as equações paramétricas das seguintes retas:

(a) $2x - 5y = 3$.

(b) $x - 3y = 0$.

(c) $x = 4$.

4. Dadas as equações paramétricas, dizer quais delas representam a mesma reta.

(a) $r_1 : \begin{cases} x = 3t + 1 \\ y = -2t + 2 \end{cases} \; ; t \in \mathbb{R}.$

(b) $r_2 : \begin{cases} x = -6t - 2 \\ y = 4t + 4 \end{cases} \; ; t \in \mathbb{R}.$

(c) $r_3 : \begin{cases} x = -3t + 2 \\ y = 2t \end{cases} \; ; t \in \mathbb{R}.$

5. Determine as equações cartesianas das seguintes retas:

(a) $r : \begin{cases} x = t + 5 \\ y = 2t + 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

(b) $r : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

(c) $r : \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 3t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

6. Verifique se as retas dadas em cada item são ou não paralelas:

(a) $r : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1 - t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ e $s : 3x + y = 1.$

(b) $r : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = -t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ e $s : x + y = 0.$

7. Suponha que a reta $r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - \frac{1}{2} \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$, tangencia o círculo C de centro no ponto $(2, 3)$.

(a) Calcule o raio do círculo C.

(b) Calcule o ponto de tangência da reta r com o círculo C.

(c) Determine a outra reta tangente ao círculo C e paralela à reta r.

8. Para que valores de $m \in \mathbb{R}$ os pontos $A = (m, 1)$, $B = (2, m)$ e a origem são colineares.

9. Determine $\lambda \in \mathbb{R}$ de modo que o ponto $(1, \lambda)$ esteja na reta $r : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = t + 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}.$

10. Calcule a distância do ponto $(3,5)$ à reta $r : \begin{cases} x = 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

11. Suponha que a reta $r : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 1 - t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ seja tangente ao círculo C centrado no ponto $(3,1)$. Calcule o raio de C e o ponto de tangência.

12. Determine as equações paramétricas e cartesiana da reta s que passa pelo ponto P e é perpendicular à reta r, onde:

(a) $r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 1 - 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ e $P = (1,3)$.

(b) $r : 2x - 5y = 3$ e $P = (1,2)$.

13. Determine, em cada item, a interseção das retas dadas:

(a) $r : 4x + y = 4$ e $s : 3x - 2y = 5$.

(b) $r : 2x + 6y + 2$ e $s : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -3t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

(c) $r : \begin{cases} x = 3t + 2 \\ y = 2t - 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ e $s : \begin{cases} x = -t - 5 \\ y = 2t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

(d) $r : x - 2y = 0$, $s : y = 4x$ e $\ell : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 2 - 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

(e) $r : 2x + y = 1$, $s : 3x + 4y = 2$ e $\ell : y - 5x = 5$.

(f) $r : x = 2t + 1,\ y = 2 - 3t$, $s : \begin{cases} x = t - 2 \\ y = 1 - \frac{2}{3}t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ e $\ell : \begin{cases} x = t - 1 \\ y = 4t + 2 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

14. Determine as equações paramétricas das retas tangentes ao círculo $C : (x-1)^2 + (y+1)^2 = 5$ que são perpendiculares a $r : x - 2y = -9$.

15. Considere as retas

$$r_1 : 4x - y = 0\,, \quad r_2 : 4x - y = 1\,, \quad \text{e} \quad r_3 : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases} \; ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine o conjunto dos pontos equidistantes de r_1 e r_2.

(b) Determine a equação do círculo de centro num ponto da reta r_3 que é tangente às retas r_1 e r_2.

16. Seja $\triangle ABC$ um triângulo retângulo em B de área 5 tal que $AB \subset r_1$ e $AC \subset r_2$, onde $r_1 : x + y = 2$ e $r_2 : \begin{cases} x = 2t - 1 \\ y = 3t - 2 \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$. Determine os vértices A, B e C.

17. Considere as retas

$$r_1 : x + 2y = 2\,, \quad r_2 : 2x + y = 4 \quad \text{e} \quad s : 2x + 3y = 6.$$

(a) Determine o conjunto dos pontos equidistantes das retas r_1 e r_2

(b) Determine os pontos que distam $\sqrt{13}$ da reta s.

(c) Determine as equações dos círculos de raio $\sqrt{13}$ que são tangentes à reta s, cujos centros equidistam das retas r_1 e r_2.

5.1. Respostas

1. (a) $r : \begin{cases} x = t \\ y = 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$. (b) $r : \begin{cases} x = 2t \\ y = 3t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

2. (a) $r : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -4t - 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$. (b) $r : \begin{cases} x = 5t \\ y = t + 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

3. (a) $r : \begin{cases} x = 5t + \frac{3}{2} \\ y = 2t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$. (b) $r : \begin{cases} x = 3t \\ y = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$. (c) $r : \begin{cases} x = 4 \\ y = t \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

4. $r_1 = r_2$ e $r_1 \parallel r_3$ (com $r_1 \neq r_3$).

5. (a) $2x - y = 6$. (b) $x + 2y = 1$. (c) $3x + y = 3$.

6. (a) Não são paralelas. (b) São paralelas.

7. (a) $1/\sqrt{13}$. (b) $\left(\frac{29}{13}, \frac{37}{13}\right)$. (c) $3x - 2y = -1$.

8. $m = \pm\sqrt{2}$.

9. $\lambda = 4$.

10. $\frac{18}{\sqrt{13}}$.

11. O raio é $\frac{4}{\sqrt{5}}$ e $\left(\frac{11}{5}, -\frac{3}{5}\right)$ é o ponto de tangência.

12. (a) $y - x = 2$. (b) $5x + 2y = 9$.

13. (a) $\left(\frac{13}{11}, -\frac{8}{11}\right)$. (b) $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. (c) $\left(-\frac{11}{8}, -\frac{50}{8}\right)$. (d) $(0, 0)$. (e) $r \cap \ell = \left\{\left(-\frac{4}{7}, \frac{15}{7}\right)\right\}$, mas $r \cap s \cap \ell = \emptyset$. (f) $r \cap s = \left\{\left(\frac{23}{5}, -\frac{17}{5}\right)\right\}$, mas $r \cap s \cap \ell = \emptyset$.

14. $r_1 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t + 6 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ e $r_2 : \begin{cases} x = t \\ y = -2t - 4 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$

15. (a) O conjunto dos pontos equidistantes de r_1 e r_2 é a reta s paralela a r_1 e r_2 dada por $s : 8x - 2y = 1$. (b) O centro $C \in s \cap r_3$ é $C = \left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{18}\right)$ e a equação do círculo é $\left(x - \frac{1}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{18}\right)^2 = \frac{1}{68}$.

16. Há dois triângulos, um com vértices $A = (1, 1)$, $B = (0, 2)$ e $C = (5, 7)$; outro com vértices $A = (1, 1)$, $B = (2, 0)$ e $C = (-3, -5)$.

17. (a) O conjunto é formado pelas retas $B_1 : x - y = 2$ e $B_2 : x + y = 2$, que são as bissetrizes das retas r_1 e r_2. (b) O conjunto é formado pelas retas paralelas $s_1 : 2x + 3y = 19$ e $s_2 : 2x + 3y = -7$. (c) Os círculos são: $C_1 : (x - 5)^2 + (y - 3)^2 = 13$, $C_2 : \left(x + \frac{1}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{11}{5}\right)^2 = 13$, $C_3 : (x + 13)^2 + (y - 15)^2 = 13$ e $C_4 : (x - 13)^2 + (y + 11)^2 = 13$.

Capítulo 6

Retas, círculos e regiões: exemplos de revisão

Neste Capítulo vamos rever diversas questões geométricas através de exemplos envolvendo todos os conceitos e têcnicas introduzidos até agora, muitas dessas questões já foram postas como exercícios de revisão.

Exemplo 1

Dado o ponto $A = (0,3)$ e as retas $r : x + y = -1$ e $s : x - 2y = -5$, encontre:

(a) As coordenadas dos pontos $C \in s$ cuja distância a r é $\sqrt{2}$.

(b) Ache as coordenadas do ponto A' simétrico de A em relação à reta r.

Solução.

(a) Da equação da reta s, vemos que um ponto C pertence à reta s se, e só se, $C = (2y - 5, y)$ para algum $y \in \mathbb{R}$.
Então,

$$d(C,r) = \sqrt{2} \iff \frac{|(2y-5)+y+1|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\iff |3y - 4| = 2 \iff \begin{cases} 3y - 4 = 2 \\ \text{ou} \\ 3y - 4 = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 2 \\ \text{ou} \\ y = \dfrac{2}{3} \end{cases}$$

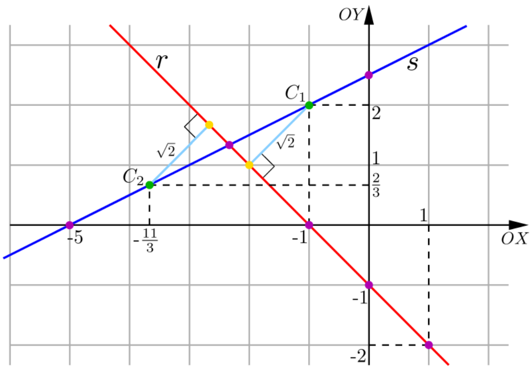


Fig. 1: Retas r e s e pontos C_1 e C_2.

Para $y_1 = 2$, calculamos $x_1 = 2y_1 - 5 = 2(2) - 5 = -1$, e obtemos o ponto $C_1 = (-1, 2) \in s$.

Para $y_2 = \frac{2}{3}$, calculamos $x_2 = 2y_2 - 5 = 2 \cdot \frac{2}{3} - 5 = \frac{4}{3} - 5 = -\frac{11}{3}$, e obtemos $C_2 = \left(-\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right) \in s$.

(b) Seja ℓ a reta perpendicular a r que passa por A. O ponto A' **simétrico** de A em relação a r é o ponto da reta ℓ, distinto de A, tal que $d(A', r) = d(A, r)$.

Seja $P = (1, 1)$. Como $r \perp OP$, temos que $\ell \parallel OP$.

Logo, se $P' = (-1, 1)$, temos que $\ell \perp OP'$ e a equação de ℓ é da forma $\ell : -x + y = c$, onde c se determina sabendo que $A = (0, 3) \in \ell$:

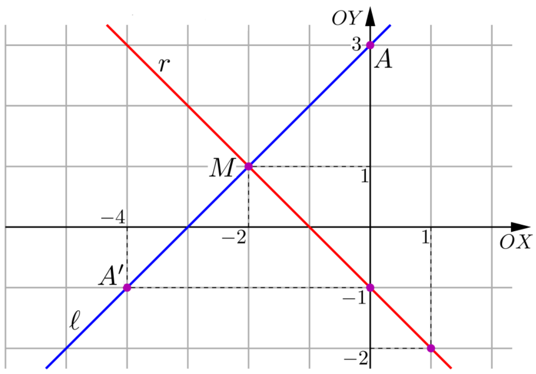


Fig. 2: Ponto A' simétrico de A em relação a r.

$$-0 + 3 = c \Longrightarrow c = 3 \Longrightarrow \ell : -x + y = 3.$$

Seja M o ponto de interseção das retas ℓ e r. Então M é o ponto médio do segmento AA'. Para determinar M resolvemos o sistema formado pelas equações de ℓ e r:

$$\ell \cap r : \begin{cases} -x + y = 3 \\ x + y = -1 \end{cases}.$$

Somando as equações, obtemos $2y = 2$, ou seja, $y = 1$ e, substituindo esse valor na segunda equação, obtemos $x = -2$. Portanto, $M = (-2, 1)$.

Sendo $M = \frac{1}{2}(A + A')$, concluímos que

$$A' = 2M - A = 2(-2,1) - (0,3) = (-4,2) - (0,3) = (-4,-1). \square$$

Exemplo 2

Seja C o círculo de centro no ponto de interseção das retas

$$r_1 : x + 2y = 1 \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = -t + 1 \end{cases} ; t \in \mathbb{R},$$

que é tangente à reta $r : x + 2y = 2$.

Determine a equação de C e o ponto de tangência da reta r com C.

Solução.

Seja P o ponto da interseção de r_1 com r_2. Então $P = (t+3, -t+1) \in r_2$, para algum $t \in \mathbb{R}$, e, como $P \in r_1$, temos que:

$$(t + 3) + 2(-t + 1) = 1 \Longrightarrow -t + 5 = 1 \Longrightarrow t = 4 \Longrightarrow P = (7, -3),$$

é o centro de C.

Como r é tangente a C, o raio de C é

$$R = d(P, r) = \frac{|7 + 2(-3) - 2|}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Portanto, a equação de C é

$$C : (x - 7)^2 + (y + 3)^2 = \frac{1}{5}.$$

O ponto de tangência de r com C é o ponto de interseção de r com a reta ℓ que passa pelo centro P e é perpendicular a r.

Sejam $P = (1, 2)$ e $P' = (-2, 1)$. Como $r \perp OP$, temos que $\ell \parallel OP$ e, portanto, $\ell \perp OP'$.

Assim, $\ell : -2x + y = c$, onde o valor de c é determinado sabendo que $P = (7, -3) \in \ell$, ou seja,

$$c = -2(7) - 3 = -14 - 3 = -17.$$

Logo,

$$\ell : -2x + y = -17.$$

O ponto Q de tangência é o ponto da interseção $\ell \cap r$. Para determiná-lo, devemos resolver o sistema que consiste das equações de ℓ e de r:

$$\ell \cap r : \begin{cases} -2x + y = -17 \\ x + 2y = 2\,. \end{cases}$$

Multiplicando a segunda equação por 2 e somando à primeira, obtemos $5y = -13$, ou seja, $y = -\frac{13}{5}$. Substituindo esse valor na segunda equação, temos:

$$x = 2 - 2\left(-\frac{13}{5}\right) = 2 + \frac{26}{5} = \frac{36}{5}.$$

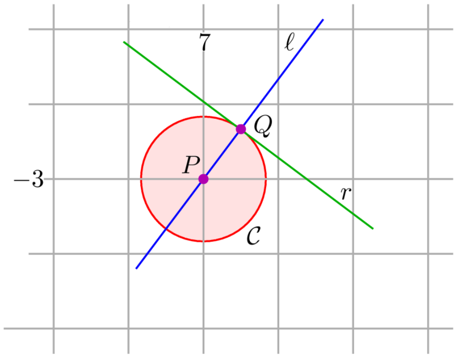


Fig. 3: Ponto Q de tangência de r com C.

Portanto, o ponto Q de tangência entre r e C é $Q = \left(\frac{36}{5}, -\frac{13}{5}\right)$. □

Exemplo 3

Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x \le y + 1 \\ x \ge -y \\ x^2 + y^2 > \frac{1}{2}\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é a interseção das regiões:

$$\mathcal{R}_1 : x \le y + 1\,, \qquad \mathcal{R}_2 : x \ge -y \qquad \text{e} \qquad \mathcal{R}_3 : x^2 + y^2 > \tfrac{1}{2}\,.$$

Determinando a região $\mathcal{R}_1$

A região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos (x, y) tais que $x \le y + 1$, ou seja, $x - y \le 1$. Consideremos a reta $r_1 : x - y = 1$ perpendicular ao segmento OP, onde $P = (1, -1)$. Como as coordenadas do ponto P não satisfazem $x \le y + 1$, a região $\mathcal{R}_1$ é o semi-plano determinado pela reta r_1 que não contém o ponto P como se ilustra na figura 4.

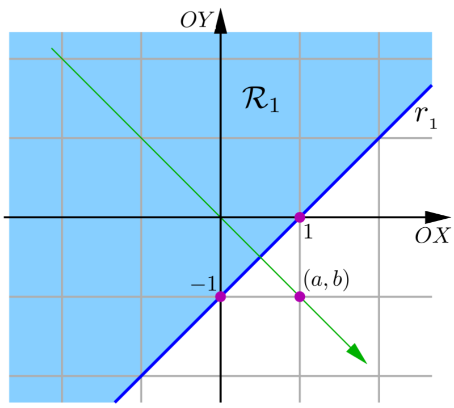


Fig. 4: Região $\mathcal{R}_1$.

Determinando a região $\mathcal{R}_2$

A região $\mathcal{R}_2$ consiste dos pontos (x, y) tais que $x \geq -y$, ou seja, $x + y \geq 0$. A reta $r_2 : x + y = 0$ é perpendicular ao segmento OP, onde $P = (1, 1)$. Como as coordenadas de P satisfazem $x \geq -y$, a região $\mathcal{R}_2$ é o semi-plano determinado pela reta r_2 que contém o ponto P como indicado na figura 5.

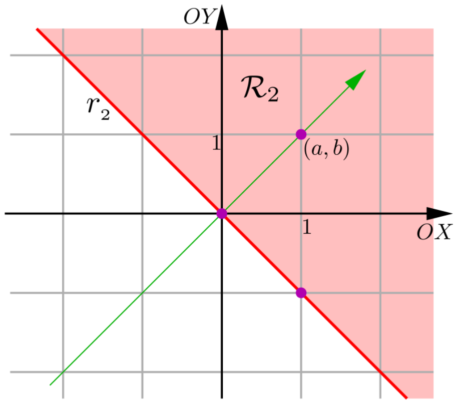


Fig. 5: Região $\mathcal{R}_2$.

Determinando a região $\mathcal{R}_3$

A equação $C : x^2 + y^2 = \frac{1}{2}$ representa o círculo de centro na origem e raio $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Para um ponto (x, y) estar na região $\mathcal{R}_3$, o quadrado da sua distância à origem deve ser maior que $\frac{1}{2}$, ou seja, deve estar na região exterior ao círculo C, que mostramos na figura 6.

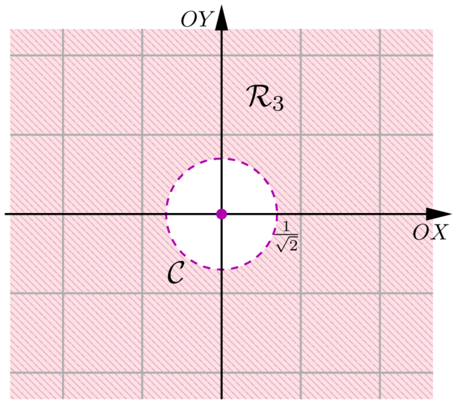


Fig. 6: Região $\mathcal{R}_3$.

Para esboçarmos corretamente a região $\mathcal{R}$ devemos determinar a interseção de r_1 com r_2:

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies 2x = 1 \implies x = \frac{1}{2} \implies y = -\frac{1}{2}.$$

Assim, as retas se intersectam no ponto de coordenadas $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$, que pertence ao círculo C, pois $\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

Além disso, observe que a reta r_1 é tangente ao círculo C, pois

$$d((0,0), r_1) = \frac{|0 - 0 - 1|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = R.$$

Na figura 7, mostramos a região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3$ □

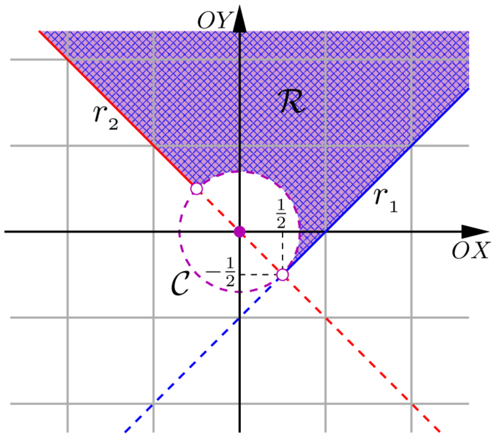


Fig. 7: Região $\mathcal{R}$, Exemplo 3.

Exemplo 4

Determine os pontos C e B de modo que a projeção ortogonal do segmento AB sobre a reta $r : x + 3y = 6$ seja o segmento CD, onde $A = (1,1)$, $D = (3,1)$ e AB é um segmento contido numa reta paralela ao segmento OP, onde $P = (2,1)$.

Solução.

Primeiramente determinemos a reta ℓ que contém os pontos A e B.
Seja $P' = (-1,2)$. Como o segmento AB é paralelo ao segmento OP, temos que os segmentos AB e OP' são perpendiculares.
Assim, $\ell : -x + 2y = c$ e, sendo que $A \in \ell$, obtemos: $c = -1 + 2(1) = 1$.
Logo $\ell : -x + 2y = 1$.
Seja agora r_1 a reta perpendicular a r que passa por $D = (3,1)$.
Sejam $Q = (1,3)$ e $Q' = (-3,1)$, sendo $r \perp OQ$, temos $r_1 \parallel OQ$ e $r_1 \perp OQ'$ e, portanto, a equação de r_1 tem a forma: $r_1 : -3x + y = c$.
Como $D = (3,1) \in r_1$, obtemos: $c = -3(3) + 1 = -8$.
Assim, $r_1 : -3x + y = -8$.
Para determinarmos o ponto B ($r_1 \cap \ell = \{B\}$), devemos resolver o sistema formado pelas equações de r_1 e ℓ:

$$\begin{cases} -3x + y = -8 \\ -x + 2y = 1 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = -8 \\ 3x - 6y = -3 \end{cases} \Longrightarrow -5y = -11$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{11}{5} \Longrightarrow x = 2y - 1 = \frac{22}{5} - 1 = \frac{17}{5}.$$

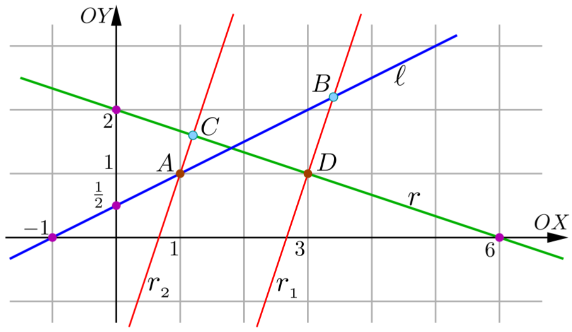


Fig. 8: Projeção CD do segmento AB sobre r.

Logo $B = \left(\frac{17}{5}, \frac{11}{5}\right)$.

O ponto C procurado, além de pertencer à reta r, deve pertencer à reta r_2 perpendicular a r que passa por A.

Como $r_1 \parallel r_2$, a equação de r_2 deve ser da forma

$$r_2 : -3x + y = c$$

onde $c = -3(1) + 1 = -2$, pois $A = (1,1) \in r_2$: .

Logo $r_2 : -3x + y = -2$ e $\{C\} = r_2 \cap r$:

$$\begin{cases} -3x + y = -2 \\ x + 3y = 6 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} -3x + y = -2 \\ 3x + 9y = 18 \end{cases} \Longrightarrow 10y = 16$$

$$\Longrightarrow \quad y = \frac{8}{5} \Longrightarrow x = 6 - 3y = 6 - \frac{24}{5} = \frac{6}{5}.$$

Portanto, $C = \left(\frac{6}{5}, \frac{8}{5}\right)$ é o outro ponto procurado. □

Exemplo 5

Seja $\mathcal{P}$ o paralelogramo $ABDC$ cujas diagonais estão sobre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = t + 1 \\ y = -t + 1 \end{cases} ; \; t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad r_2 : \begin{cases} x = -2s + 1 \\ y = s + 2 \end{cases} ; \; s \in \mathbb{R},$$

e seja $P = (2,1)$. Sabendo que $A = (1,1)$ e que $AB \subset r$, onde r é uma reta paralela ao segmento OP, determine os vértices B, C e D de $\mathcal{P}$.

Solução.

Sabemos que num paralelogramo as diagonais cortam-se num ponto M, que é ponto médio de ambas. Em nosso caso, $\{M\} = r_1 \cap r_2$:

$$r_1 \cap r_2 : \begin{cases} t + 1 = -2s + 1 \\ -t + 1 = s + 2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} t + 2s = 0 \\ -t - s = 1 \end{cases} \Longrightarrow s = 1.$$

Logo $M = (-2 \cdot 1 + 1, 1 + 2) = (-1, 3)$ é o ponto médio das diagonais AD e BC. Em particular,

$$M = \frac{A+D}{2} \implies 2M = A + D$$
$$\implies D = 2M - A = (-2,6) - (1,1) = (-3,5)\,.$$

Como A e D pertencem à reta r_1 ($t = 0$ e $t = -4$, respectivamente), os pontos B e C pertencem à reta r_2. Além disso, $\{B\} = r \cap r_2$.

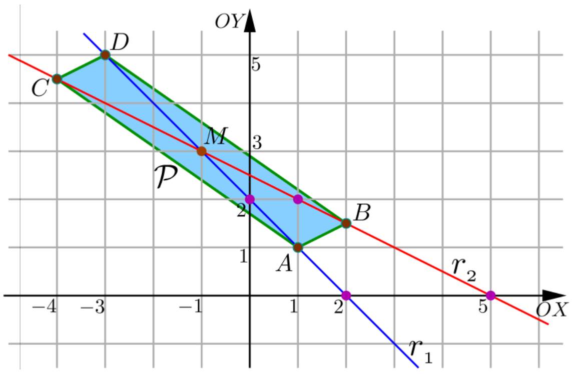


Fig. 9: Paralelogramo $\mathcal{P} = ABDC$, Exemplo 5.

Determinemos a reta r.

Sabemos que r passa por A e é paralela ao segmento OP, com $P = (2,1)$.

Logo, se $P' = (-1,2)$, temos $r \perp OP'$ e, portanto, $r : -x + 2y = c$.

Sendo que $A = (1,1) \in r$, obtemos: $c = -1 + 2(1) = 1$.

Assim, $r : -x + 2y = 1$.

Determinemos agora o vértice B.

Como $B \in r \cap r_2$, $B = (-2s+1, s+2)$, para algum s, e

$$-(-2s+1) + 2(s+2) = 1 \implies 2s - 1 + 2s + 4 = 1$$
$$\implies 4s = -2 \implies s = -\frac{1}{2}\,,$$

Logo $B = \left(-2\left(-\frac{1}{2}\right) + 1, -\frac{1}{2} + 2\right) = \left(2, \frac{3}{2}\right)$.

Finalmente, para determinar C, usamos de novo o ponto médio:

$$M = \frac{B+C}{2} \implies C = 2M - B = (-2,6) - \left(2, \frac{3}{2}\right) = \left(-4, \frac{9}{2}\right)\,,$$

concluíndo assim a determinação dos vértices de $\mathcal{P}$ (Fig. 9). □

Exemplo 6

Ache a equação do círculo $\mathcal{C}$ circunscrito ao triângulo de vértices $A = (7,3)$, $B = (1,9)$ e $C = (5,7)$.

Solução.
O centro D do círculo $\mathcal{C}$ circunscrito ao triângulo $\triangle ABC$ é o ponto de interseção das mediatrizes dos lados desse triângulo. Além disso, como $A, B, C \in \mathcal{C}$, o raio R de $\mathcal{C}$ é

$$R = d(A, D) = d(B, D) = d(C, D).$$

Para determinar o ponto D, basta achar e intersectar duas mediatrizes.
Já vimos que a mediatriz do segmento AB, ou seja, o conjunto

$$m_{AB} = \{P \mid d(P, A) = d(P, B)\}$$

é a reta perpendicular ao segmento AB que passa pelo ponto médio M_{AB} desse segmento.

Como $M_{AB} = \frac{1}{2}((7,3) + (1,9)) = \frac{1}{2}(8,12) = (4,6)$ e $r \perp AB$, com $B - A = (-6,6)$ se, e somente se, $r \perp OQ$, com $Q = (-1,1)$, a reta m_{AB} tem equação:

$$m_{AB} : -x + y = c.$$

Sendo $M_{AB} = (4,6) \in m_{AB}$, obtemos $c = -4 + 6 = 2$ e, portanto,

$$m_{AB} : -x + y = 2.$$

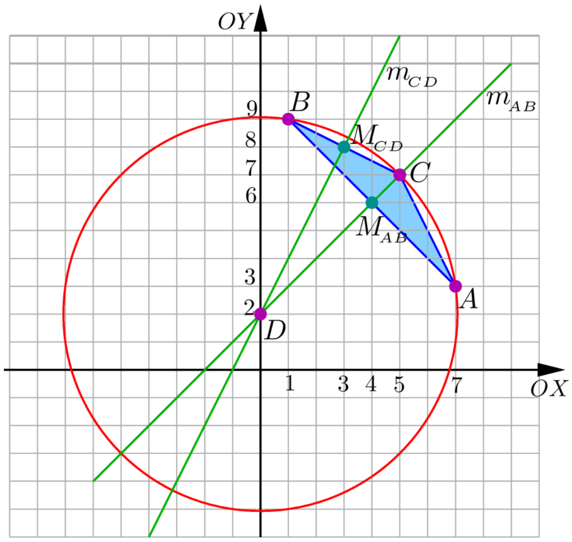


Fig. 10: Exemplo 6.

Determinemos a mediatriz m_{BC} do segmento BC, isto é, a reta perpendicular ao segmento BC que passa pelo seu ponto médio M_{BC}:

$$M_{BC} = \frac{1}{2}((1,9) + (5,7)) = \frac{1}{2}(6,16) = (3,8).$$

Como $C - B = (4,-2)$ e $m_{BC} \perp BC \iff m \perp OT$, com $T = (2,-1)$, a equação da mediatriz m_{BC} é da forma $m_{BC} : 2x - y = c$, onde c é calculado sabendo que $M_{BC} \in m_{BC}$, ou seja, $c = 2(3) - 8 = -2$ e, temos:

$$m_{BC} : 2x - y = -2\,.$$

Para determinar D, devemos resolver o sistema formado pelas equações de m_{AB} e m_{BC}:

$$\begin{cases} -x + y = 2 \\ 2x - y = -2 \end{cases} \iff (-x + 2x) + (y - y) = 2 - 2 \iff x = 0.$$

Logo $y = 2 + x = 2$ e, portanto, $D = (0,2)$ é o centro de C.
Além disso, $R = d(D,A) = \sqrt{(0-7)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{49+1} = \sqrt{50}$, é o raio de C. Finalmente,

$$C : (x-0)^2 + (y-2)^2 = \left(\sqrt{50}\right)^2\,,$$

ou seja, a equação de C é:

$$C : x^2 + (y-2)^2 = 50\,. \quad \square$$

Exemplo 7

Considere as retas

$$r_1 : 4x - y = 0\,, \quad r_2 : 4x - y = 1 \quad \text{e} \quad r_3 : \begin{cases} x = 2t \\ y = -t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

(a) Determine o conjunto dos pontos equidistantes de r_1 e r_2.

(b) Determine o círculo C com centro em r_3 e tangente às retas r_1 e r_2.

Solução.

(a) Temos que: $P = (x,y)$ equidista de r_1 e $r_2 \iff d(P,r_1) = d(P,r_2)$

$$\iff \quad d(P,r_1) = \frac{|4x-y|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = \frac{|4x-y-1|}{\sqrt{4^2+(-1)^2}} = d(P,r_2)$$

$$\iff \quad |4x-y| = |4x-y-1| \iff 4x - y = \pm(4x-y-1)$$

$$\iff \begin{cases} 4x - y = 4x - y - 1 \\ \text{ou} \\ 4x - y = -4x + y + 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 0 = -1 \\ \text{ou} \\ 8x - 2y = 1 \end{cases}$$

Sendo a primeira dessas alternativas impossível, a segunda deve acontecer. Isto é,

$$P = (x, y) \text{ equidista de } r_1 \text{ e } r_2$$
$$\iff \quad 8x - 2y = 1 \iff 4x - y = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o conjunto dos pontos equidistantes das retas paralelas r_1 e r_2 é a reta, paralela a ambas, que tem por equação:

$$s : 4x - y = \frac{1}{2}.$$

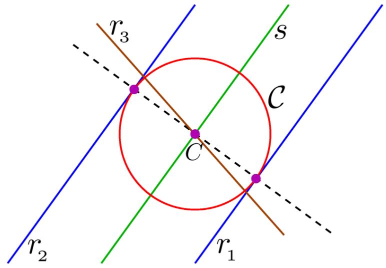


Fig. 11: Esquema do Exemplo 7.

(b) Seja C o centro do círculo $\mathcal{C}$.

Como $\mathcal{C}$ deve ser tangente a r_1 e a r_2, o centro C deve ser equidistante de r_1 e r_2. Então, pelo resultado do item (a), $C \in s$.

Além disso, por hipótese, $C \in r_3$. Portanto, $\{C\} = s \cap r_3$.

Como $C \in r_3$, devemos ter $C = (2t, -t)$, para algum $t \in \mathbb{R}$, e como $C \in s$, as coordenadas $x = 2t$ e $y = -t$ de C, devem satisfazer a equação de s:

$$C = (2t, -t) \in s \iff 4(2t) - (-t) = \frac{1}{2} \iff 9t = \frac{1}{2} \iff t = \frac{1}{18}.$$

Logo $C = \left(\frac{2}{18}, -\frac{1}{18}\right) = \left(\frac{1}{9}, -\frac{1}{18}\right)$.

Para determinar o círculo $\mathcal{C}$ devemos calcular, também, o seu raio R.

Sendo r_1 e r_2 retas tangentes a $\mathcal{C}$, temos que $R = d(C, r_1) = d(C, r_2)$. Assim,

$$R = d(C, r_1) = \frac{\left|4\frac{1}{9} - (-\frac{1}{18})\right|}{\sqrt{4^2 + (-1)^2}} = \frac{\frac{9}{18}}{\sqrt{17}} = \frac{1}{2\sqrt{17}}.$$

Portanto, a equação de $\mathcal{C}$ é:

$$\mathcal{C} : \left(x - \frac{1}{9}\right)^2 + \left(y + \frac{1}{18}\right)^2 = \left(\frac{1}{2\sqrt{17}}\right)^2 = \frac{1}{68}. \quad \square$$

Exemplo 8

(a) Mostre que as retas

$$r_1 : x - y = 2 \quad \text{e} \quad r_2 : x + y = 2$$

são tangentes ao círculo $\mathcal{C} : x^2 + y^2 = 2$, e determine os pontos de tangência.

(b) Usando o item **(a)**, faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ do plano dado pelo seguinte sistema de inequações:

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x^2 + y^2 < 4 \\ x^2 + y^2 \geq 2 \\ x + |y| \geq 2 \\ x \geq 1\,. \end{cases}$$

Solução.

(a) Sabemos que uma reta r é tangente a um círculo C quando a distância do centro de C a r é igual ao raio de C.

Temos que $C: x^2 + y^2 = 2$ é o círculo de centro na origem $C = (0,0)$ e raio $R = \sqrt{2}$. Para mostrar que as retas r_1 e r_2 são tangentes a C devemos verificar que $d(C, r_1) = d(C, r_2) = \sqrt{2}$.

Com efeito,

$$d(C, r_1) = \frac{|0-0-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R \implies r_1 \text{ é tangente a } C\,.$$

$$d(C, r_2) = \frac{|0+0-2|}{\sqrt{1^2+1^2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} = R \implies r_2 \text{ é tangente a } C\,.$$

Lembre que o ponto de tangência de uma reta r com um círculo C de centro C é a interseção da reta r com a sua perpendicular que passa pelo centro C.

Assim, para determinar os pontos de tangência de r_1 e r_2, respectivamente, com C, devemos achar as retas s_1 e s_2, tais que,

$$s_1 \perp r_1\,, \quad \text{e} \quad C \in s_1\,; \qquad s_2 \perp r_2 \quad \text{e} \quad C \in s_2\,.$$

Os pontos de tangência procurados são os pontos das interseções $s_1 \cap r_1$ e $s_2 \cap r_2$.

Determinando s_1 e o ponto de tangência $r_1 \cap C$:

Sejam $P = (1,-1)$ e $P' = (1,1)$. Como $r_1 \perp OP$, temos que $s_1 \parallel OP$ e, portanto, $s_1 \perp OP'$. Logo, a equação de s_1 é da forma $x + y = c$, onde $c = 0 + 0 = 0$, pois $(0,0) \in s_1$.

Portanto, $s_1 : x + y = 0$.

Para achar o ponto P_1 tal que $\{P_1\} = r_1 \cap C = r_1 \cap s_1$, devemos resolver o sistema formado pelas equações de r_1 e s_1:

$$\begin{cases} x - y = 2 \\ x + y = 0 \end{cases} \implies (x+x) + (-y+y) = 2 + 0 \implies 2x = 2$$

$$\implies x = 1 \implies y = -x = -1\,.$$

Portanto, $P_1 = (1, -1)$.

Determinando s_2 e o ponto de tangência $r_2 \cap C$:

Como $r_2 \perp (1,1)$, temos $s_2 \parallel (1,1)$ e, portanto, $s_2 \perp (1,-1)$.
Assim, a equação de s_2 é $x - y = c$, onde $c = 0 + 0 = 0$, pois $(0,0) \in s_2$.
Ou seja, $s_2 : x - y = 0$.
Para achar o ponto P_2 tal que $\{P_2\} = r_2 \cap C = r_2 \cap s_2$, resolvemos o sistema formado pelas equações de r_2 e s_2:

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x - y = 0 \end{cases} \implies (x + x) + (y - y) = 2 + 0 \implies 2x = 2$$
$$\implies x = 1 \implies y = x = 1\,.$$

Portanto, $P_2 = (1, 1)$.

(b) Observe que $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : x^2 + y^2 < 4\,,$$
$$\mathcal{R}_2 : x^2 + y^2 \geq 2\,,$$
$$\mathcal{R}_3 : x + |y| \geq 2\,,$$
$$\mathcal{R}_4 : x \geq 1.$$

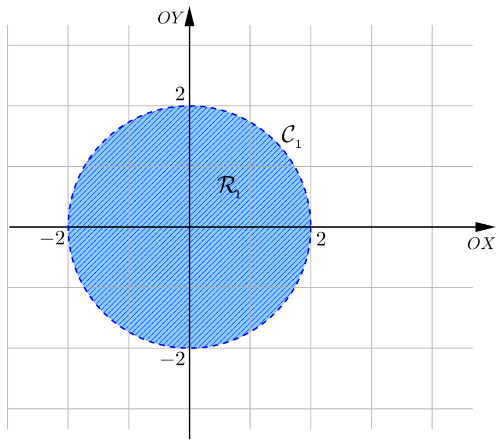


Fig. 12: Região $\mathcal{R}_1$.

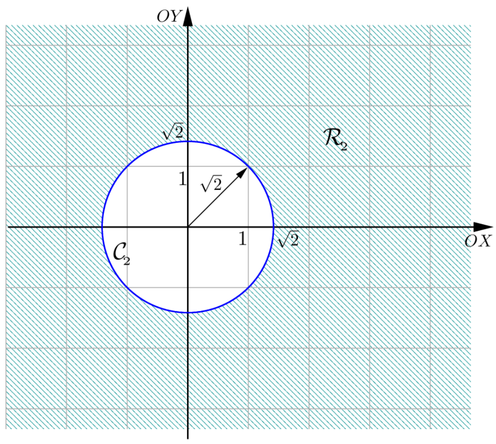


Fig. 13: Região $\mathcal{R}_2$.

Determinando $\mathcal{R}_1$.

Note que $C_1 : x^2 + y^2 = 4$, é o círculo de centro na origem e raio 2. Os pontos que satisfazem a primeira inequação são os pontos interiores a esse círculo.

Determinando $\mathcal{R}_2$.

Note que $C_2 : x^2 + y^2 = 2$, é o círculo de centro na origem e raio $\sqrt{2}$. Os pontos que satisfazem a segunda inequação são os pontos exteriores a esse círculo, incluindo o próprio círculo.

Determinando $\mathcal{R}_3$.

Como $\mathcal{R}_3 : |y| \geq 2 - x$ e $|y| = \begin{cases} y\,, & \text{se } y \geq 0 \\ -y\,, & \text{se } y \leq 0 \end{cases}$, temos que $\mathcal{R}_3$ é a união de duas regiões S_1 e S_2:

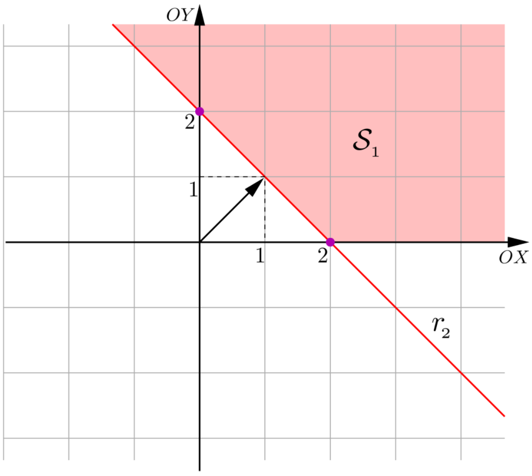


Fig. 14: Região S_1.

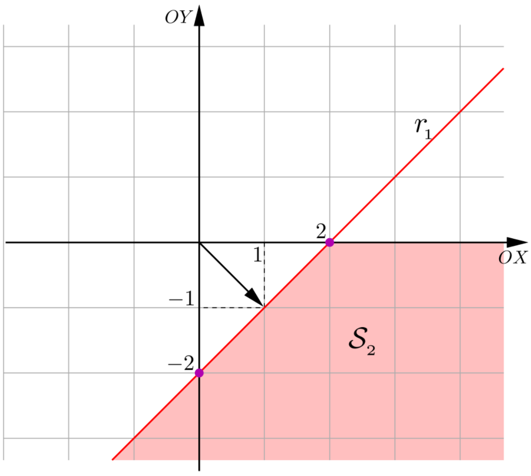


Fig. 15: Região S_2.

• a região S_1 que é a interseção do semi-plano $(y \geq 0)$ com o semi-plano acima da reta $x + y = 2$:

$$S_1 = \{P = (x, y) \mid y \geq 0 \text{ e } x + y \geq 2\}.$$

• a região S_2 que é a interseção do semi-plano $(y \leq 0)$ com o semi-plano abaixo da reta $x - y = 2$:

$$S_2 = \{P = (x, y) \mid y \leq 0 \text{ e } x - y \geq 2\}\,.$$

A região $\mathcal{R}_3$ é a união das regiões S_1 e S_2, como mostra a figura abaixo.

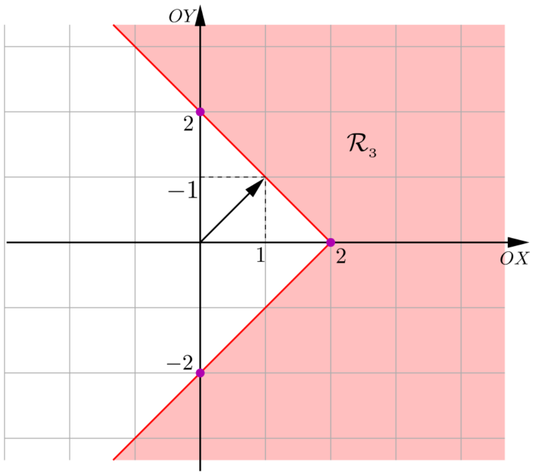


Fig. 16: Região $\mathcal{R}_3$.

Determinando $\mathcal{R}_4$.
A região $\mathcal{R}_4$ consiste dos pontos $P = (x, y)$, com $x \geq 1$, isto é, dos pontos à direita da reta vertical $x = 1$.

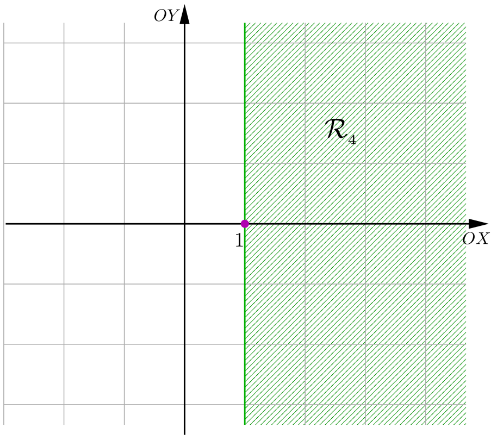


Fig. 17: Região $\mathcal{R}_4$.

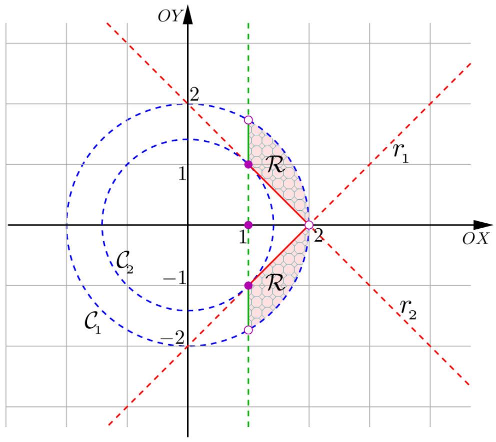


Fig. 18: Região $\mathcal{R}$.

Determinando $\mathcal{R}$.
Finalmente, a região $\mathcal{R}$ procurada é a interseção das quatro regiões anteriores. □

1. Exercícios de revisão

1. Determine os vértices A e B do triângulo $\triangle ABC$, retângulo no vértice $C = (1, 1)$, cujos catetos não intersectam o eixo-OY, de modo que AC seja paralelo à reta que passa pela origem e pleo ponto $(3, 1)$, $d(A, C) = \sqrt{10}$ e $B \in \ell$, onde $\ell : \begin{cases} x = t \\ y = 2t - 6 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$.

2. Considere as retas $r : \begin{cases} x = -t + 3 \\ y = 2t - 5 \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}$ e $s : 3x - y = 4$.

Determine o raio, o centro e a equação do círculo C, tal que:

- r é tangente a C no ponto $A = (1, -1)$.

- $s \cap \mathcal{C}$ consiste de dois pontos que formam uma corda de comprimento $d = \sqrt{10}$ totalmente contida no semi-plano $x \geq 1$.

Obs: verifique que $A \in s$.

3. Considere as retas $r_1 : 3x - 2y = 1$; $r_2 : 2x - 3y = -1$; $\ell_1 : 2x + y = 1$ e $\ell_2 : 2x + y = 3$.

(a) Determine o conjunto dos pontos equidistantes de r_1 e r_2.

(b) Determine o conjunto dos pontos equidistantes de ℓ_1 e ℓ_2.

(c) Determine o(s) ponto(s) C do plano que equidistam de r_1 e r_2 e de ℓ_1 e ℓ_2, simultaneamente.

(d) Calcule $d(C, r_1)$ e $d(C, r_2$.

(e) Verifique se existe um círculo $\mathcal{C}$ que seja tangente a r_1, r_2, ℓ_1 e ℓ_2, simultaneamente. Em caso afirmativo, determine a equação desse(s) círculo(s), em caso negativo, justifique a não-existência.

4. Determine a equação cartesiana da reta r_2, de modo que $s : x + y = 2$ seja uma das bissetrizes das retas r_1 e r_2, onde $r_1 : x + 2y = 5$.

Sugestão: suponha primeiro que r_2 é vertical e depois que $r_2 : y = ax + b$.

5. Determine os vértices A, B, C e D e a área do paralelogramo $ABDC$, tal que $B - A = (2, 1)$ e suas diagonais AD e BC estejam contidas nas retas $r_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = -2t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$ e $r_1 : \begin{cases} x = 3s + 4 \\ y = -s + 1 \end{cases}$; $s \in \mathbb{R}$, respectivamente.

6. Considere a reta $r : x - 3y = 3$.

(a) Determine o conjunto dos pontos do plano que distam $d = \sqrt{10}$ da reta r.

(b) Determine os vértices A, B e C do triângulo $\triangle ABC$ sabendo que:

- A, B e C distam d da reta r.

- O lado AB é parelelo ao segmento da origem até o ponto $(2,1)$, o lado AC é paralelo ao segmento da origem até o ponto $(2,3)$ e $M = (3,0)$ pertence ao lado AB.
- A pertence ao terceiro quadrante.

7. Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ definida pelo sistema:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 > 1 \\ 2x + |y - 2| \leq 2 \\ |x| \leq 1 \end{cases}$$

8. Determine a interseção do círculo $C : \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ com as retas $r_1 : x + y = 1$ e $r_2 : x - y = 1$. Faça um esboço detalhado da região $\mathcal{R}$ do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 \geq \frac{1}{4} \\ x + |y| \leq 1 \\ |y| \leq \frac{1}{2} \end{cases} .$$

9. Sejam $A = (2,2)$, $B = (4,4)$, $r_1 : 3x - 2y = 1$ e $r_2 : 2x - 3y = -1$.

(a) Determine o conjunto dos pontos equidistantes de r_1 e r_2.

(b) Determine o conjunto dos pontos equidistantes de A e B.

(c) Determine o(s) ponto(s) C do plano que equidista(m) de r_1 e r_2 e de A e B simultaneamente.

(d) Para os pontos C do item anterior calcule $d(C, r_1)$ e $d(C, A)$.

(e) Use os itens anteriores para verificar se existe um círculo C que seja tangente às retas r_1 e r_2 e que passe pelos pontos A e B. Em caso afirmativo, determine a(s) equação(ções) desse(s) círculo(s) e, em caso negativo, justifique a não-existência.

10. Considere os pontos $A = (1,2)$ e $B = (3,0)$, e a reta $r : 2x - 3y = 1$.

(a) Determine os pontos C e D de modo que $CD \subset r$ seja obtido projetando ortogonalmente o segmento AB sobre a reta r.

(b) Mostre que $ADBC$ é um paralelogramo (as diagonais são AB e CD).

11. Considere as retas $r_1 : x + y = 2$ e $r_2 : x - y = -2$ e os círculos $C_1 : x^2 + y^2 = 9$ e $C_2 : x^2 + y^2 = 2$.

(a) Verifique se as retas r_1 e r_2 são tangentes, secantes ou exteriores aos círculos C_1 e C_2. Determine a interseção das retas r_1 e r_2.

(b) Faça um esboço detalhado da região do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 < 9 \\ x^2 + y^2 \geq 2 \\ x + y \leq 2 \\ x - y > -2 \\ y \geq -2. \end{cases}$$

12. Considere os pontos $A = (5, 1)$, $B = (7, -3)$ e a reta $r : 3x+4y = -31$.

(a) Determine equações paramétricas da mediatriz do segmento AB.

(b) Determine o centro P, o raio R e a equação do círculo C que passa pelos pontos A e B e é tangente à reta r, sabendo que o centro se encontra no quarto quadrante.

(c) Determine o ponto Q onde a reta r tangencia o círculo C.

13. Sejam as retas $r_1 : \begin{cases} x = t + 2 \\ y = 2t - 3 \end{cases} ; t \in \mathbb{R}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 2s + 1 \\ y = 3s - 3 \end{cases} ; s \in \mathbb{R}$.

Determine os vértices do paralelogramo $ABDC$ sabendo que $AB \subset r_1$, $AC \subset r_2$, $MD \perp OP$, onde $P = (2, -1)$ e $d(A, M) = 3\sqrt{5}$, M é o ponto médio do segmento AD e pertence ao primeiro quadrante.

14. Seja $A = (1, 6)$ e as retas $r : x + 2y = 3$ e $\ell : x + y = 5$. Determine os vértices do paralelogramo $A'BB'C$ sabendo que A' e B' são os pontos simétricos, respectivamente, de A e B em relação à reta r, $A'B$ é paralelo à diagonal principal $y = x$ e $B \in \ell$.

15. Determine os vértices B e C do triângulo isósceles $\triangle ABC$, com $A = (5, 3)$ e base BC de comprimento $2\sqrt{5}$ contida na reta $r : x - 2y = 4$.

1.1. Respostas

1. $A = (4,2)$ e $B = (2,-2)$.

2. Centro $(3,0)$, raio $\sqrt{5}$ e equação: $(x-3)^2 + y^2 = 5$.

3. (a) $\mathcal{R}_1 = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(P,r_1) = d(P,r_2)\right\} = s_1 \cup s_2$, onde $s_1 : x + y = 2$ e $s_2 : x - y = 0$. (b) $\mathcal{R}_2 = \left\{P \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(P,\ell_1) = d(P,\ell_2)\right\} = \ell_3$, onde $\ell_3 : 2x + y = 2$. (c) $C_1 = (0,2)$ ou $C_2 = \left(\frac{2}{3},\frac{2}{3}\right)$, onde $s_1 \cap \ell_3 = \{C_1\}$ e $s_2 \cap \ell_3 = \{C_2\}$. (d) $d(C_1,r_1) = d(C_1,r_2) = \frac{5}{\sqrt{13}}$; $d(C_1,\ell_1) = d(C_1,\ell_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$; $d(C_2,r_1) = d(C_2,r_2) = \frac{1}{3\sqrt{13}}$; $d(C_2,\ell_1) = d(C_2,\ell_2) = \frac{1}{\sqrt{5}}$. (e) Não existe um círculo tangente às retas r_1, r_2, ℓ_1 e ℓ_2. Caso existisse, seu centro C seria equidistante de r_1 e r_2 e de ℓ_1 e ℓ_2, isto é $C = C_1$ ou $C = C_2$. No entanto, pelos cálculos do item anterior, $d(C_2,r_1) \neq d(C_2,\ell_1)$.

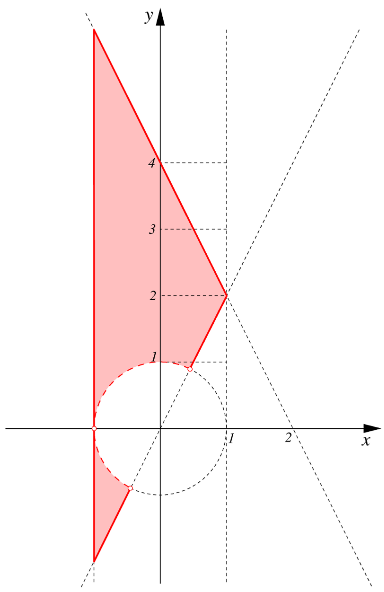
4. $r_2 : 2x + y = 1$.

5. $A = (2,0)$, $B = (4,1)$, $C = (-2,3)$ e $D = (0,4)$.

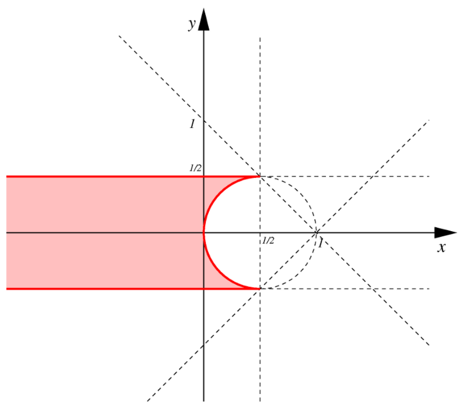
6. (a) $\{P \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(P,r) = \sqrt{10}\} = r_1 \cup r_2$ onde $r_1 : x - 3y = 13$ e $r_2 : x - 3y = -7$. (b) $A = (-17,-10)$, $B = (23,10)$ e $C = \left(-\frac{79}{7},-\frac{10}{7}\right)$.

7. Ver figura abaixo.

8. $C \cap r_1 = \left\{(1,0), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$ e $C \cap r_2 = \left\{(1,0), \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)\right\}$. A região $\mathcal{R}$ é mostrada na figura abaixo.



Exercício 7



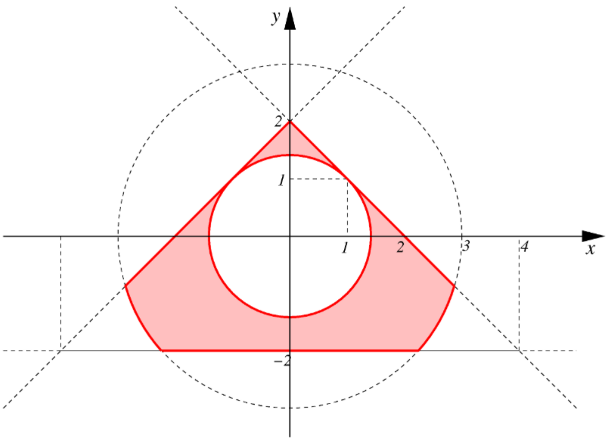
Exercício 8

9. (a) $\{P \in \mathbb{R}^2 \,|\, d(P, r_1) = d(P, r_2)\} = s_1 \cup s_2$, onde $s_1 : x + y = 2$ e $s_2 : x - y = 0$. (b) A mediatriz dos pontos A e B é a reta $\ell : x + y = 6$. (c) O conjunto procurado é $\ell \cap (s_1 \cup s_2) = \ell \cap s_1 \cup \ell \cap s_2 = \emptyset \cup \{C\} = \{C\}$, onde $C = (3, 3)$. (d) $d(C, r_1) = \frac{2}{\sqrt{13}}$ e $d(C, A) = \sqrt{2}$. (e) Não existe um círculo tangente a r_1 e r_2 que passe por A e B, pois, seu centro, sendo equidistante de r_1 e r_2 e de A e B, seria necessáriamente o ponto C. Mas $d(C, A) = d(C, B) = \sqrt{2} \neq \frac{2}{\sqrt{13}} = d(C, r_1) = d(C, r_2)$.

10. (a) $C = \left(\frac{23}{13}, \frac{11}{13}\right)$ e $D = \left(\frac{29}{13}, \frac{15}{13}\right)$. (b) Como $D - A = \left(\frac{16}{13}, -\frac{11}{13}\right) = B - C$ o quadrilátero $ADBC$ é um paralelogramo.

11. (a) r_1 e r_2 são secantes a C_1 e tangentes ao círculo C_2, pois $d((0,0), r_1) = d((0,0), r_2) = \sqrt{2} =$ raio de $C_2 < 3 =$ raio de C_1. Além disso, $r_1 \cap r_2 = \{(0, 2)\}$.

(b)



12. (a) $\ell : \begin{cases} x = 6 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$; $t \in \mathbb{R}$. (b) $P = (2, -3)$, $R = 5$, $C : (x - 2)^2 + (y + 3)^2 = 25$. (c) $Q = (-1, -7)$.

13. $A = C = (5, 3)$, $B = D = (11, 15)$, note que o paralelogramo é degenerado.

14. $A' = (-3, -2)$, $B = (2, 3)$, $B' = (0, -1)$ e $C = (-5, 6)$.

15. $B = (8, 2)$ e $C = (4, 0)$, ou $B = (4, 0)$ e $C = (8, 2)$.

Capítulo 7

Curvas cônicas I: elipse

Nosso objetivo agora será estudar a **equação geral do segundo grau** nas duas variáveis x e y:

$$\boxed{Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

onde $A \neq 0$ ou $B \neq 0$ ou $C \neq 0$. Inicialmente vamos considerar o caso em que $B = 0$, isto é, vamos estudar a equação:

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

e em particular, no presente Capítulo, estudaremos o caso em que A e C têm o mesmo sinal, para o qual a equação representa uma elipse, um ponto ou o conjunto vazio, como veremos mais adiante.

1. Um pouco de história

Nos seus escritos, o matemático grego *Pappus de Alexandria* (290-350), atribuiu ao geômetra grego *Aristeu* (370-300 a.C.) o crédito de ter publicado o primeiro tratado sobre as *seções cônicas*, referindo-se aos *Cinco livros sobre seções cônicas* de Aristeu, nos quais foi apresentado um estudo cuidadoso das curvas cônicas e as suas propriedades.

Segundo Pappus, o matemático grego *Euclides de Alexandria* (325-

265 a.C.), contemporâneo de Aristeu, conhecia muito bem os cinco livros sobre as curvas cônicas e evitou aprofundar-se sobre esse assunto na sua obra *Os Elementos*, de modo a obrigar os leitores interessados a consultar a obra original de Aristeu. Duzentos anos mais tarde, o astrônomo e matemático grego *Apolônio de Perga* (262-190 a.C.) recompilou e aprimorou os resultados de Aristeu e de Euclides nos oito livros da sua obra *Seções Cônicas*. No entanto, a História indica que as cônicas foram descobertas pelo matemático grego *Menaecmus* (380-320 a.C. aproximadamente) quando estudava como resolver os três problemas famosos da Geometria grega: a triseção do ângulo, a duplicação do cubo e a quadratura do círculo. Segundo o historiador Proclus, Menaecmus nasceu em Alopeconnesus, na Ásia Menor (o que hoje é a Turquia), foi aluno de Eudóxio na academia de Platão.

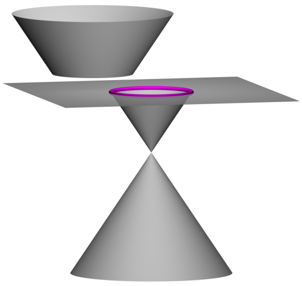


Fig. 1: Círculo.

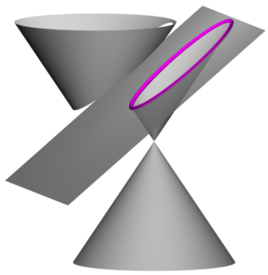


Fig. 2: Elipse.

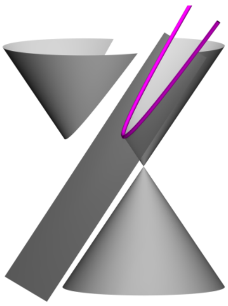


Fig. 3: Parábola.

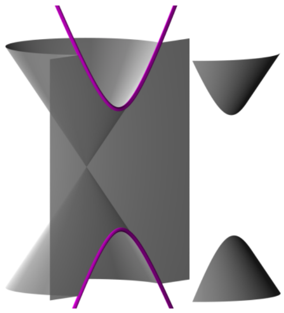


Fig. 4: Hipérbole.

Menaecmus foi o primeiro em mostrar que as elipses, parábolas e hipérboles são obtidas cortando um cone com um plano não paralelo à sua base. Mesmo assim, pensava-se que os nomes dessas curvas foram inventados por Apolônio, porém traduções de antigos escritos árabes indicam a existência desses nomes em épocas anteriores a Apolônio.

2. Elipse

Definição 1

Uma **elipse**, $\mathcal{E}$, de **focos** F_1 e F_2, é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos P cuja soma das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, maior do que a distância entre os focos $2c \geq 0$. Ou seja:

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{E} = \{\, P \mid d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \,\}\ , \\ 0 \leq c < a\,; \quad d(F_1, F_2) = 2c \end{array}}$$

Terminologia

• Como dissemos na definição, os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da elipse.

• A reta ℓ que contém os focos é a **reta focal**.

Fig. 5: Posicionamento dos focos da elipse na reta focal.

• A intersecção da elipse com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados **vértices** da elipse sobre a reta focal.

De fato, seja $A \in \mathcal{E} \cap \ell$. Então $A \notin F_1F_2$, pois se $A \in F_1F_2$, teríamos

$$2c = d(F_1, F_2) = d(A, F_1) + d(A, F_2) = 2a\,,$$

isto é, $2c = 2a$, o que é impossível, já que, por definição, $2c < 2a$.

Seja $A_2 \in \mathcal{E} \cap \ell - F_1F_2$ tal que $x = d(A_2, F_2)$.

Como $2a = d(A_2, F_1) + d(A_2, F_2) = x + 2c + x$, pois $A_2 \in \mathcal{E}$, temos que $x = a - c$.

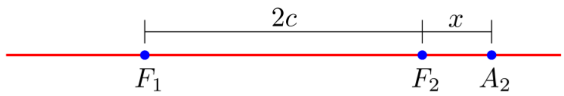


Fig. 6: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da elipse na reta focal.

Logo o ponto A_2 pertencente a $\ell - F_1F_2$, que dista $a - c$ do foco F_2, pertence à elipse $\mathcal{E}$. De modo análogo, temos que o ponto A_1 pertencente a $\ell - F_1F_2$ que dista $a - c$ do foco F_1, pertence à elipse $\mathcal{E}$.

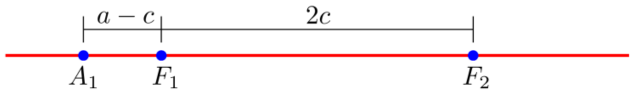


Fig. 7: Determinação da distância dos vértices aos focos da elipse.

• O segmento A_1A_2 é denominado **eixo focal** da elipse. O seu comprimento é $2a$.

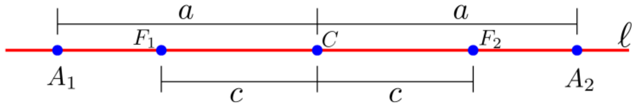


Fig. 8: Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse na reta focal.

• O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o **centro** da elipse. Esse ponto é, também, o ponto médio do segmento F_1F_2, delimitado pelos focos.

• A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal ℓ é a **reta não-focal**.

• A elipse intersecta a reta não-focal ℓ' em exatamente dois pontos, B_1 e B_2, denominados **vértices da elipse sobre a reta não-focal**.

De fato, como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2, temos que $\mathcal{B} \in \ell' \cap \mathcal{E}$ se, e somente se, $d(B, F_1) = d(B, F_2) = a$. Logo, pelo teorema de Pitágoras, temos que $\ell' \cap \mathcal{E}$ consiste de dois pontos, B_1 e B_2, em ℓ', que distam $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ do centro C da elipse.

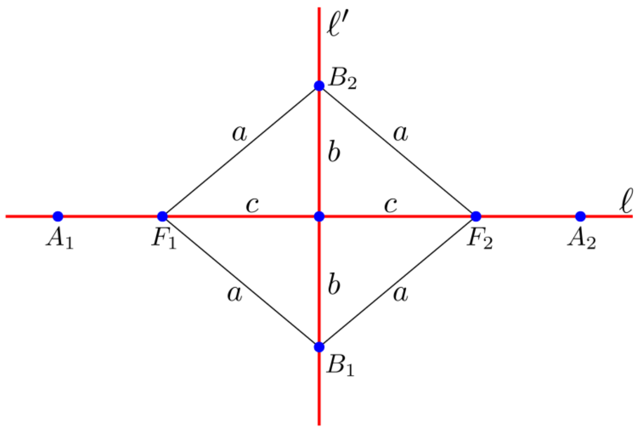


Fig. 9: Posicionamento dos focos, vértices e centro da elipse nas retas focal e não-focal.

• O segmento B_1B_2 é denominado **eixo não-focal** da elipse e seu comprimento é $2b$, onde $b^2 = a^2 - c^2$.

• O número $e = \dfrac{c}{a}$ é chamado a **excentricidade** da elipse. Note que $0 \le e < 1$.

• O número a é a distância do centro aos vértices sobre a reta focal, b é a distância do centro aos vértices sobre a reta não-focal e c é a distância do centro aos focos.

Observação 1

1. Se $c = 0$, a elipse se reduz ao círculo de centro C e raio a pois, nesse caso, $F_1 = F_2 = C$ e, portanto,

$$\boxed{\mathcal{E} = \{P \mid 2d(P,C) = 2a\} = \{P \mid d(P,C) = a\}}$$

Em particular, a excentricidade $e = 0$ se, e somente se, a elipse é um círculo.

2. Pela desigualdade triangular, temos que se $d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$ e $d(F_1,F_2) = 2c$, então $2c = d(F_1,F_2) \le d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a$. Isto é, $2c \le 2a$.

Além disso, $2c = 2a \iff d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a = 2c = d(F_1,F_2) \iff P \in F_1F_2$. Ou seja, se $c = a$, então

$$\{\, P \mid d(P,F_1) + d(P,F_2) = a \,\} = F_1F_2 .$$

Por isso, na definição da elipse, tomamos $2c < 2a$.

3. A elipse $\mathcal{E}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não-focal e ao centro.

De fato, se $P \in \mathcal{E}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então:

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q$$

e

$$\triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q\,.$$

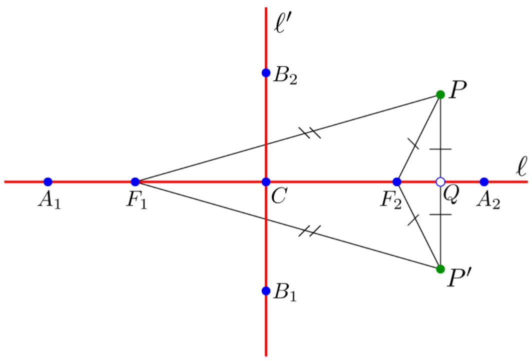


Fig. 10: Simetria da elipse em relação à reta focal.

Em particular, $F_1P \equiv F_1P'$ e $F_2P \equiv F_2P'$.

Logo,

$$2a = d(P,F_1) + d(P,F_2) = d(P',F_1) + d(P',F_2) \Longrightarrow P' \in \mathcal{E}\,.$$

A simetria em relação à reta não-focal se verifica de maneira análoga, usando congruência de triângulos.

Se $P \in \mathcal{E}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1$$

e

$$\triangle F_1CP \equiv \triangle P''CF_2\,.$$

Em particular, $F_1P \equiv F_2P''$ e $F_2P \equiv F_1P''$.

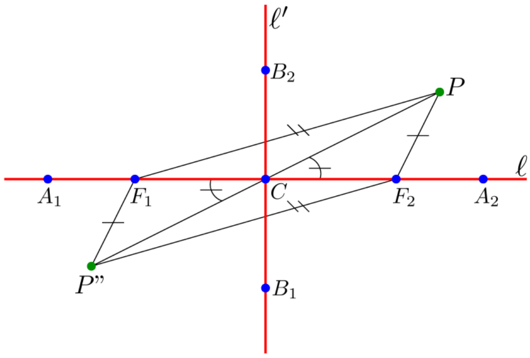


Fig. 11: Simetria da elipse em relação ao centro.

Portanto,

$$2a = d(P,F_1) + d(P,F_2) = d(P'',F_2) + d(P'',F_1) \Longrightarrow P'' \in \mathcal{E}\,.$$

3. Forma canônica da elipse

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano. Vamos obter a equação da elipse em relação a esse sistema de eixos para alguns casos especiais.

3.1. Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Nesse caso, temos $F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$, $A_1 = (-a,0)$, $A_2 = (a,0)$, $B_1 = (0,-b)$ e $B_2 = (0,b)$. Logo,

$$\begin{aligned}
& P = (x,y) \in \mathcal{E} \Longleftrightarrow d(P,F_1) + d(P,F_2) = 2a \\
\Longleftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2+y^2} + \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a \\
\Longleftrightarrow\ & \sqrt{(x+c)^2+y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2+y^2} \\
\Longleftrightarrow\ & (x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + (x-c)^2 + y^2 \\
\Longleftrightarrow\ & x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2} + x^2 - 2xc + c^2 + y^2 \\
\Longleftrightarrow\ & 4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2+y^2}
\end{aligned}$$

$$\iff a^2 - cx = a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$
$$\iff (a^2 - cx)^2 = a^2((x-c)^2 + y^2)$$
$$\iff a^4 - 2a^2cx + c^2x^2 = a^2(x^2 - 2xc + c^2 + y^2)$$
$$\iff (a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^4 - a^2c^2 = a^2(a^2 - c^2)$$
$$\iff b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$$
$$\iff \boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

Forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX.

3.2. Esboço da Elipse

Como $\dfrac{y^2}{b^2} = 1 - \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{a^2 - x^2}{a^2}$, temos que $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Consideremos o gráfico da função $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$.

Para $x = 0$ e $x = a$, temos, respectivamente, $y = b$ e $y = 0$. Além disso, para $x \in (0, a)$, temos $y' = -\dfrac{bx}{a\sqrt{a^2 - x^2}} < 0$, ou seja, a função é decrescente. Também, como $y'' = -\dfrac{ba}{(a^2 - x^2)^{3/2}} < 0$ para $x \in (0, a)$, a função é côncava. O gráfico da função é como na figura 12.

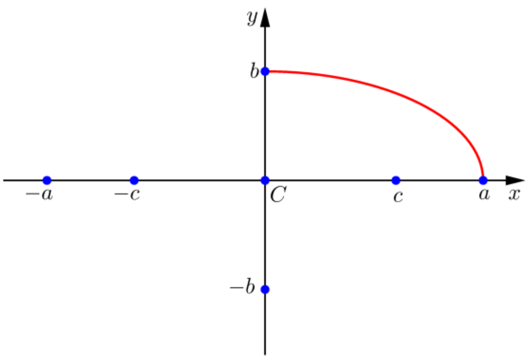


Fig. 12: Gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$, $x \in [0, a]$.

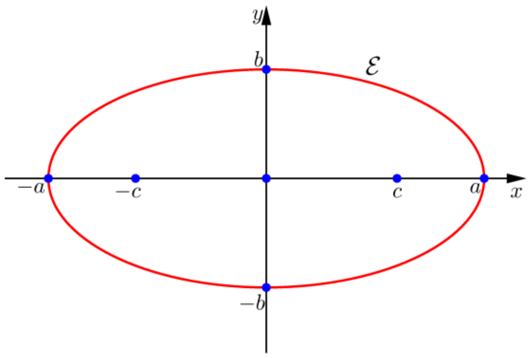


Fig. 13: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Como a elipse é simétrica em relação ao eixo$-OX$ (reta focal) e em relação ao eixo$-OY$ (reta não-focal), seu gráfico tem a forma mostrada na figura 13.

3.3. Elipse com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso, temos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

Desenvolvendo como no caso anterior verificamos que a equação da elipse é:

$$\boxed{\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1}$$

Forma canônica da elipse de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY.

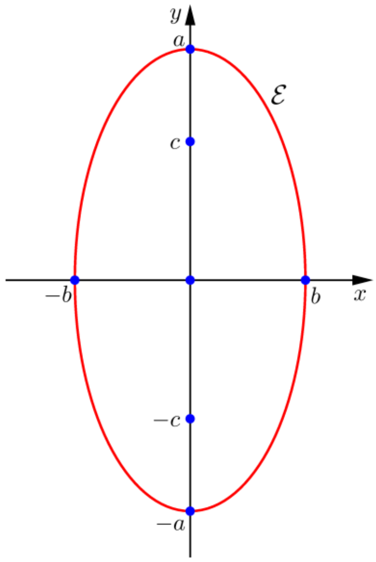


Fig. 14: Elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$.

Exemplo 1

Os vértices de uma elipse são os pontos $(4, 0)$ e $(-4, 0)$, e seus focos são os pontos $(3, 0)$ e $(-3, 0)$. Determine a equação da elipse.

Solução.
Como $F_1 = (-3, 0)$ e $F_2 = (3, 0)$, a reta focal é o eixo$-OX$, e $A_1 = (-4, 0)$ e $A_2 = (4, 0)$ são os vértices sobre a reta focal ℓ.
Então, $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = (0, 0)$ é o centro da elipse, $a = d(C, A_1) = d(C, A_2) = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4^2 - 3^2} = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$.

Logo, a equação da elipse é $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{7} = 1$. □

Exemplo 2

Dois vértices de uma elipse $\mathcal{E}$ são os pontos $(0, 6)$ e $(0, -6)$, e seus focos são os pontos $(0, 4)$ e $(0, -4)$. Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$.

Solução.
Temos $F_1 = (0, -4)$ e $F_2 = (0, 4)$. Então a reta focal (que contém os focos) é o eixo OY, os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (0, -6)$ e $A_2 = (0, 6)$,

e o centro da elipse $\mathcal{E}$ é a origem, pois $C = \dfrac{(0,4)+(0,-4)}{2} = (0,0)$. Como $a = d(C, A_1) = 6$ e $c = d(C, F_1) = 4$, temos que $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 16 = 20$.

Portanto, a equação da elipse é $\quad \mathcal{E} : \dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{36} = 1$. □

Exemplo 3

Os focos de uma elipse são os pontos $(2,0)$ e $(-2,0)$, e sua excentricidade é $\dfrac{2}{3}$. Determine a equação da elipse.

Solução.
Temos que a reta focal é o eixo OX, o centro da elipse é a origem $C = (0,0)$, $c = d(C, F_1) = 2$ e $e = \dfrac{2}{3} = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{a} \Longrightarrow a = 3$. Logo, $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 4 = 5$.

Portanto, a equação da elipse é $\quad \mathcal{E} : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$. □

Exemplo 4

Uma elipse $\mathcal{E}$ tem seu centro na origem e um de seus vértices sobre a reta focal é $(0,7)$. Se a elipse passa pelo ponto $\left(\sqrt{5}, \dfrac{14}{3}\right)$, determine sua equação, seus vértices, seus focos e sua excentricidade. Faça, também; um esboço da elipse.

Solução.
A reta focal, que contém o centro e o vértice dado, é o eixo OY. A distância do centro $C = (0,0)$ ao vértice $A_2 = (0,7)$ é $a = d(C, A_2) = 7$ e o outro vértice na reta focal é $A_1 = (0,-7)$.
Logo, a equação da elipse $\mathcal{E}$ é da forma:

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1,$$

ou seja,

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{7^2} = 1\,.$$

Como $\left(\sqrt{5}, \dfrac{14}{3}\right) \in \mathcal{E}$, temos $\dfrac{(\sqrt{5})^2}{b^2} + \dfrac{\left(\frac{14}{3}\right)^2}{49} = 1$, ou seja, $\dfrac{5}{b^2} + \dfrac{2^2\,7^2}{3^2\,7^2} = 1$.

Isto é, $\dfrac{5}{b^2} = 1 - \dfrac{4}{9} = \dfrac{5}{9}$. Assim, $b^2 = 9$ e a equação da elipse é $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{49} = 1$.

Como a reta não-focal é o eixo-OX e $b = 3$, os pontos $B_1 = (-3, 0)$ e $B_2 = (3, 0)$ são os vértices na reta não-focal.

Como $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{49 - 9} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$, os pontos $F_1 = (0, -2\sqrt{10})$ e $F_2 = (0, 2\sqrt{10})$ são os focos da elipse $\mathcal{E}$.

A excentricidade de $\mathcal{E}$ é $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2\sqrt{10}}{7}$. □

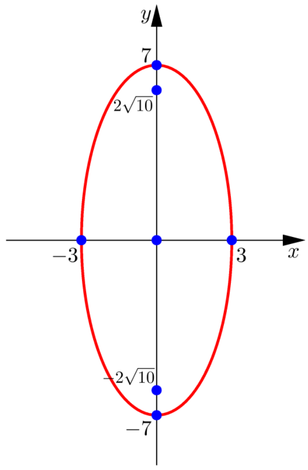


Fig. 15: Elipse $\mathcal{E} : \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{49} = 1$.

4. Translação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais e seja $\overline{O} = (x_0, y_0)$ um ponto no plano. Seja $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema cujos eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ são paralelos aos eixos OX e OY e têm, respectivamente, o mesmo sentido que esses eixos.

Sejam $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas do ponto P no sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ e sejam (x, y) as coordenadas de P no sistema de eixos OXY.

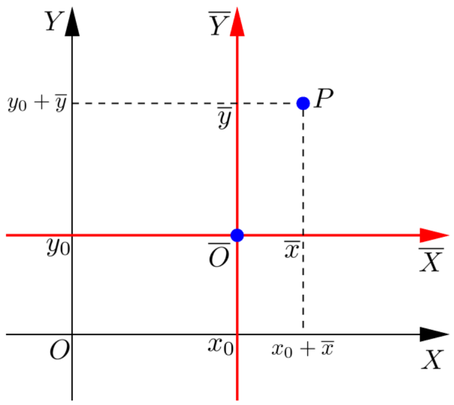


Fig. 16: $P = (\overline{x}, \overline{y})_{\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}} = (x_0 + \overline{x}, y_0 + \overline{y})_{OXY}$.

Então, as coordenadas do ponto P nos sistemas OXY e $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ são relacionadas por:

$$\boxed{\begin{cases} x = \overline{x} + x_0 \\ y = \overline{y} + y_0 \end{cases}}$$

Exemplo 5

Faça um esboço da curva

$$x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0\,.$$

Para isso, escreva a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do sistema de eixos $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, com origem $\overline{O} = (1,2)$, obtido transladando o sistema OXY para a origem $\overline{O}$.

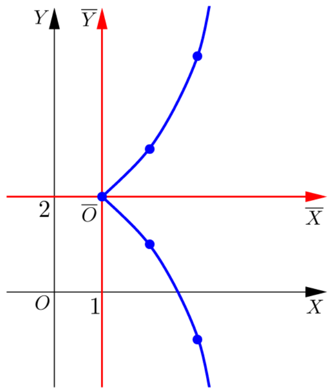


Fig. 17: Gráfico da curva $x^3 - 3x^2 - y^2 + 3x + 4y - 5 = 0$.

Solução.

Fazendo $x = \overline{x} + 1$ e $y = \overline{y} + 2$ na equação dada, obtemos:

$$(\overline{x}+1)^3 - 3(\overline{x}+1)^2 - (\overline{y}+2)^2 + 3(\overline{x}+1) + 4(\overline{y}+2) - 5 = 0\,.$$

Simplificando essa identidade, obtemos $\overline{x}^3 = \overline{y}^2$. Então, $\overline{y} = \pm\overline{x}^{3/2}$ e $\overline{x} \geq 0$. O esboço da curva é mostrado na figura 17. $\square$

5. Elipse com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

5.1. Caso I. Reta focal paralela ao eixo OX

Como o centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ pertence à reta focal, temos que $\ell : y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como $d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c$, onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, temos que $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Seja $P = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ um ponto pertencente à elipse, onde x, y são suas coordenadas no sistema OXY e $\overline{x}$, $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido transladando o sistema OXY para a origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Então, P pertence à elipse se, e somente se,

$$d(P, F_1) + d(P, F_2) = 2a \iff$$

$$d((\overline{x}+x_0, \overline{y}+y_0), (x_0 - c, y_0)) + d((\overline{x}+x_0, \overline{y}+y_0), (x_0 + c, y_0)) = 2a$$

$$\Longleftrightarrow d((\overline{x},\overline{y}),(-c,0)) + d((\overline{x},\overline{y}),(c,0)) = 2a$$
$$\Longleftrightarrow \frac{\overline{x}^2}{a^2} + \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \Longleftrightarrow \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Logo, **a forma canônica da equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OX é**

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2}$$

Os focos são $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ $F_2 = (x_0 + c, y_0)$; a reta focal é $\ell : y = y_0$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$; a reta não-focal é $\ell' : x = x_0$ e os vértices sobre a reta não-focal são $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$.

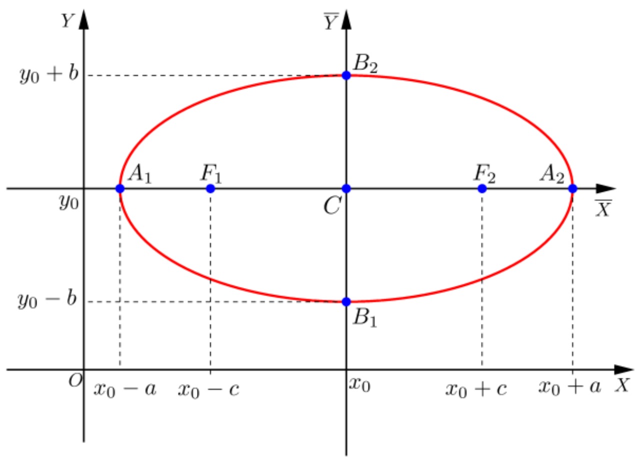


Fig. 18: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$

5.2. Caso II. Reta focal paralela ao eixo OY

Procedendo de maneira análoga ao caso anterior, pode-se verificar que **a forma canônica da equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e eixo focal paralelo ao eixo OY é:**

$$\boxed{\frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = a^2 - c^2}$$

Neste caso, os focos são $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ $F_2 = (x_0, y_0 + c)$; a reta focal é $\ell : x = x_0$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e

$A_2 = (x_0, y_0 + a)$; a reta não-focal é $\ell' : y = y_0$ e os vértices sobre a reta não-focal são $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$.

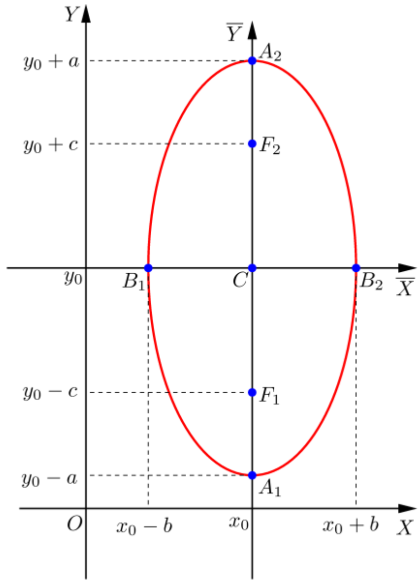


Fig. 19: Gráfico da elipse $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{b^2} + \frac{(y-y_0)^2}{a^2} = 1$.

Exemplo 6

Os focos de uma elipse $\mathcal{E}$ são $(3, 8)$ e $(3, 2)$, e o comprimento do seu eixo não-focal é 8. Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$, os seus vértices e a sua excentricidade.

Solução.

Como $F_1 = (3, 2)$ e $F_2 = (3, 8)$ são os focos da elipse, a reta focal de $\mathcal{E}$ é $\ell : x = 3$ (paralela ao eixo OY) e o centro de $\mathcal{E}$ é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (3, 5)$. Além disso, $2b = 8$, isto é, $b = 4$, $c = d(C, F_1) = d(C, F_2) = 3$ e $a^2 = b^2 + c^2 = 4^2 + 3^2 = 16 + 9 = 25$, isto é, $a = 5$. Portanto, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{5}$; $A_1 = (3, 0)$ e $A_2 = (3, 10)$ são os vértices de $\mathcal{E}$ sobre a reta focal; $\ell' : y = 5$ é a reta não-focal; $B_1 = (-1, 5)$ e $B_2 = (7, 5)$ são os vértices de $\mathcal{E}$ sobre a reta não-focal e

$$\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-5)^2}{25} = 1 .$$

é a equação da elipse. $\square$

Exemplo 7

A equação de uma elipse é

$$\mathcal{E} : x^2 + 4y^2 + 2x - 12y + 6 = 0.$$

Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$ na forma canônica, o seu centro, os seus vértices, os seus focos e a sua excentricidade.

Solução.

Completando os quadrados na equação de $\mathcal{E}$, temos:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E} : (x^2 + 2x) + 4(y^2 - 3y) = -6 \\
&\mathcal{E} : (x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - 3y + \frac{9}{4}\right) = -6 + 1 + 4 \cdot \frac{9}{4} = 4 \\
&\mathcal{E} : (x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 4 \\
&\mathcal{E} : \frac{(x+1)^2}{4} + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = 1\,,
\end{aligned}$$

sendo esta última equação a forma canônica de $\mathcal{E}$.

Dessa equação obtemos que o centro da elipse é $C = \left(-1, \frac{3}{2}\right)$, $a = 2$, $b = 1$ e, portanto, $c^2 = a^2 - b^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, ou seja $c = \sqrt{3}$.

A reta focal de $\mathcal{E}$ é $\ell : y = \frac{3}{2}$, paralela ao eixo OX, e a reta não-focal é a reta vertical $\ell' : x = -1$, paralela ao eixo$-OY$.

Os focos da elipse são $F_1 = \left(-1 - \sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$ e $F_2 = \left(-1 + \sqrt{3}, \frac{3}{2}\right)$; os vértices sobre a reta focal são $A_1 = \left(-1 - 2, \frac{3}{2}\right) = \left(-3, \frac{3}{2}\right)$ e $A_2 = \left(-1 + 2, \frac{3}{2}\right) = \left(1, \frac{3}{2}\right)$ e os vértices sobre a reta não-focal são $B_1 = \left(-1, \frac{3}{2} - 1\right) = \left(-1, \frac{1}{2}\right)$ e $B_2 = \left(-1, \frac{3}{2} + 1\right) = \left(-1, \frac{5}{2}\right)$.

Finalmente, a excentricidade de $\mathcal{E}$ é $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$. □

6. Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC > 0$

Consideremos a equação da elipse $\mathcal{E}$ de centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OX:

$$\mathcal{E} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 .$$

Desenvolvendo, obtemos a equação:

$$b^2x^2 + a^2y^2 - 2b^2x_0x - 2a^2y_0y + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0 ,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 ,$$

onde $A = b^2$, $B = 0$, $C = a^2$, $D = -2b^2x_0$, $E = -2a^2y_0$ e $F = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2$.

Então, **$B = 0$ e A e C têm o mesmo sinal**. O mesmo vale para a equação da elipse com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo OY.

Reciprocamente, temos:

Proposição 1

Suponha que os coeficientes A e C da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 , \qquad (1)$$

têm o mesmo sinal. Seja $M = C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2$.

Então, a equação (1) representa:

- *uma elipse com eixos paralelos aos eixos coordenados, se $M > 0$.*
- *um ponto, se $M = 0$.*
- *o conjunto vazio, se $M < 0$.*

Prova.

Dividindo a equação (1) por AC, obtemos:

$$\frac{x^2}{C} + \frac{y^2}{A} + \frac{D}{AC}x + \frac{E}{AC}y + \frac{F}{AC} = 0 ,$$

ou seja,

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y}{A} = -\frac{F}{AC}\,.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\frac{x^2 + \frac{D}{A}x + \frac{D^2}{4A^2}}{C} + \frac{y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{E^2}{4C^2}}{A} = -\frac{F}{AC} + \frac{D^2}{4A^2C} + \frac{E^2}{4AC^2}\,.$$

Isto é,

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{C} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{C^2D^2 + ACE^2 - 4AFC^2}{4A^2C^3} = \frac{M}{4A^2C^3}\,. \qquad (2)$$

Se $M = 0$, a equação (2) representa o ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, pois A e C têm o mesmo sinal.

Se $M \neq 0$, podemos escrever a equação (2) na forma

$$\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{\frac{M}{4A^2C^2}} + \frac{\left(y^2 + \frac{E}{2C}\right)^2}{\frac{M}{4ACC^2}} = 1\,. \qquad (3)$$

Como $AC > 0$, a equação (3) representa uma elipse de eixos paralelos aos eixos coordenados e centro no ponto $\left(-\frac{D}{2A}, -\frac{E}{2C}\right)$, se $M > 0$.

Se $M < 0$, a equação (3) representa o conjunto vazio, pois $\frac{M}{4A^2C^2} < 0$ e $\frac{M}{4ACC^2} < 0$. ■

Os casos em que a equação do segundo grau

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

com $AC > 0$, representa um ponto ou o conjunto vazio são chamados de **casos degenerados da elipse**.

Exemplo 8

Determine se as equações abaixo representam uma elipse ou uma elipse degenerada.

Caso seja uma elipse, determine seus principais elementos.

(a) $25x^2 + 9y^2 - 225 = 0$.

Solução.
Como $25x^2 + 9y^2 = 225$, obtemos, dividindo por 225, que a equação $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$ representa uma elipse com:

- $a = 5$, $b = 3$ e $c = \sqrt{25-9} = 4$.
- centro: $C = (0,0)$.
- reta focal: $\ell = \text{eixo} - OY : x = 0$.
- reta não-focal: $\ell' = \text{eixo} - OX : y = 0$.
- vértices sobre a reta focal: $A_1 = (0,-5)$ e $A_2 = (0,5)$.
- vértices sobre a reta não-focal: $B_1 = (-3,0)$ e $B_2 = (3,0)$.
- focos: $F_1 = (0,-4)$ e $F_2 = (0,4)$. □

(b) $4x^2 + 9y^2 - 40x + 36y + 100 = 0$.

Solução.
Completando o quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} & 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 + 4y) = -100 \\ \Longleftrightarrow\ & 4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 + 4y + 4) = -100 + 4 \cdot 25 + 9 \cdot 4 \\ \Longleftrightarrow\ & 4(x-5)^2 + 9(y+2)^2 = 36 \\ \Longleftrightarrow\ & \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{4} = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, a equação representa uma elipse com:

- $a = 3$, $b = 2$ e $c = \sqrt{9-4} = \sqrt{5}$.
- centro: $C = (5,-2)$.
- reta focal: $\ell : y = -2$, paralela ao eixo$-OX$.
- reta não-focal: $\ell' : x = 5$, paralela ao eixo$-OY$.
- vértices sobre a reta focal: $A_1 = (2,-2)$ e $A_2 = (8,-2)$.
- vértices sobre a reta não-focal: $B_1 = (5,-4)$ e $B_2 = (5,0)$.
- focos: $F_1 = (5-\sqrt{5},-2)$ e $F_2 = (5+\sqrt{5},-2)$. □

(c) $36x^2 + 9y^2 - 108x + 6y + 82 = 0$.

Solução.
Completando o quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 36(x^2 - 3x) + 9\left(y^2 + \frac{6}{9}y\right) = -82 \\
\iff\ & 36\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + 9\left(y^2 + \frac{2}{3}y + \frac{1}{9}\right) = -82 + 36 \cdot \frac{9}{4} + 9 \cdot \frac{1}{9} \\
\iff\ & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = -82 + 81 + 1 \\
\iff\ & 36\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + 9\left(y + \frac{1}{3}\right)^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Apenas o ponto $\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}\right)$ satisfaz a equação dada, isto é, a equação representa um ponto. □

(d) $9x^2 + 4y^2 + 18x - 9y + 25 = 0$.

Solução.
Completando o quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned}
& 9(x^2 + 2x) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y\right) = -25 \\
\iff\ & 9(x^2 + 2x + 1) + 4\left(y^2 - \frac{9}{4}y + \frac{81}{64}\right) = -25 + 9 \cdot 1 + 4 \cdot \frac{81}{64} \\
\iff\ & 9(x + 1)^2 + 4\left(y - \frac{9}{8}\right)^2 = -16 + 4 \cdot \frac{81}{16} = -\frac{175}{16}\,.
\end{aligned}$$

Como $-\frac{175}{16} < 0$, não existe nenhum ponto do plano que satisfaz a equação, isto é, a equação representa o conjunto vazio. □

Exemplo 9

Dizemos que uma reta r é **tangente** a uma elipse $\mathcal{E}$ num ponto P se r intersecta $\mathcal{E}$ só nesse ponto, isto é, se $r \cap \mathcal{E} = \{P\}$.

Mostre que a reta r tangente à elipse $\mathcal{E} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ em um ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ tem por equação

$$\boxed{r : x_0b^2x + y_0a^2y = a^2b^2}$$

Solução.
Consideremos a reta r tangente à elipse $\mathcal{E}$ no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{E}$:

$$r : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

Então $Q = (x_0 + mt, y_0 + nt) \in \mathcal{E} \cap r$ se, e somente se,

$$
\begin{aligned}
& b^2(mt + x_0)^2 + a^2(nt + y_0)^2 = a^2b^2 \\
\iff\ & b^2(m^2t^2 + 2x_0mt + x_0^2) + a^2(n^2t^2 + 2y_0nt + y_0^2) = a^2b^2 \\
\iff\ & (b^2m^2 + a^2n^2)t^2 + (2x_0mb^2 + 2y_0na^2)t + b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0
\end{aligned}
$$

Como

$$b^2x_0^2 + a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

já que $P \in \mathcal{E}$, temos que

$$Q = (x_0 + mt, y_0 + nt) \in \mathcal{E} \cap r$$

se, e somente se,

$$t\left[(b^2m^2 + a^2n^2)t + (2x_0mb^2 + 2y_0na^2)\right] = 0\,.$$

Sendo $b^2m^2+a^2n^2 > 0$ e como $r\cap\mathcal{E}$ consiste de um único ponto, temos:

$$2x_0mb^2 + 2y_0na^2 = 0,$$

ou seja, $(m,n) \perp (2x_0b^2, 2y_0a^2)$. Logo, o vetor (x_0b^2, y_0a^2) é perpendicular a r, isto é,

$$r : b^2x_0x + a^2y_0y = b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2,$$

já que $P = (x_0, y_0) \in r$ e $b^2x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2b^2$. □

Exemplo 10

Determine as equações cartesianas das retas tangentes à elipse

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1,$$

que passam pelo ponto $Q = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Solução.

Sendo $a^2 = 20$ e $b^2 = 5$ temos, pelo exercício anterior, que a reta tangente à elipse $\mathcal{E}$ que passa por Q tem a forma $r : b^2x_0x+a^2y_0y = a^2b^2$, ou seja, $r : 5x_0x + 20y_0y = 100$, onde $P = (x_0, y_0)$ é o ponto de tangência.

Como $Q = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right) \in r$, temos que:

$$5x_0 \cdot \frac{10}{3} + 20y_0 \cdot \frac{5}{3} = 100 \iff 50x_0 + 100y_0 = 300 \iff x_0 = 6 - 2y_0\,.$$

Além disso, $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{E}$, isto é, $5x_0^2 + 20y_0^2 = 100$. Logo,

$$\begin{aligned} 5(6-2y_0)^2+20y_0^2=100 &\iff 5(36-24y_0+4y_0^2)+20y_0^2=100 \\ &\iff 180-120y_0+20y_0^2+20y_0^2=100 \\ &\iff 40y_0^2-120y_0+80=0 \\ &\iff y_0^2-3y_0+2=0 \iff y_0=1 \quad \text{ou} \quad y_0=2. \end{aligned}$$

Se $y_0 = 1$, então $x_0 = 6-2y_0 = 4$ e $r : 20x+20y = 100$, ou seja, $r_1 : x+y = 5$ é a reta tangente a $\mathcal{E}$ no ponto $(4,1)$ que passa pelo ponto $Q = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$.

Se $y_0 = 2$, então $x_0 = 6-2y_0 = 2$ e $r : 10x+40y = 100$, ou seja $r_2 : x+4y = 10$ é a reta tangente a $\mathcal{E}$ no ponto $(2,2)$ que passa pelo ponto $Q = \left(\frac{10}{3}, \frac{5}{3}\right)$. □

7. Exercícios de revisão

1. Determine a equação da elipse sabendo que:

(a) é centrada no ponto $(1,-1)$, tem um foco no ponto $(2,-1)$ e passa pelo ponto $(2,1)$.

(b) é centrada no ponto $(1,2)$, tem um vértice no ponto $(3,2)$ e sua excentricidade é $\frac{1}{2}$.

2. Considere a elipse de centro $(1,1)$, foco $(3,2)$ e excentricidade $\frac{\sqrt{5}}{3}$. Determine:

(a) as coordenadas dos vértices e do outro foco da elipse.

(b) a equação cartesiana da elipse e faça um esboço.

3. Determine a equação do círculo:

(a) que passa pelos pontos $(1,2)$, $(2,1)$ e $(-1,1)$.

(b) circunscrito ao triângulo de vértices $(7,3)$, $(2,8)$ e $(5,7)$.

(c) concêntrico ao círculo $4x^2+4y^2-16x+20y+25=0$ e tangente à reta $5x-12y=1$.

(d) que tem seu centro sobre a reta $4x - 5y = 3$ e é tangente às retas $2x - 3y = 10$ e $3x - 2y = -5$.

(e) que tem centro $(3, -1)$ e determina sobre a reta $2x - 5y + 18 = 0$ uma corda de comprimento 6.

4. O ponto $(3, 1)$ é um vértice de uma elipse $\mathcal{E}$ cujos focos se acham sobre a reta $y + 6 = 0$. Determine a equação de $\mathcal{E}$ sabendo que sua excentricidade é $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

5. Determine os pontos da elipse $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ cuja distância ao foco que se acha sobre o semi-eixo OX positivo seja igual a 14.

6. Determine a equação da família de elipses com centro $(2, 3)$, reta focal paralela ao eixo-OX e excentricidade $\frac{1}{2}$.

7. Determine a equação da elipse que passa por $(1, 3)$, $(-1, 4)$, $\left(0, 3 - \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ e $(-3, 3)$, sabendo que seus eixos são paralelos aos eixos coordenados.

8. Verifique que a equação da reta tangente à elipse $\mathcal{E} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ em um ponto $(x_0, y_0) \in \mathcal{E}$ é $b^2x_0x + a^2y_0y = a^2b^2$.

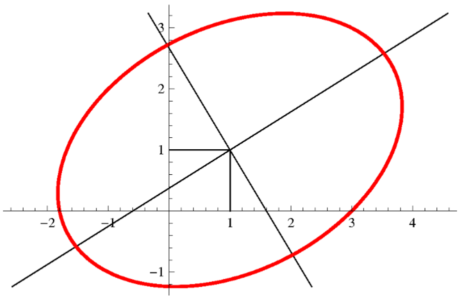
9. Mostreque as retas tangentes aos pontos extremos de um diâmetro de uma elipse são paralelas.

10. Determine as equações das retas tangentes à elipse $\frac{x^2}{20} + \frac{y^2}{5} = 1$ que passam pelo ponto $\left(\frac{10}{3}, 5\frac{5}{3}\right)$.

7.1. Respostas

1. (a) $\frac{(x-1)^2}{3+\sqrt{2}} + \frac{(y+1)^2}{2+\sqrt{2}} = 1$. (b) $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{3(y-2)^2}{16} = 1$ ou $\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$.

2. (a) $\left(1+\frac{6}{\sqrt{5}}, 1+\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(1-\frac{6}{\sqrt{5}}, 1-\frac{3}{\sqrt{5}}\right)$ são os vértices sobre a reta focal; $(-1,0)$ é o outro foco; $\left(1-\frac{2}{\sqrt{5}}, 1+\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ e $\left(1+\frac{2}{\sqrt{5}}, 1-\frac{4}{\sqrt{5}}\right)$ são os vértices sobre a reta não focal. (b) $5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y - 27 = 0$. O esboço da elipse é mostrado na figura, abaixo:



3. (a) $\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$. (b) $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 25$. (c) $(x-2)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 = 9$. (d) $(x+8)^2 + (y+7)^2 = \frac{25}{13}$ e $(x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{81}{13}$. (e) $(x-3)^2 + (y+1)^2 = 38$.

4. $\mathcal{E} : \frac{(x-3)^2}{50} + \frac{(y+6)^2}{25} = 1$.

5. $(-5, 3\sqrt{3})$ e $(-5, -3\sqrt{3})$.

6. $\mathcal{E}_\lambda : \frac{(x-2)^2}{\lambda^2} + \frac{4(y-3)^2}{3\lambda^2} = 1$, onde $\lambda > 0$ é o parâmetro da família.

7. $\frac{(x+1)^2}{4} + (y-3)^2 = 1$.

8. Desenvolver a condição de a reta tangente intersectar a elipse apenas em um ponto.

9. Sejam (x_0, y_0) e $(-x_0, -y_0)$ os pontos extremos de um diâmetro da elipse $\mathcal{E} : b^2x^2 + a^2y^2 = a^2y^2$. A reta r tangente a $\mathcal{E}$ no ponto (x_0, y_0) é paralela à reta que passa pela origem e pelo ponto $(a^2y_0, -b^2x_0)$ e a reta s tangente a $\mathcal{E}$ em $(-x_0, -y_0)$ é paralela à reta que passa pela origem e pelo ponto $(-a^2y_0, b^2x_0)$. Logo r e s são paralelas.

10. $x + y = 5$ e $4y + x = 10$

Capítulo 8

Curvas cônicas II: hipérbole

Neste Capítulo continuamos com o nosso estudo da equação

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

no caso em que A e C têm sinais contrários.

1. Hipérbole

Definição 1

Uma **hipérbole**, $\mathcal{H}$, de **focos** F_1 e F_2, é o conjunto do plano que consiste de todos os pontos P tais que o módulo da diferença das distâncias a F_1 e F_2 é igual a uma constante $2a > 0$, menor do que a distância entre os focos $2c \geq 0$.

$$\boxed{\begin{array}{c} \mathcal{H} = \{\, P \mid |\, d(P, F_1) - d(P, F_2)\,| = 2a \,\} \\ 0 \leq a < c\,; \quad d(F_1, F_2) = 2c \end{array}}$$

Observação 1

Para todo ponto P do plano, temos que

$$\boxed{|d(P, F_1) - d(P, F_2)| \leq d(F_1, F_2)}$$

e a igualdade ocorre se, e somente se, P pertence à semi-reta de origem

F_1 que não contém F_2, ou à semi-reta de origem F_2 que não contém F_1. Em particular, como $2a < 2c$, *nenhum ponto sobre essas semi-retas pertence à hipérbole $\mathcal{H}$*.

Fig. 1: Semi-retas que contêm apenas um dos focos.

De fato, pela desigualdade triangular, temos que

$$d(P,F_1) \le d(P,F_2) + d(F_2,F_1),$$

e

$$d(P,F_2) \le d(P,F_1) + d(F_1,F_2).$$

Logo,

$$-d(F_1,F_2) \le d(P,F_1) - d(P,F_2) \le d(F_1,F_2)\,,$$

ou seja,

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| \le d(F_1,F_2)\,.$$

Além disso, temos que

$$|d(P,F_1) - d(P,F_2)| = d(F_1,F_2)$$

se, e só se,

$$d(P,F_1) - d(P,F_2) = d(F_1,F_2)\,,$$

ou seja,

$$d(P,F_1) = d(P,F_2) + d(F_1,F_2) \ \ \textbf{ou} \ \ d(P,F_1) - d(P,F_2) = -d(F_1,F_2)\,,$$

isto é,

$$d(P,F_2) = d(P,F_1) + d(F_1,F_2)\,.$$

Se $d(P,F_1) = d(P,F_2) + d(F_2,F_1)$, temos que $F_2 \in F_1P$, ou seja, P pertence à semi-reta de origem F_2 que não contém F_1.

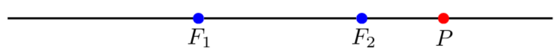


Fig. 2: F_2 entre F_1 e P.

Se $d(P,F_2) = d(P,F_1) + d(F_1,F_2)$, temos que $F_1 \in PF_2$, isto é, P pertence à semi-reta de origem F_1 que não contém F_2.

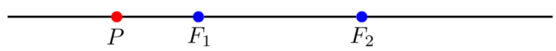


Fig. 3: F_1 entre P e F_2.

Por isso, tomamos $c > a$ na definição da hipérbole, pois se $c < a$ e $d(F_1, F_2) = 2c$, o conjunto

$$\{P \mid |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a\}$$

representaria o conjunto vazio, e se $c = a$, o conjunto acima representaria a união da semi-reta de origem F_1 que não contém F_2 com a semi-reta de origem F_2 que não contém F_1.

Terminologia

• Os pontos F_1 e F_2 são os **focos** da hipérbole.

• A reta ℓ que contém os focos é a **reta focal** (Fig. 1).

• A intersecção da hipérbole com a reta focal ℓ consiste de exatamente dois pontos, A_1 e A_2, chamados **vértices** da hipérbole. De fato, pela observação 1, temos que se $A \in \mathcal{H} \cap \ell$, então $A \in F_1F_2$. Seja $A_1 \in F_1F_2 \cap \mathcal{H}$ tal que $d(A_1, F_1) = x$.

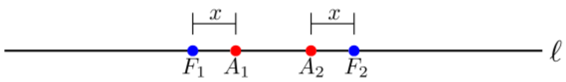


Fig. 4: Posicionamento dos vértices em relação aos focos da hipérbole na reta focal.

Como $d(F_1, F_2) = 2c$, temos

$$\begin{aligned} |d(A_1, F_1) - d(A_1, F_2)| = 2a &\iff |x - (2c - x)| = 2a \iff |2x - 2c| = 2a \\ &\iff 2c - 2x = 2a \iff x = c - a\,. \end{aligned}$$

Logo o ponto A_1 de F_1F_2 distante $c - a$ de F_1 pertence à hipérbole.

Analogamente, temos que o ponto A_2 de F_1F_2 distante $c - a$ de F_2 pertence à hipérbole $\mathcal{H}$

• O segmento A_1A_2 é denominado **eixo focal** da hipérbole e seu comprimento é $d(A_1, A_2) = 2a$.

• O ponto médio C do eixo focal A_1A_2 é o **centro** da hipérbole. Esse ponto é, também, o ponto médio do segmento F_1F_2, delimitado pelos focos: $C = \dfrac{A_1 + A_2}{2} = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$.

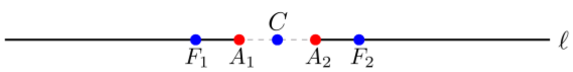


Fig. 5: Posicionamento dos focos, vértices e centro da hipérbole na reta focal.

Observe que $d(C, F_1) = d(C, F_2) = c$ e $d(C, A_1) = d(C, A_2) = a$.

• A reta ℓ' que passa pelo centro C e é perpendicular à reta focal ℓ é a **reta não-focal** da hipérbole. Como ℓ' é a mediatriz do segmento F_1F_2, a hipérbole não intersecta a reta não-focal ℓ', pois se $P \in \ell'$, temos $|d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 0 \neq 2a$.

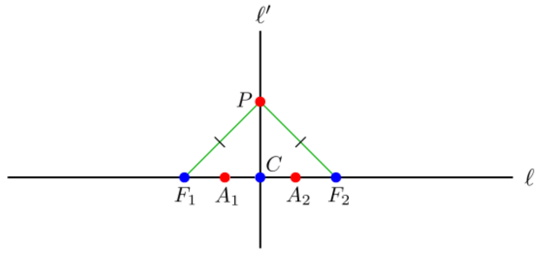


Fig. 6: Pontos do eixo não-focal não pertencem à hipérbole.

• O segmento B_1B_2 perpendicular ao eixo focal que tem C como ponto médio e comprimento $2b$, onde $b^2 = c^2 - a^2$, é denominado **eixo não-focal** da hipérbole, e B_1 e B_2 são os vértices imaginários da hipérbole

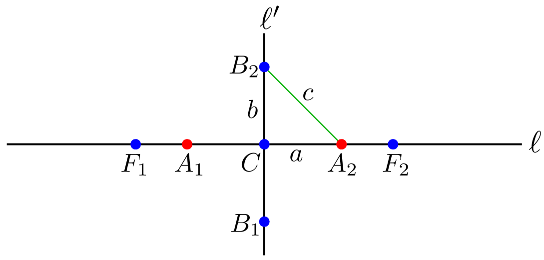


Fig. 7: Relação dos comprimentos a, b e c.

• O número $e = \dfrac{c}{a}$ é chamado a **excentricidade** da hipérbole. Note que $e > 1$, pois $c > a$.

• O **retângulo de base** da hipérbole $\mathcal{H}$ é o retângulo que tem os pontos A_1, A_2, B_1 e B_2 como pontos médios de seus lados e as retas que contêm as diagonais do retângulo de base da hipérbole $\mathcal{H}$ são as **assíntotas** de $\mathcal{H}$.

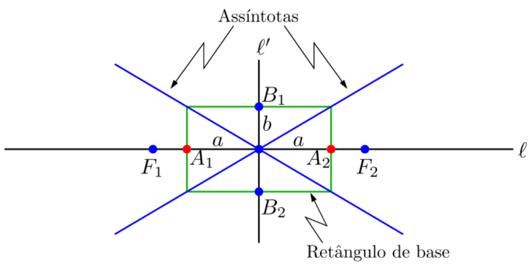


Fig. 8: Retângulo de base e assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$.

Portanto as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$ são as retas que passam pelo centro da hipérbole e tem inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação à reta focal.

Pelo Teorema de Pitágoras, as diagonais do retângulo de base de $\mathcal{H}$ têm comprimento $2c$ e a distância do centro de $\mathcal{H}$ a qualquer vértice do retângulo de base é igual a c.

• Dizemos que uma hipérbole é **equilátera** se o comprimento do eixo focal é igual ao comprimento do eixo não-focal, isto é, $a = b$.

Então, o retângulo de base de uma hipérbole equilátera é, na realidade, um quadrado. Em particular, as retas que contêm as suas diagonais, isto é, suas assíntotas, intersectam-se perpendicularmente.

• Duas hipérboles tais que o eixo focal de cada uma é igual ao eixo não-focal da outra são denominadas **hipérboles conjugadas**. Como os retângulos de base de duas hipérboles conjugadas são iguais, elas têm o mesmo centro, mesmas assíntotas e os focos a uma mesma distância do centro.

Observação 2

1. A hipérbole $\mathcal{H}$ é simétrica em relação à reta focal, à reta não-focal e ao centro.

De fato, se $P \in \mathcal{H}$ e P' é o simétrico de P em relação à reta focal, então

$$\triangle F_2PQ \equiv \triangle F_2P'Q$$

e

$$\triangle F_1PQ \equiv \triangle F_1P'Q\,.$$

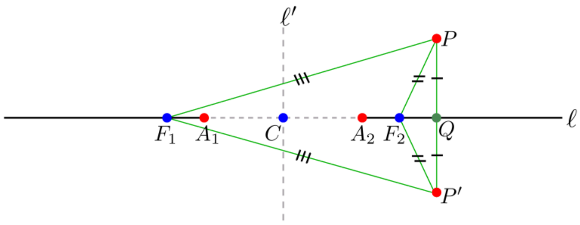


Fig. 9: Simetria da hipérbole em relação à reta focal.

Em particular, $F_2P \equiv F_2P'$ e $F_1P \equiv F_1P'$. Logo

$$2a = |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |d(P',F_1) - d(P',F_2)| \Longrightarrow P' \in \mathcal{H}\,.$$

A simetria em relação à reta não-focal se verifica de maneira análoga, usando congruência de triângulos.

Se $P \in \mathcal{H}$ e P'' é o simétrico de P em relação ao centro, então

$$\triangle PCF_2 \equiv \triangle P''CF_1$$

e

$$\triangle F_1CP \equiv \triangle P''CF_2\,.$$

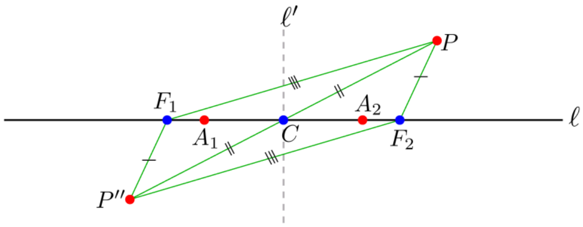


Fig. 10: Simetria da hipérbole em relação ao centro.

Em particular, $F_2P \equiv F_1P''$ e $F_1P \equiv F_2P''$. Logo,

$$2a = |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = |d(P'',F_2) - d(P'',F_1)| \Longrightarrow P'' \in \mathcal{H}\,.$$

2. Forma canônica da hipérbole

Vamos obter a equação da hipérbole em relação a um sistema de eixos ortogonais OXY em alguns casos especiais.

2.1. Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OX

Nesse caso, $F_1 = (-c,0)$, $F_2 = (c,0)$, $A_1 = (-a,0)$, $A_2 = (a,0)$, $B_1 = (0,-b)$, $B_2 = (0,b)$ e $C = (0,0)$. Logo,

$$P = (x,y) \in \mathcal{H} \iff |d(P,F_1) - d(P,F_2)| = 2a$$

$$\iff \begin{cases} d(P,F_1) - d(P,F_2) = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ d(P,F_1) - d(P,F_2) = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a & \text{(ramo direito de } \mathcal{H}) \\ \text{ou} \\ \sqrt{(x+c)^2+y^2} - \sqrt{(x-c)^2+y^2} = -2a & \text{(ramo esquerdo de } \mathcal{H}). \end{cases}$$

Continuando o desenvolvimento de maneira análoga ao caso da elipse, e lembrando que $b^2 = c^2 - a^2$, chegamos a:

$$P = (x,y) \in \mathcal{H} \iff (c^2-a^2)x^2 - a^2y^2 = a^2(c^2-a^2) \iff b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2\,.$$

Portanto, $P = (x,y) \in \mathcal{H}$ se, e somente se, as coordenadas x e y satisfazem a equação

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1},$$

chamada **forma canônica da equação da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo**$-OX$.

As assíntotas dessa hipérbole são as retas que passam pela origem (centro) e têm inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$ em relação ao eixo$-OX$ (reta focal). Logo, as assíntotas são as retas $y = \pm\dfrac{b}{a}x$, ou seja,

$$bx - ay = 0 \qquad \text{e} \qquad bx + ay = 0\,.$$

2.2. Esboço da Hipérbole

Como $\dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{x^2}{a^2} - 1 = \dfrac{x^2 - a^2}{a^2}$, temos que $y = \pm\dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, onde $x \geq a$ ou $x \leq -a$.

Sendo $y' = \dfrac{bx}{a\sqrt{x^2 - a^2}} > 0$ (crescente) e $y'' = \dfrac{-ab}{(x^2 - a^2)^{3/2}} < 0$ (côncava), para todo $x \in (a, +\infty)$, temos que o gráfico da função $y = \dfrac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a, +\infty)$ é da forma:

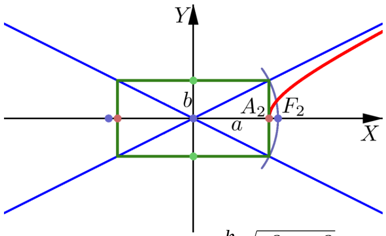


Fig. 11: Gráfico da função $y = \frac{b}{a}\sqrt{x^2 - a^2}$, $x \in [a, +\infty]$.

Pela simetria da hipérbole em relação ao eixo$-OX$ (reta focal) e em relação ao eixo$-OY$ (reta não-focal), obtemos o seu gráfico:

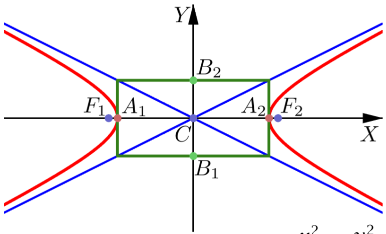


Fig. 12: Gráfico da hipérbole $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Podemos, agora, explicar o porquê do nome **assíntota** para as retas que contêm as diagonais do retângulo de base.

Sejam $P = (x, y)$ um ponto da hipérbole, isto é, $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, e $r_+ : bx - ay = 0$ uma de suas assíntotas. Então,

$$\begin{aligned} d(P, r_+) &= \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} = \frac{|bx - ay|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{|bx + ay|}{|bx + ay|} \\ &= \frac{|b^2x^2 - a^2y^2|}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{|bx + ay|} \\ &= \frac{a^2b^2}{\sqrt{b^2 + a^2}} \cdot \frac{1}{|bx + ay|}. \end{aligned}$$

Logo $d(P, r_+) \to 0$, quando $\begin{cases} x \to +\infty \\ y \to +\infty \end{cases}$ ou $\begin{cases} x \to -\infty \\ y \to -\infty \end{cases}$.

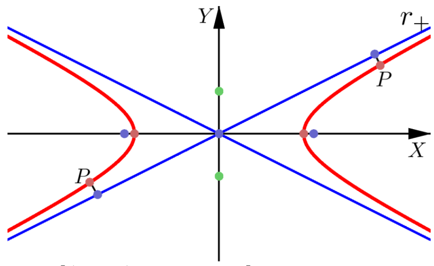


Fig. 13: $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \pm\infty$.

De modo análogo, podemos verificar que $d(P, r_-) \to 0$, quando $x \to +\infty$ e $y \to -\infty$ ou $x \to -\infty$ e $y \to +\infty$, onde $P = (x, y) \in \mathcal{H}$ e $r_- : bx + ay = 0$ é a outra assíntota da hipérbole.

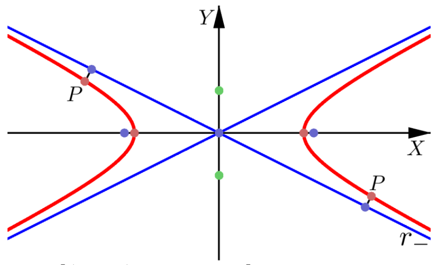


Fig. 14: $d(P, r_+) \to 0$, quando $x \to \pm\infty$ e $y \to \mp\infty$.

2.3. Hipérbole com centro na origem e reta focal coincidente com o eixo OY

Neste caso, temos $F_1 = (0, -c)$, $F_2 = (0, c)$, $A_1 = (0, -a)$, $A_2 = (0, a)$, $B_1 = (-b, 0)$ e $B_2 = (b, 0)$.

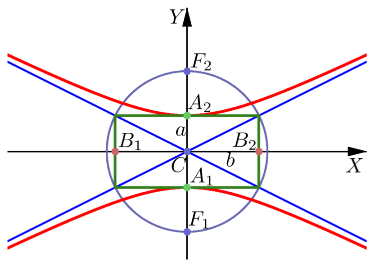


Fig. 15: Hipérbole $\mathcal{H} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Procedendo como no caso anterior, obtemos que a equação da hipérbole é:

$$\boxed{\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1}$$

Forma canônica da hipérbole de centro na origem e reta focal coincidente com o eixo−OY.

onde $b^2 = c^2 - a^2$.

Neste caso, as assíntotas são as retas $x = \pm \frac{b}{a} y$, ou seja,

$$ax - by = 0 \qquad \text{e} \qquad ax + by = 0.$$

3. Hipérbole com centro no ponto $\overline{O} = (x_0, y_0)$

3.1. Caso I. Reta focal paralela ao eixo$-OX$

Como o centro $\overline{O} = (x_0, y_0)$ pertence à reta focal, temos que $\ell : y = y_0$ é a equação cartesiana da reta focal.

Além disso, como

$$d(F_1, \overline{O}) = d(F_2, \overline{O}) = c,$$

onde F_1 e F_2 são os focos da elipse, temos que $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

Seja $P = (\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0)$ um ponto pertencente à hipérbole, onde

$$x = \overline{x} + x_0\,, \quad y = \overline{y} + y_0\,,$$

são suas coordenadas no sistema OXY e $\overline{x}$, $\overline{y}$ são suas coordenadas no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido transladando o sistema OXY para a origem $\overline{O} = (x_0, y_0)$.

Então, P pertence à hipérbole se, e somente se,

$$\begin{aligned}
& |d(P, F_1) - d(P, F_2)| = 2a \\
\iff & |d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 - c, y_0)) - d((\overline{x} + x_0, \overline{y} + y_0), (x_0 + c, y_0))| = 2a \\
\iff & |d((\overline{x}, \overline{y}), (-c, 0)) - d((\overline{x}, \overline{y}), (c, 0))| = 2a \\
\iff & \frac{\overline{x}^2}{a^2} - \frac{\overline{y}^2}{b^2} = 1 \iff \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OX$** é

$$\boxed{\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1}$$

onde $b^2 = c^2 - a^2$.

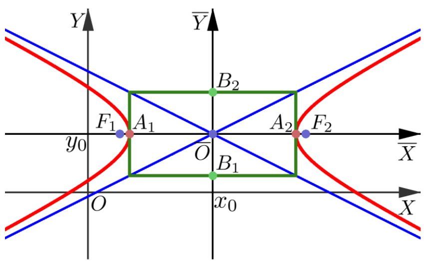


Fig. 16: $\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,.$

Os focos são $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ $F_2 = (x_0 + c, y_0)$; a reta focal é $\ell : y = y_0$; os vértices são $A_1 = (x_0 - a, y_0)$ e $A_2 = (x_0 + a, y_0)$; a reta não-focal é $\ell' : x = x_0$; os vértices imaginários são $B_1 = (x_0, y_0 - b)$ e $B_2 = (x_0, y_0 + b)$, e as assíntotas são as retas $b(x - x_0) - a(y - y_0) = 0$ e $b(x - x_0) + a(y - y_0) = 0$.

3.2. Caso II. Reta focal paralela ao eixo$-OY$

Procedendo como no caso anterior, se verifica que **a forma canônica da equação da hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OY$ é**

$$\boxed{\frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1\,, \quad \text{onde} \quad b^2 = c^2 - a^2}$$

Neste caso, os focos são $F_1 = (x_0, y_0 - c)$ $F_2 = (x_0, y_0 + c)$; a reta focal é $\ell : x = x_0$; $A_1 = (x_0, y_0 - a)$ e $A_2 = (x_0, y_0 + a)$ são os vértices; a reta não focal é $\ell' : y = y_0$; $B_1 = (x_0 - b, y_0)$ e $B_2 = (x_0 + b, y_0)$ são os vértices imaginários, e as assíntotas são as retas $a(x - x_0) - b(y - y_0) = 0$ e $a(x - x_0) + b(y - y_0) = 0$.

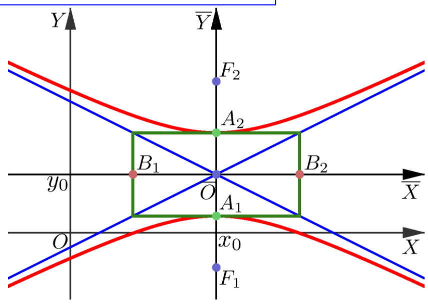


Fig. 17: $\mathcal{H} : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1\,.$

4. Equação do segundo grau com $B = 0$ e $AC < 0$.

Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole com centro no ponto (x_0, y_0) e reta focal paralela ao eixo$-OX$:

$$\mathcal{H} : \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1\,.$$

Desenvolvendo, obtemos

$$b^2x^2 - a^2y^2 - 2x_0b^2x + 2y_0a^2y + x_0^2b^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

onde

$$A = b^2, \quad B = 0, \quad C = -a^2,$$

$$D = -2x_0b^2, \quad E = 2y_0a^2, \quad F = x_0^2b^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2.$$

Em particular, **os coeficientes A e C têm sinais opostos e $B = 0$**. Podemos verificar que o mesmo ocorre quando desenvolvemos a equação da hipérbole de reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 1

Se os coeficientes A e C na equação

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (\star)$$

têm sinais opostos, então a equação representa:

- *uma hipérbole de eixos paralelos aos eixos coordenados;*

ou

- *um par de retas concorrentes.*

Prova.

Suponhamos que $A > 0$ e $C < 0$. Então,

$$\begin{aligned}
&Ax^2 + Dx - (-Cy^2 - Ey) = -F\,,\\
&\frac{\left(x^2 + \frac{D}{A}x\right)}{-C} - \frac{\left(y^2 + \frac{E}{C}y\right)}{A} = \frac{F}{AC}\,,\\
&\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{F}{AC} - \frac{D^2}{4A^2C} - \frac{E^2}{4AC^2}\,,\\
&\frac{\left(x + \frac{D}{2A}\right)^2}{-C} - \frac{\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2}{A} = \frac{4ACF - CD^2 - AE^2}{4A^2C^2}\,,
\end{aligned}$$

Logo a equação $(\star)$ representa uma hipérbole com eixos paralelos aos eixos coordenados se $4ACF - CD^2 - AE^2 \neq 0$, e $(\star)$ representa o par de retas concorrentes

$$y + \frac{E}{2C} = \pm\sqrt{\frac{-A}{C}}\left(x + \frac{D}{2A}\right),$$

se $4ACF - CD^2 - AE^2 = 0$ ■

O caso em que a equação do segundo grau $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC < 0$, representa um par de retas concorrentes, é chamado de **caso degenerado da hipérbole**.

Exemplo 1

Determine se as equações abaixo representam uma hipérbole ou uma hipérbole degenerada. Caso seja uma hipérbole, determine seus principais elementos.

(a) $9x^2 - 25y^2 - 225 = 0$.

Solução.
Como $9x^2 - 25y^2 = 225$, obtemos, dividindo por 225, a equação

$$\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1\,,$$

que representa uma hipérbole com:

- $a = 5$, $b = 3$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 9} = \sqrt{34}$.
- centro: $C = (0, 0)$.
- reta focal: $\ell = \text{eixo}-OX : y = 0$.
- reta não-focal: $\ell' = \text{eixo}-OY : x = 0$.
- vértices: $A_1 = (-5, 0)$ e $A_2 = (5, 0)$.
- vértices imaginários (na reta não-focal): $B_1 = (0, -3)$ e $B_2 = (0, 3)$.
- focos: $F_1 = (-\sqrt{34}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{34}, 0)$.
- assíntotas: $y = \pm\frac{3}{5}x$, ou seja $3x \pm 5y = 0$. $\square$

(b) $x^2 - 2y^2 + 6x + 4y + 9 = 0$.

Solução.
Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& x^2 + 6x - 2(y^2 - 2y) = -9 \\
\iff\ & (x^2 + 6x + 9) - 2(y^2 - 2y + 1) = -9 + 9 - 2 \\
\iff\ & (x + 3)^2 - 2(y - 1)^2 = -2 \\
\iff\ & (y - 1)^2 - \frac{(x + 3)^2}{2} = 1\,.
\end{aligned}$$

Logo, a equação representa uma hipérbole com:

- $a = 1$, $b = \sqrt{2}$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1 + 2} = \sqrt{3}$.

• centro: $C = (-3, 1)$.
• reta focal: $\ell : x = -3$, paralela ao eixo$-OY$.
• reta não-focal: $\ell' : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$.
• vértices: $A_1 = (-3, 0)$ e $A_2 = (-3, 2)$.
• vértices imaginários (na reta não-focal): $B_1 = (-3 - \sqrt{2}, 1)$ e $B_2 = (-3 + \sqrt{2}, 1)$.
• focos: $F_1 = (-3, 1 - \sqrt{3})$ e $F_2 = (-3, 1 + \sqrt{3})$.
• assíntotas $(x + 3) = \pm\sqrt{2}(y - 1)$, ou seja, $x + \sqrt{2}y = -3 + \sqrt{2}$ e $x - \sqrt{2}y = -3 - \sqrt{2}$. □

(c) $9x^2 - 16y^2 + 90x - 128y - 31 = 0$.

Solução.
Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned} & 9(x^2 + 10x) - 16(y^2 + 8y) = 31 \\ \Longleftrightarrow\ & 9(x^2 + 10x + 25) - 16(y^2 + 8y + 16) = 31 + 9 \cdot 25 - 16 \cdot 16 \\ \Longleftrightarrow\ & 9(x + 5)^2 - 16(y + 4)^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & 9(x + 5)^2 = 16(y + 4)^2 \\ \Longleftrightarrow\ & 3(x + 5) = \pm 4(y + 4) \\ \Longleftrightarrow\ & 3(x + 5) \pm 4(y + 4) = 0\,. \end{aligned}$$

Logo, a equação representa o par de retas, $3x+4y = -31$ e $3x-4y = 1$, que se cortam no ponto $(-5, -4)$. □

Exemplo 2

Determine a equação da hipérbole equilátera com focos nos pontos $(-\sqrt{8}, 0)$ e $(\sqrt{8}, 0)$.

Solução.
Como $F_1 = (-\sqrt{8}, 0)$ e $F_2 = (\sqrt{8}, 0)$, temos que o centro da hipérbole é $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2} = (0, 0)$ e a reta focal é o eixo$-OX$. Sendo a hipérbole equilátera, temos $a = b$. Como $c = \sqrt{8}$ e $c^2 = a^2 + b^2$, obtemos $8 = a^2 + a^2 = 2a^2$, isto é, $a^2 = 4$. Logo, $a = b = 2$ e

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} = 1\,,$$

é a equação da hipérbole.
Além disso, $A_1 = (-2,0)$ e $A_2 = (2,0)$ são os vértices, $B_1 = (0,-2)$ e $B_2 = (0,2)$ são os vértices imaginários e $x = \pm y$ são as assíntotas da hipérbole $\mathcal{H}$. □

Exemplo 3

Mostre que a excentricidade de qualquer hipérbole equilátera é $\sqrt{2}$.

Solução.
Como $a = b$ e $c^2 = a^2 + b^2$, temos que $c^2 = 2a^2$, ou seja, $c = \sqrt{2}a$.
Logo, $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$. □

Exemplo 4

Os vértices de uma hipérbole são os pontos $(0,3)$ e $(0,-3)$, e um de seus focos é o ponto $(0,5)$. Determine a equação da hipérbole, o comprimento do seu eixo focal e suas assíntotas.

Solução.
A hipérbole tem centro $C = \dfrac{(0,3)+(0,-3)}{2} = (0,0)$; reta focal=eixo$-OY$; $c = d((0,0),(0,5)) = 5$; $a = d((0,0),(0,3)) = 3$; $(0,-5)$ é o outro foco; $b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 9 = 16$.
Então $\mathcal{H} : \dfrac{y^2}{9} - \dfrac{x^2}{16} = 1$ é a equação da hipérbole, $y = \pm\dfrac{4}{3}y$ são as suas assíntotas e $2a = 6$ o comprimento do seu eixo focal. □

Exemplo 5

O centro de uma hipérbole é a origem, sua reta focal é um dos eixos coordenados e uma de suas assíntotas é a reta $2x - 5y = 0$. Determine a equação da hipérbole $\mathcal{H}$, supondo que o ponto $(4,6) \in \mathcal{H}$.

Solução.
Como o centro é a origem e a reta focal (eixo$-OX$ ou eixo$-OY$) é uma

bissetriz das assíntotas, a reta $2x + 5y = 0$ é a outra assíntota. Vamos analisar os dois casos possíveis:

• Reta focal = eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ e $\frac{b}{a} = \frac{2}{5}$, isto é, $b = \frac{2}{5}a$. Como $(4,6) \in \mathcal{H}$, temos que $\frac{16}{a^2} - \frac{36}{\frac{4a^2}{25}} = 1$, ou seja, $0 > 16 \cdot 4 - 25 \cdot 36 = 4a^2$, o qual é absurdo, pois $4a^2 \geq 0$.

• Reta focal = eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$ e $\frac{b}{a} = \frac{5}{2}$, isto é, $a = \frac{2}{5}b$. Como $(4,6) \in \mathcal{H}$, temos que $\frac{36}{\frac{4b^2}{25}} - \frac{16}{b^2} = 1$, ou seja, $36 \cdot 25 - 16 \cdot 4 = 4b^2$. Logo, $b^2 = 9 \cdot 25 - 16 = 209$, $a^2 = \frac{836}{25}$ e $\mathcal{H} : \frac{y^2}{\frac{856}{25}} - \frac{x^2}{209} = 1$ é a equação da hipérbole. □

Exemplo 6

Determine os vértices, os focos e a excentricidade da hipérbole conjugada da hipérbole

$$9x^2 - 4y^2 = 36.$$

Solução.

A hipérbole $\mathcal{H} : 9x^2 - 4y^2 = 36$, que também pode ser escrita na forma $\mathcal{H} : \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$, tem centro na origem, reta focal = eixo$-OX$, $a = 2$, $b = 3$ e $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$.

Então a hipérbole $\mathcal{H}'$, conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, tem centro na origem, $a' = b = 3$, $b' = a = 2$, $c' = c = \sqrt{13}$ e reta focal = eixo$-OY$.

Logo $\mathcal{H}' : \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{4} = 1$ é a equação da hipérbole conjugada da hipérbole $\mathcal{H}$, $F_1 = (0, -\sqrt{13})$ e $F_2 = (0, \sqrt{13})$ são seus focos, $A_1 = (0, -3)$ e $A_2 = (0, 3)$ são seus vértices e $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{3}$ é a sua excentricidade. □

Exemplo 7

Determinar o ângulo agudo de interseção das assíntotas da hipérbole $9x^2 - y^2 - 36x - 2y + 44 = 0$.

Solução.
A equação da hipérbole se escreve na forma:

$$\begin{aligned} &9(x^2 - 4x) - (y^2 + 2y) = -44 \\ &9(x-2)^2 - (y+1)^2 = -44 + 36 - 1 = -9 \\ &\frac{(y+1)^2}{9} - (x-2)^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Então $C = (2, -1)$ é o centro, a reta focal é $\ell : x = 2$ (paralela ao eixo$-OY$), $a = 3$, $b = 1$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{10}$ e as assíntotas são: $x - 2 = \pm\frac{1}{3}(y+1)$, ou seja, $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$.
Logo $\operatorname{tg}\beta = 3$, $\operatorname{tg}\alpha = -3$, $\theta = \alpha - \beta$ e

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta}{1 + \operatorname{tg}\alpha\,\operatorname{tg}\beta} = \frac{-6}{1-9} = \frac{3}{4}\,,$$

onde β e α são os ângulos que as retas $y = 3x - 7$ e $y = -3x + 5$, respectivamente, fazem com o semi-eixo OX positivo, e θ é o ângulo agudo entre as assíntotas. □

Exemplo 8

As retas $r : 2x + y = 3$ e $s : 2x - y = 1$ são as assíntotas de uma hipérbole que passa pelo ponto $(6, 2)$. Determine sua equação.

Solução.
O centro $C = (x, y)$ da hipérbole é o ponto de interseção das assíntotas, isto é, (x, y) é a solução do sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 3 \\ 2x - y = 1\,. \end{cases}$$

Logo $C = (1, 1)$ é o centro, e a reta focal é a reta $x = 1$ ou a reta $y = 1$, que são as retas bissetrizes das assíntotas. Vamos analisar os dois casos possíveis.

- Reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{(x-1)^2}{a^2} - \dfrac{(y-1)^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = 2$, ou seja, $b = 2a$. Como $b^2 = 4a^2$ e $(6,2) \in \mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H} : 4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 4a^2$ e $4 \cdot 25 - 1 = 99 = 4a^2$.
Portanto, $\mathcal{H} : 4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 99$, ou seja,

$$\mathcal{H} : \frac{(x-1)^2}{\frac{99}{4}} - \frac{(y-1)^2}{99} = 1.$$

• Reta focal $\ell : x = 1$, paralela ao eixo$-OY$.

Neste caso, $\mathcal{H} : \dfrac{(y-1)^2}{a^2} - \dfrac{(x-1)^2}{b^2} = 1$ e $\dfrac{b}{a} = \dfrac{1}{2}$, ou seja, $a = 2b$. Como $a^2 = 4b^2$ e $(6,2) \in \mathcal{H}$, temos que $\mathcal{H} : (y-1)^2 - 4(x-1)^2 = 4b^2$ e $1 - 4 \cdot 25 = 4b^2 = -99 < 0$, o que é absurdo.
Assim, a equação procurada corresponde ao primeiro caso: $\mathcal{H} : 4(x-1)^2 - (y-1)^2 = 99$. □

Exemplo 9

Mostre que as assíntotas de uma hipérbole não a intersectam.

Solução.
Podemos supor, sem perda de generalidade (escolhendo o sistema de coordenadas de maneira adequada), que a hipérbole é dada pela equação:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

ou seja, $\mathcal{H} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$.
Como $r_+ : bx - ay = 0$ e $r_- : bx + ay = 0$ são as assíntotas da hipérbole e

$$\mathcal{H} : (bx - ay)(bx + ay) = a^2b^2,$$

temos que $r_+ \cap \mathcal{H} = \varnothing$ e $r_- \cap \mathcal{H} = \varnothing$, pois $(bx - ay)(bx + ay) = 0 \neq a^2b^2$ se $(x, y) \in r_- \cup r_+$. □

Exemplo 10

Mostre que uma reta r paralela a uma assíntota de uma hipérbole intersecta a curva em apenas um ponto.

Solução.
Podemos supor, sem perda de generalidade, que a hipérbole é dada pela equação:

$$\mathcal{H} : \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

Como $bx \pm ay = 0$ são as assíntotas da hipérbole, temos que r é da forma $r : bx \pm ay = m$, onde $m \neq 0$.
Seja $r : bx + ay = m$. Então, $P = (x, y) \in r \cap \mathcal{H}$ se, e somente se, $bx + ay = m$ e

$$a^2b^2 = b^2x^2 - a^2y^2 = (bx + ay)(bx - ay) = m(bx - ay),$$

isto é, se, e somente se, $bx + ay = m$ e $bx - ay = \dfrac{a^2b^2}{m}$.

Como as retas $\ell_1 : bx + ay = m$ e $\ell_2 : bx - ay = \dfrac{a^2b^2}{m}$ são concorrentes, pois $\begin{vmatrix} b & a \\ b & -a \end{vmatrix} = -2ab \neq 0$, temos que $r \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto, dado pela interseção das retas ℓ_1 e ℓ_2.
De modo análogo, podemos provar que $r \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto se r é da forma $bx - ay = m$, $m \neq 0$. □

Exemplo 11

A reta tangente a uma hipérbole $\mathcal{H}$ num ponto $P \in \mathcal{H}$ é a única reta não paralela às assíntotas que intersecta $\mathcal{H}$ só nesse ponto.

Mostre que a reta tangente à hipérbole $\mathcal{H} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$, em um ponto $P = (x_0, y_0)$ sobre a curva, tem por equação

$$b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2\,.$$

Solução.
Seja

$$r : \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

a reta tangente à hipérbole $\mathcal{H}$ no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{H}$.
Então, $Q = (x_0 + mt, y_0 + nt) \in \mathcal{H} \cap r$ se, e somente se,

$$\begin{aligned} & b^2(x_0+mt)^2 - a^2(y_0+nt)^2 = a^2b^2 \\ \Longleftrightarrow\ & b^2(x_0^2+2mx_0t+m^2t^2) - a^2(y_0^2+2ny_0t+n^2t^2) = a^2b^2 \\ \Longleftrightarrow\ & (b^2m^2-a^2n^2)t^2 + (2x_0mb^2-2y_0na^2)t + b^2x_0^2 - a^2y_0^2 - a^2b^2 = 0 \\ \Longleftrightarrow\ & (b^2m^2-a^2n^2)t^2 + (2x_0mb^2-2y_0na^2)t = 0\,, \end{aligned}$$

já que $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$.

Como $b^2m^2-a^2n^2 = (bm-an)(bm+an)$, temos que $b^2m^2-a^2n^2 = 0$ se, e somente se, $bm-an = 0$ ou $bm+an = 0$, se, e somente se, $\begin{vmatrix} m & n \\ a & b \end{vmatrix} = 0$ ou $\begin{vmatrix} m & n \\ -a & b \end{vmatrix} = 0$ se, e somente se, $(m,n) \parallel (a,b)$ ou $(m,n) \parallel (-a,b)$.

Além disso, como as assíntotas $r_+ : bx-ay = 0$ e $r_- : bx+ay = 0$ são perpendiculares, respectivamente, aos vetores $(b,-a)$ e (b,a), temos que (a,b) e $(-a,b)$ são vetores paralelos às retas r_+ e r_-, respectivamente.

Logo $b^2m^2-a^2n^2 = 0$ se, e somente se, r é paralela à assíntota r_+ ou à assíntota r_- da hipérbole. Então $b^2m^2-a^2n^2 \neq 0$, já que, por definição, r não é paralela às assíntotas.

Sendo que $b^2m^2-a^2n^2 \neq 0$ e $r \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto, temos que

$$2x_0b^2m - 2y_0a^2n = 0\,,$$

ou seja, $(m,n) \perp (2x_0b^2, -2y_0a^2)$.

Logo o vetor $(x_0b^2, -y_0a^2)$ é perpendicular à reta r. Assim,

$$r : b^2x_0x - a^2y_0y = b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2,$$

já que $P = (x_0,y_0) \in r$ e $b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$. □

Exemplo 12

Determine os valores de $m \in \mathbb{R}$ para os quais as retas da família $r_m : y = mx-1$ são tangentes à hipérbole $\mathcal{H} : 4x^2 - 9y^2 = 36$.

Solução.

A reta r_m é tangente a $\mathcal{H}$ se, e somente se, $r_m \cap \mathcal{H}$ consiste apenas de um ponto e r_m não é paralela às assíntotas.

Como a hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ tem centro na origem, reta focal =

eixo$-OX$, $a = 3$ e $b = 2$, suas assíntotas, $y = \pm\frac{2}{3}x$, têm inclinação $\pm\frac{2}{3}$ em relação ao eixo$-OX$. Logo $m \neq \pm\frac{2}{3}$, ou seja, $9m^2 - 4 \neq 0$.

Além disso, $r_m \cap \mathcal{H}$ consiste de um único ponto. Isto é, a equação

$$4x^2 - 9(mx-1)^2 = 36 \iff (4-9m^2)x^2 + 18mx - 45 = 0$$

tem apenas uma solução.

Logo a equação acima tem discriminante

$$\begin{aligned}
\Delta = \quad & (18m)^2 + 4 \cdot 45(4-9m^2) = 0 \\
\iff \quad & 18m^2 + 10(4-9m^2) = 0 \\
\iff \quad & -72m^2 + 40 = 0 \\
\iff \quad & m^2 = \frac{40}{72} \iff m^2 = \frac{5}{9} \iff m = \pm\frac{\sqrt{5}}{3}.
\end{aligned}$$

Assim, $y = \frac{\sqrt{5}}{3}x - 1$ e $y = -\frac{\sqrt{5}}{3}x - 1$ são as retas tangentes à hipérbole que pertencem à família de retas r_m. $\square$

5. Exercícios de revisão

1. Determine a equação da hipérbole que tem assíntotas $y = 2x$ e $y = -2x$ e passa pelo ponto $(2,1)$.

2. Determine a equação da hipérbole que tem focos em $(2,1)$ e $(4,1)$ e excentricidade $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

3. Calcule a área do triângulo formado pelas assíntotas da hipérbole $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ e a reta $9x + 2y = 24$.

4. O ponto $(1,-2)$ pertence a uma hipérbole em que um dos focos é $(-2,2)$, tendo a diretriz correspondente a esse foco por equação $2x - y - 1 = 0$. Determine a equação da hipérbole.

5. Determine a equação da hipérbole equilátera com centro no ponto $(2,3)$ e um dos focos no ponto $(2,5)$.

6. Determine os valores de k de modo que a equação $\dfrac{(x-4)^2}{9+k} + \dfrac{y^2}{5+k} = 1$ representa uma hipérbole. Esboce a curva para $k = -7$ e dê os focos, a excentricidade e as assíntotas.

7. Verifique que uma reta paralela a uma assíntota de uma hipérbole intersecta a curva em apenas um ponto.

8. Verifique que a reta tangente à hipérbole $b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ em qualquer ponto (x_0, y_0) sobre a curva tem por equação $b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$.

9. Verifique que o ponto de contato de qualquer tangente a uma hipérbole é o ponto médio do segmento da tangente delimitado pelas assíntotas.

10. Considere a hipérbole $\mathcal{H} : \dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{36} = 1$. Determine os valores de m de modo que a reta $y = \dfrac{5}{2}x + m$:

(a) intersecta $\mathcal{H}$ em dois pontos distintos.

(b) é tangente a $\mathcal{H}$.

(c) não intersecta $\mathcal{H}$.

5.1. Respostas

1. $2x^2 - y^2 = 7$.

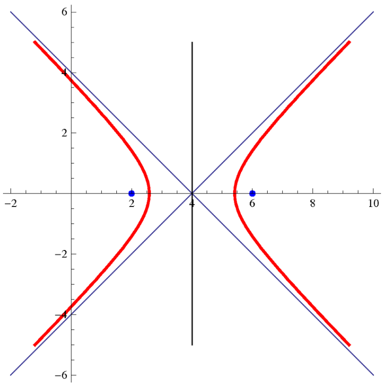
2. $4(x-3)^2 - 12(y-1)^2 = 12$.

3. O triângulo tem vértices $(2,3)$, $(4,-6)$ e $(0,0)$, e área 12.

4. $xy = 5$.

5. $(y-3)^2 - (x-2)^2 = 2$.

6. $k \in (-9,-5)$. Para $k = -7$, $\frac{(x-4)^2}{2} - \frac{y^2}{2} = 1$ é uma hipérbole de centro $(4,0)$, reta focal sendo o eixo-OX, focos $(6,0)$ e $(2,0)$, excentricidade $\sqrt{2}$ e assíntotas $y = x - 4$ e $y = -x + 4$.



7. Sejam a hipérbole $\mathcal{H} : b^2x^2 - a^2y^2 = a^2b^2$ e a reta $r_\pm : y = \pm\frac{b}{a}x + n$ paralela à assíntota $y = \pm\frac{b}{a}x$. Então $\mathcal{H} \cap r_\pm = \left\{\left(\mp\frac{(b^2+n^2)a}{2nb}, \frac{n^2-b^2}{n}\right)\right\}$.

8. Faça uma análise do fato que reta tangente a $\mathcal{H}$ em $P \in \mathcal{H}$ é a única reta não paralela às assíntotas e que intersecta $\mathcal{H}$ apenas neste ponto.

9. Sejam $r_\pm : y = \pm\frac{b}{a}x$ as assíntotas e $s : b^2x_0x - a^2y_0y = a^2b^2$ a reta tangente à hipérbole $\mathcal{H}$ no ponto (x_0, y_0). Então, $r_+ \cap s = \{P_+\}$ e $r_- \cap s = \{P_-\}$, onde $P_\pm = \left(\frac{bx_0 \pm ay_0}{b}, \frac{ay_0 \pm bx_0}{a}\right)$. Note que (x_0, y_0) é o ponto médio do segmeto P_+P_-.

10. (a) $|m| > \frac{9}{2}$. (b) $|m| = \frac{9}{2}$. (c) $|m| < \frac{9}{2}$.

Capítulo 9

Curvas cônicas III: parábola

Vamos analisar a equação

$$\boxed{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

nos casos em que exatamente um dos coeficientes A ou C é nulo.

1. Parábola

Definição 1

Sejam $\mathcal{L}$ uma reta no plano e F um ponto no plano não pertencente a $\mathcal{L}$. A **parábola** $\mathcal{P}$ de **diretriz** $\mathcal{L}$ e foco F é o conjunto que consiste de todos os pontos P do plano que são equidistantes do ponto F e da reta $\mathcal{L}$.

$$\boxed{\mathcal{P} = \{\, P \mid d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \,\}}$$

Terminologia

• Como dissemos na definição, o ponto F é o **foco** e a reta $\mathcal{L}$ é a diretriz da parábola.

• A reta ℓ que contém o foco e é perpendicular à diretriz $\mathcal{L}$ é chamada **reta focal** da parábola.

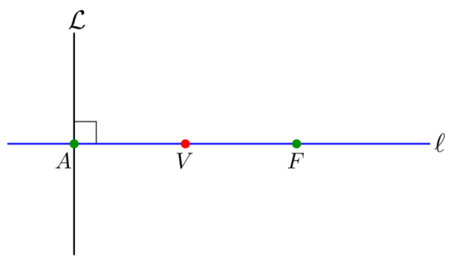


Fig. 1: Posição de V em relação a F e a $\mathcal{L}$.

• O **vértice** da parábola é o ponto V da reta focal que equidista de F e de $\mathcal{L}$. Em particular, $V \in \mathcal{P}$.

• Se A é o ponto onde $\mathcal{L}$ intersecta ℓ, então V é o ponto médio do segmento AF, ou seja,

$$V = \frac{A+F}{2}.$$

• o número $2p = d(F, \mathcal{L})$ é o **parâmetro** da parábola. Note que

$$d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = p.$$

Observação 1

Toda parábola é simétrica em relação à sua reta focal.

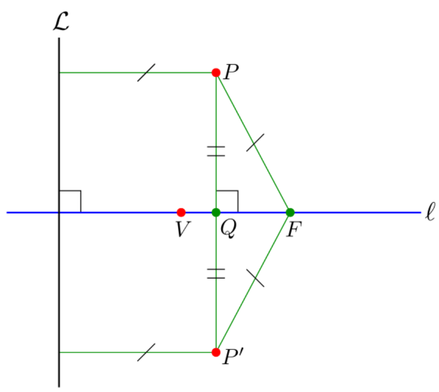


Fig. 2: Simetria da parábola em relação a ℓ.

De fato, seja $\mathcal{P}$ uma parábola de foco F, vértice V, diretriz $\mathcal{L}$ e reta focal ℓ.

Seja $P \in \mathcal{P}$ e seja P' o ponto simétrico de P em relação à reta focal ℓ.

O segmento $PP' \perp \ell$ intersecta a reta focal ℓ num ponto Q que é o ponto médio do segmento PP'.

Os triângulos $\triangle PQF$ e $\triangle P'QF$ são congruentes, pois $d(P, Q) = d(P', Q)$, o lado QF é comum, e os ângulos $\widehat{PQF}$ e $\widehat{P'QF}$ são retos. Em particular, $d(P, F) = d(P', F)$.

Além disso, $d(P, \mathcal{L}) = d(Q, \mathcal{L}) = d(P', \mathcal{L})$.

Como $P \in \mathcal{P}$, temos $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$. Portanto, $d(P', F) = d(P', \mathcal{L})$, isto é, $P' \in \mathcal{P}$.

2. Formas canônicas da parábola

Vamos estabelecer as formas canônicas da parábola em relação a um sistema de coordenadas OXY no plano. Consideremos primeiro os casos em que o vértice da parábola é a origem e a reta focal é um dos eixos coordenados, e depois os casos em que o vértice é um ponto qualquer e a reta focal é paralela a um dos eixos coordenados.

2.1. Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OX$

Caso I. O foco F está à direita da diretriz $\mathcal{L}$.

Como o vértice da parábola $\mathcal{P}$ é $V = (0,0)$, temos que o foco é $F = (p,0)$ e a diretriz é

$$\mathcal{L} : x = -p, \text{ onde } 2p = d(F,\mathcal{L}).$$

Logo,

$$\begin{aligned}
& P = (x,y) \in \mathcal{P} \\
\iff & d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \\
\iff & \sqrt{(x-p)^2 + y^2} = |x+p| \\
\iff & (x-p)^2 + y^2 = (x+p)^2 \\
\iff & x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2 \\
\iff & -2px + y^2 = 2px \\
\iff & \boxed{y^2 = 4px}
\end{aligned}$$

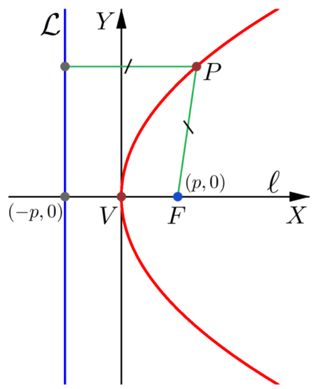


Fig. 3: $\mathcal{P} : y^2 = 4px$.

Caso II. O foco F está à esquerda da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, temos $F = (-p,0)$ e a equação da diretriz é

$$\mathcal{L} : x = p, \text{ onde } 2p = d(F,\mathcal{L}).$$

Então,

$$\begin{aligned}
& P = (x,y) \in \mathcal{P} \\
\iff & d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \\
\iff & \sqrt{(x+p)^2 + y^2} = |x-p| \\
\iff & (x+p)^2 + y^2 = (x-p)^2 \\
\iff & x^2 + 2px + p^2 + y^2 = x^2 - 2px + p^2 \\
\iff & 2px + y^2 = -2px \\
\iff & \boxed{y^2 = -4px}
\end{aligned}$$

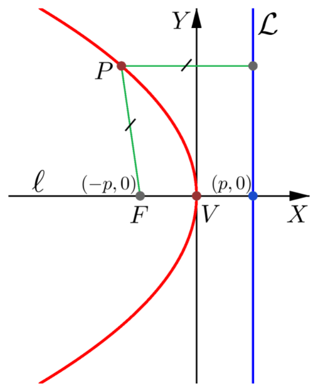


Fig. 4: $\mathcal{P} : y^2 = -4px$.

2.2. Parábola com vértice na origem e reta focal coincidente com o eixo$-OY$

Caso I. O foco F está **acima** da diretriz $\mathcal{L}$ (Fig. 5).

Neste caso, $F = (0, p)$ e $\mathcal{L} : y = -p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$.

Logo, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + (y-p)^2} = |y + p| \iff \boxed{x^2 = 4py}$$

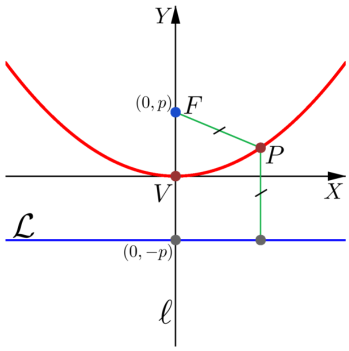


Fig. 5: $\mathcal{P} : x^2 = 4py$.

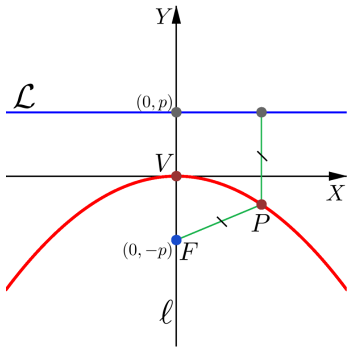


Fig. 6: $\mathcal{P} : x^2 = -4py$.

Caso II. O foco F está **abaixo** da diretriz $\mathcal{L}$ (Fig. 6).

Neste caso, $F = (0, -p)$ e $\mathcal{L} : y = p$, onde $2p = d(F, \mathcal{L})$.

Logo, $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + (y+p)^2} = |y - p| \iff \boxed{x^2 = -4py}$$

2.3. Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$

Para obter a forma canônica da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$, consideramos um sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente.

Caso I. O foco F está **à direita** da diretriz $\mathcal{L}$. Sabemos que a equação da parábola no sistema de coordenadas $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$, é $\overline{y}^2 = 4p\overline{x}$.

Além disso, nesse sistema de coordenadas, o foco é $F = (p, 0)$; o vértice é $V = (0, 0)$; a diretriz é $\mathcal{L} : \overline{x} = -p$ e a reta focal é $\ell : \overline{y} = 0$.

Como $x = \overline{x} + x_0$ e $y = \overline{y} + y_0$, temos que a equação da parábola no sistema OXY é

$$\boxed{(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)}$$

No sistema de eixos OXY, a parábola tem foco $F = (x_0 + p, y_0)$; vértice $V = (x_0, y_0)$; diretriz $\mathcal{L} : x - x_0 = -p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_0 - p$ e reta focal $\ell : y - y_0 = 0$, ou seja, $\ell : y = y_0$.

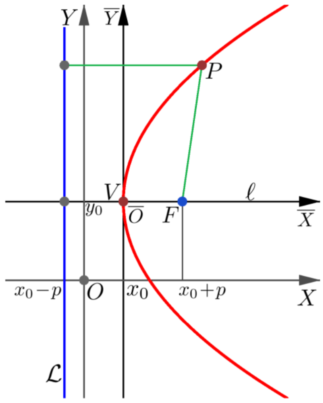


Fig. 7: $(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0)$.

Caso II. O foco F está **à esquerda** da diretriz $\mathcal{L}$.

Neste caso, a equação da parábola no sistema $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ é $\overline{y}^2 = -4p\overline{x}$, e, nessas coordenadas, seus elementos são: foco $F = (-p, 0)$; vértice $V = (0, 0)$; diretriz $\mathcal{L} : \overline{x} = p$ e reta focal $\ell : \overline{y} = 0$.

Passando às coordenadas x, y do sistema OXY, a equação da parábola fica na forma:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)}$$

e seus elementos são: foco $F = (x_0 - p, y_0)$; vértice $V = (x_0, y_0)$; diretriz $\mathcal{L} : x - x_0 = p$, ou seja, $\mathcal{L} : x = x_0 + p$ e reta focal $\ell : y - y_0 = 0$, ou seja, $\ell : y = y_0$.

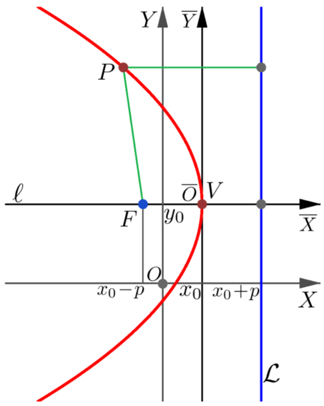


Fig. 8: $(y - y_0)^2 = -4p(x - x_0)$.

2.4. Parábola com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$

Como nos casos anteriores, considerando um sistema de eixos ortogonais $\overline{O}\,\overline{X}\,\overline{Y}$ com origem $\overline{O} = V = (x_0, y_0)$ e eixos $\overline{O}\,\overline{X}$ e $\overline{O}\,\overline{Y}$ paralelos e de igual sentido aos eixos OX e OY, respectivamente, obtemos as equações e os elementos das parábolas com vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$.

Caso I. O foco F está **acima** da diretriz $\mathcal{L}$ (Fig. 9).

Neste caso, o foco é $F = (x_0, y_0 + p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 - p$; a reta focal é $\ell : x = x_0$ e a equação da parábola é

$$\boxed{(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)}$$

Caso II. O foco F está **abaixo** da diretriz $\mathcal{L}$ (Fig. 10).

Neste caso, o foco é $F = (x_0, y_0 - p)$; a diretriz é $\mathcal{L} : y = y_0 + p$; a reta focal é $\ell : x = x_0$ e a equação da parábola é

$$\boxed{(x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)}$$

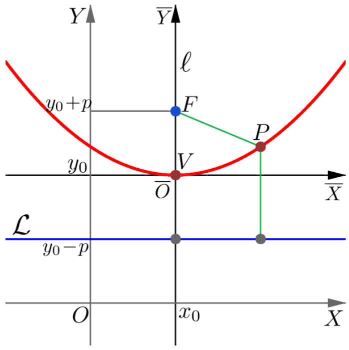


Fig. 9: $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = 4p(y - y_0)$.

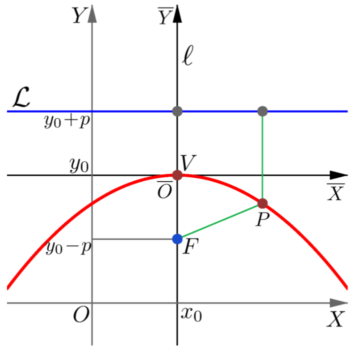


Fig. 10: $\mathcal{P} : (x - x_0)^2 = -4p(y - y_0)$.

3. Equação geral do segundo grau com $B = 0$ e $AC = 0$

Consideremos a equação canônica da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$:

$$\boxed{(y - y_0)^2 = \pm 4p(x - x_0)}$$

Desenvolvendo e agrupando os termos dessa equação, obtemos:

$$y^2 \mp 4px - 2y_0y + y_0^2 \pm 4px_0 = 0\,.$$

Essa equação é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 0$, $B = 0$, $C = 1$, $D = \mp 4p$, $E = -2y_0$ e $F = y_0^2 \pm 4px_0$.

Analogamente, desenvolvendo a equação da parábola de vértice $V = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$:

$$\boxed{(x - x_0)^2 = \pm 4p(y - y_0)}$$

obtemos a equação

$$x^2 - 2x_0 x \mp 4py + x_0^2 \pm 4py_0 = 0\,,$$

que é da forma

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

onde $A = 1$, $B = 0$, $C = 0$, $D = -2x_0$, $E = \mp 4p$ e $F = x_0^2 \pm 4py_0$.

No primeiro caso, temos $A = 0$, $B = 0$ e $C \neq 0$. No segundo caso, temos $A \neq 0$, $B = 0$ e $C = 0$.

Reciprocamente, temos a seguinte proposição:

Proposição 1

Seja a equação do segundo grau com $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Se $A = 0$ e $C \neq 0$, essa equação representa:

- *uma parábola cuja reta focal é paralela ao eixo$-OX$, se $D \neq 0$.*
- *duas retas distintas paralelas ao eixo$-OX$, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF > 0$.*
- *uma reta paralela ao eixo$-OX$, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF = 0$.*
- *o conjunto vazio, se $D = 0$ e $E^2 - 4CF < 0$.*

Um resultado similar vale para o caso em que $C = 0$ e $A \neq 0$, trocando paralelo ao eixo$-OX$ por paralelo ao eixo$-OY$ e substituindo C por A de forma apropriada nas sentenças acima.

Prova.

Suponhamos $A = 0$, $C \neq 0$ e $D \neq 0$. Então a equação do segundo grau se escreve na forma:

$$y^2 + \frac{E}{C}y + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} = 0.$$

Completando o quadrado, obtemos:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 + \frac{D}{C}x + \frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2} = 0\,.$$

Como $D \neq 0$, podemos escrever a equação na forma:

$$\left(y + \frac{E}{2C}\right)^2 = -\frac{D}{C}\left(x + \frac{C}{D}\left(\frac{F}{C} - \frac{E^2}{4C^2}\right)\right)\,,$$

que é a equação da parábola com reta focal paralela ao eixo$-OX$ e vértice

$$V = \left(-\frac{4C^2F - CE^2}{4C^2D}, -\frac{E}{2C}\right).$$

Se $D = 0$, a equação $Cy^2 + Ey + F = 0$ representa:

• as duas retas paralelas ao eixo$-OX$:

$$y = \frac{-E + \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{-E - \sqrt{E^2 - 4CF}}{2C}\,,$$

se $E^2 - 4CF > 0$;

• a reta paralela ao eixo$-OX$: $y = -\dfrac{E}{2C}$, se $E^2 - 4CF = 0$;

• o conjunto vazio, se $E^2 - 4CF < 0$. ■

Os casos em que a equação $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$, com $AC = 0$, representa duas retas paralelas, uma reta ou o conjunto vazio são chamados de **casos degenerados da parábola**.

Exemplo 1

Verifique se as equações abaixo representam uma parábola ou uma parábola degenerada. Caso seja uma parábola, determine seus principais elementos:

(a) $x^2 - 8y = 0$.

Solução.

Como $x^2 = 8y$, a equação representa uma parábola, com:

• vértice: $V = (0, 0)$;

• reta focal = eixo$-OY : x = 0$;

• parâmetro: $p = 2$.

• foco: $F = (0, 2)$, acima da diretriz.

• diretriz: $\mathcal{L} : y = -2$. □

(b) $2y^2 + 5x + 8y - 7 = 0$.

Solução.
Completando o quadrado, obtemos:

$$\begin{aligned} 2(y^2 + 4y) = -5x + 7 &\iff 2(y^2 + 4y + 4) = -5x + 7 + 8 \\ &\iff 2(y+2)^2 = -5x + 15 \\ &\iff 2(y+2)^2 = -5(x-3) \\ &\iff (y+2)^2 = -\frac{5}{2}(x-3)\,, \end{aligned}$$

que representa uma parábola com:
- vértice: $V = (3, -2)$;
- reta focal: $\ell : y = -2$, paralela ao eixo$-OX$;
- parâmetro: $2p = \frac{10}{8}$, então, $p = \frac{5}{8}$;
- foco: $F = \left(3 - \frac{5}{8}, -2\right) = \left(\frac{19}{8}, -2\right)$, à esquerda da diretriz.
- diretriz: $\mathcal{L} : x = 3 + \frac{5}{8} = \frac{29}{8}$. □

(c) $3y^2 + 7y - 6 = 0$.

Solução.
Como, nessa equação $A = B = D = 0$, e seu discriminante é $49+4\cdot3\cdot6 = 121 > 0$, ela representa o par de retas $y = \frac{-7 \pm 11}{6}$, ou seja, $y = -3$ e $y = \frac{2}{3}$, paralelas ao eixo$-OX$. □

(d) $9x^2 + 42x + 49 = 0$

Solução.
Como, nessa equação $B = C = E = 0$ e seu discriminante é $42^2-4\cdot9\cdot49 = 1764 - 1764 = 0$, ela representa a reta $x = -\frac{42}{18} = -\frac{21}{9} = -\frac{7}{3}$, paralela ao eixo$-OY$ □

(e) $3y^2 - 2y + 1 = 0$

Solução.
Nessa equação, $A = B = D = 0$ e seu discriminante é $4 - 12 = -8 < 0$. Então, ela representa o conjunto vazio □

Exemplo 2

Determinar a equação da parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cujo foco é o ponto:

(a) $F = (3, 0)$.

Solução.
Temos $p = d(V, F) = 3$ e reta focal = eixo$-OX$. Como o foco F está à direita do vértice, temos que a diretriz é $\mathcal{L} : x = -3$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : y^2 = 12x$. $\square$

(b) $F = (0, -2)$.

Solução.
Temos $p = d(V, F) = 2$ e reta focal = eixo$-OY$. Como o foco F está abaixo do vértice, vemos que a diretriz é $\mathcal{L} : y = 2$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : x^2 = -8y$. $\square$

Exemplo 3

Uma parábola $\mathcal{P}$ com vértice V na origem, cuja reta focal é o eixo$-OY$, passa pelo ponto $(4, -2)$. Determine sua equação, o foco F e a equação da diretriz $\mathcal{L}$.

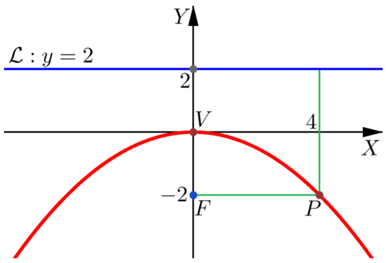


Fig. 11: Parábola $\mathcal{P} : x^2 = -8y$.

Solução.
A parábola tem equação $\mathcal{P} : x^2 = \pm 4py$, com $p = d(V, F) > 0$.
Como $(4, -2) \in \mathcal{P}$, temos que $\mathcal{P} : x^2 = -4py$ e $16 = 8p$. Logo, $p = 2$; $F = (0, -2)$, $\mathcal{L} : y = 2$ e a equação da parábola é $\mathcal{P} : x^2 = -8y$. $\square$

Exemplo 4

Um círculo C com centro no ponto $C = (4, -1)$ passa pelo foco F da parábola $\mathcal{P} : x^2 = -16y$. Mostre que C é tangente à diretriz $\mathcal{L}$ de $\mathcal{P}$.

Solução.
A reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é o eixo$-OY$, o vértice é a origem, e o foco está abaixo da diretriz. Então, $F = (0, -4)$ e $\mathcal{L} : y = 4$, pois $4p = 16$.

A equação do círculo é

$$C : (x-4)^2 + (y+1)^2 = r^2.$$

Sendo $F = (0,-4) \in C$, temos $16 + 9 = r^2$, ou seja, $r = 5$. Logo $\mathcal{L}$ é tangente a C, pois $d(C, \mathcal{L}) = d((4,-1), \mathcal{L}) = |-1-4| = 5 =$ raio de C. □

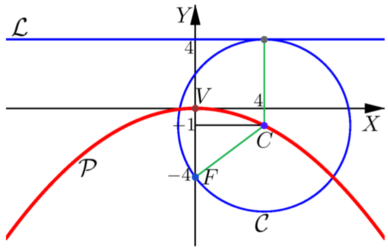


Fig. 12: Parábola $\mathcal{P}$ e círculo C.

Exemplo 5

Determinar a equação da parábola $\mathcal{P}$ de vértice $V = (3,4)$ e foco $F = (3,2)$. Determine, também, a equação de sua diretriz.

Solução.

Como $V = (3,4)$ e $F = (3,2)$, a reta focal é $\ell : x = 3$ e, nessa reta, F está abaixo de V e, portanto, abaixo da diretriz $\mathcal{L}$.

Logo, a equação da parábola é da forma

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -4p(y-4).$$

Temos que

$$p = d(V,F) = d((3,4),(3,2)) = 2.$$

Logo a diretriz é $\mathcal{L} : y = 6$ e

$$\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4)$$

é a equação da parábola. □

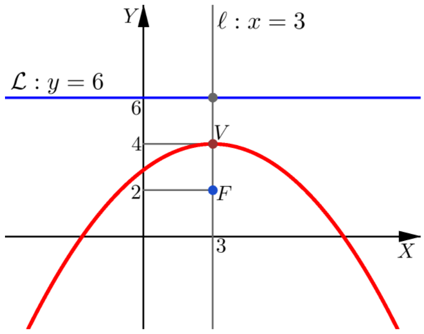


Fig. 13: $\mathcal{P} : (x-3)^2 = -8(y-4)$.

Exemplo 6

Determine a equação da parábola $\mathcal{P}$ cuja reta focal é paralela ao eixo$-OX$ e passa pelos pontos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0,5)$ e $(-6,-7)$.

Solução.

Como a reta focal da parábola $\mathcal{P}$ é paralela ao eixo$-OX$, sua equação deve ser da forma $\mathcal{P} : (y-y_0)^2 = \pm 4p(x-x_0)$, que se escreve, portanto, na forma:

$$\mathcal{P} : y^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Substituindo as coordenadas dos pontos dados nessa equação, temos:

$$\begin{cases} \frac{3}{2}D - E + F = -1 \\ 5E + F = -25 \\ -6D - 7E + F = -49 . \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, obtemos $D = 8$, $E = -2$ e $F = -15$.
Portanto, a equação da parábola é

$$y^2 + 8x - 2y - 15 = 0 ,$$

isto é,

$$y^2 - 2y + 1 = 15 - 8x + 1$$

ou, ainda,

$$\mathcal{P} : (y - 1)^2 = -8(x - 2).$$

Assim, a parábola $\mathcal{P}$ tem vértice $V = (2, 1)$ e reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$. Como $4p = 8$, isto é, $p = 2$, e o foco F está à esquerda da diretriz, temos que $F = (0, 1)$ e a diretriz $\mathcal{L} : x = 4$. □

Exemplo 7

Sejam $V = (-2, -1)$ o vértice de uma parábola $\mathcal{P}$ e $\mathcal{L} : x + 2y = 1$ a equação de sua diretriz. Achar a equação da parábola e seu foco.

Solução.
A reta focal ℓ é a reta perpendicular à diretriz que passa pelo vértice.
Como $\mathcal{L} \perp (1, 2)$, temos $\ell \perp (2, -1)$ e, portanto,

$$\ell : 2x - y = -4 + 1 = -3.$$

Seja $A = (x, y)$ o ponto de interseção das retas ℓ e $\mathcal{L}$.
Então, as coordenadas x e y satisfazem ao sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x + 2y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x - y = -3 \\ -2x - 4y = -2 . \end{cases}$$

Logo $-5y = -5$, isto é, $y = 1$ e $x = 1 - 2y = -1$.
Como V é o ponto médio do segmento AF, temos que $F = 2V - A$, ou seja,

$$F = 2(-2, -1) - (-1, 1) = (-3, -3) ,$$

Então $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, isto é, se, e só se,

$$
\begin{aligned}
& \left(\sqrt{(x+3)^2+(y+3)^2}\right)^2 = \left(\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}\right)^2 \\
\iff\ & (x+3)^2+(y+3)^2 = \frac{(x+2y-1)^2}{5} \\
\iff\ & x^2+6x+9+y^2+6y+9 = \frac{x^2+4xy+4y^2-2x-4y+1}{5} \\
\iff\ & 5x^2+30x+5y^2+30y+90 = x^2+4xy+4y^2-2x-4y+1 \\
\iff\ & \boxed{\mathcal{P}: 4x^2-4xy+y^2+32x+34y+89=0}
\end{aligned}
$$

que é a equação da parábola. □

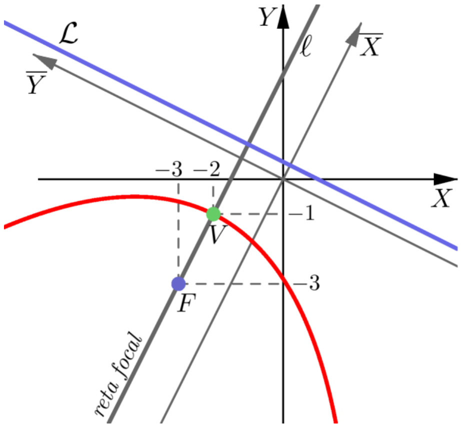


Fig. 14: Parábola $\mathcal{P}: 4x^2-4xy+y^2+32x+34y+89=0$.

Exemplo 8

A **reta tangente** a uma parábola $\mathcal{P}$, num ponto $P \in \mathcal{P}$, é a única reta, não paralela à reta focal ℓ, que intersecta a parábola apenas no ponto P.

Mostre que a reta tangente à parábola $\mathcal{P}: y^2 = 4px$, $p \neq 0$, no ponto $P = (x_0, y_0) \in \mathcal{P}$ é a reta $r: y_0x - 2x_0y = -y_0x_0$, se $x_0 \neq 0$, e é a reta $r: x = 0$, se $x_0 = 0$.

Solução.

Seja $r: \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$, a reta tangente à parábola $\mathcal{P}$ no ponto $P = (x_0, y_0)$.

Como r não é paralela à reta focal (eixo$-OX$), temos que $n \neq 0$. Além disso, $r \cap \mathcal{P}$ consiste apenas do ponto P, ou seja, a equação do segundo grau

$$\begin{aligned} & (y_0 + nt)^2 = 4p(x_0 + mt) \\ \iff & n^2t^2 + 2y_0nt + y_0^2 = 4px_0 + 4pmt \\ \iff & n^2t^2 + (2y_0n - 4pm)t + (y_0^2 - 4px_0) = 0 \\ \iff & n^2t^2 + (2y_0n - 4pm)t = 0 \\ \iff & t\,\left[n^2t + (2y_0n - 4pm)\right] = 0\,, \end{aligned}$$

possui uma única solução $t = 0$, que corresponde a $P = (x_0, y_0)$.
Portanto, $2y_0n - 4pm = 0$. Logo, $(m, n) \perp (2p, -y_0)$.

• Se $x_0 = 0$, então $y_0 = 0$, pois $y_0^2 = 4px_0$.
Nesse caso, $(m, n) \perp (2p, 0)$, isto é, a reta r passa pela origem e é perpendicular ao eixo$-OX$. Logo $r : x = 0$.

• Se $x_0 \neq 0$, temos $y_0 \neq 0$ e $2p = \dfrac{y_0^2}{2x_0}$.
Nesse caso, $(m, n) \perp \left(\dfrac{y_0^2}{2x_0}, -y_0\right)$, ou seja, $(m, n) \perp (y_0, -2x_0)$. Logo,

$$r : y_0x - 2x_0y = -x_0y_0\,,$$

já que $P = (x_0, y_0) \in r$. □

Exemplo 9

Determine a equação da reta tangente à parábola $\mathcal{P} : x^2 = y + 1$ paralela à reta $r : 2x - y = 0$, e o ponto de tangência.

Solução.
Seja $r_m : 2x - y = m$ uma reta paralela à reta r.
Como r_m não é paralela ao eixo$-OY$ (reta focal), temos que r_m é tangente a $\mathcal{P}$ se, e só se, $r_m \cap \mathcal{P}$ consiste de um único ponto, ou seja, a equação $x^2 = 2x - m + 1$ possui uma única solução. Logo, o discriminante da equação $x^2 - 2x + m - 1 = 0$ é igual a zero, ou seja, $\Delta = 4 - 4(m - 1) = 0$.
Então $m = 2$ e $2x - y = 2$ é a reta tangente a $\mathcal{P}$, paralela à reta $2x - y = 0$.
Como o ponto de tangência $P = (x, y)$ é o ponto de interseção da reta $2x - y = 2$ com a parábola $x^2 = y + 1$, temos $x^2 = 2x - 2 + 1 = 2x - 1$,

ou seja, $x^2 - 2x + 1 = 0$.
Então $x = 1$ e $y = 2x - 2 = 0$, isto é, $(1,0)$ é o ponto onde a reta $2x - y = 2$ tangencia a parábola $\mathcal{P} : x^2 = y + 1$. □

4. Exercícios de revisão

1. Um círculo de centro no ponto $(4, -1)$ passa pelo foco da parábola $x^2 + 16y = 0$. Verifique que a diretriz da parábola tangencia o círculo.

2. Calcule o comprimento da corda da parábola $y^2 = 4x$ determinada pela interseção da reta $x - 2y + 3 = 0$ com a parábola.

3. Dê a equação da parábola de vértice $(2, 1)$ e diretriz $4x + 3y = 1$.

4. Dê a equação da parábola de vértice na origem e diretriz $2x + y = 1$.

5. Determine a equação da parábola cuja reta focal é paralela ao eixo OX e passa pelos pontos $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$, $(0, 5)$ e $(-6, 7)$.

6. Identifique os principais elementos das parábolas:

(a) $x^2 - 8y = 0$;

(b) $2y^2 + 5x + 8y - 7 = 0$;

(c) $3y^2 + 7y - 6 = 0$;

(d) $9x^2 + 42x + 49 = 0$;

(e) $3y^2 - 2y + 1 = 0$.

7. Determine a equação da parábola com:

(a) Foco $F = \left(-\frac{3}{4}, 0\right)$ e diretriz $x = \frac{3}{4}$.

(b) Vértice $V = (-1, -3)$ e diretriz $x = -3$.

8. Verifique que a equação do segundo grau $10y^2 + 8x - 30y - 9 = 0$ é uma parábola, determine o vértice, o foco e a equação da diretriz.

9. Determine as equações que descrevem o lugar geométrico dos pontos equidistantes ao círculo $x^2 + y^2 = 1$ e ao eixo-OX.

10. Determine as equações que descrevem o lugar geométrico dos pontos que são centros dos círculos tangentes simultaneamente à reta $y = 1$ e ao círculo $x^2 + y^2 = 9$.

4.1. Respostas

1. O círculo tem equação $(x-4)^2 + (y+1)^2 = 25$, a diretriz é $y = 4$ a distância da diretriz ao centro do círculo é igual ao raio do círculo.

2. A corda tem extremidades nos pontos $(9,6)$ e $(1,2)$ tendo, portanto, comprimento $\sqrt{80}$.

3. $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 172x - 104y + 444 = 0$.

4. $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$.

5. $(y-1)^2 = -8(x-2)$

6. (a) Vértice na origem, reta focal $x = 0$, diretriz $y = -2$ e foco $(0,2)$. (b) Vértice $(3,-2)$ reta focal $y = -2$, diretriz $x = \frac{29}{8}$, foco $\left(-\frac{19}{8}, -2\right)$. (c) A equação de uma parábola degenerada que representa duas retas paralelas ao eixo-OX: $y = -3$ e $y = \frac{2}{3}$. (d) A equação de uma parábola degenerada que representa uma reta paralela ao eixo-OY: $x = -\frac{7}{3}$. (e) A equação de uma parábola degenerada que representa o conjunto vazio.

7. (a) $x = -\frac{1}{3}y^2$. (b) $x + 1 = \frac{1}{8}(y+3)^2$.

8. A equação se escreve na forma $\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = -\frac{4}{5}\left(x - \frac{63}{16}\right)$. O vértice é $\left(\frac{63}{16}, \frac{3}{2}\right)$ e o foco $\left(\frac{63}{16} - \frac{1}{5}, \frac{3}{2}\right) = \left(\frac{299}{80}, \frac{3}{2}\right)$. A equação da diretriz é $x = \frac{331}{80}$.

9. Duas parábolas: $x^2 = 2\left(y + \frac{1}{2}\right)$ e $x^2 = -2\left(y - \frac{1}{2}\right)$.

10. Duas parábolas: $x^2 = -8\,(y-2)$ e $x^2 = 4\,(y+1)$ sem os pontos $(2\sqrt{2}, 1)$ e $(-2\sqrt{2}, 1)$.

Capítulo 10

Cônicas rotacionadas

Vamos identificar cônicas cujos eixos não são paralelos aos eixos coordenados e veremos como reduzir uma equação do segundo grau à sua forma canônica através de uma rotação do sistema de eixos.

1. Rotação dos eixos coordenados

Seja OXY um sistema de eixos ortogonais no plano e seja $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos obtido girando os eixos OX e OY de um ângulo θ, com $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, no sentido positivo. Sejam (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$ as coordenadas de um ponto P nos sistemas OXY e $O\overline{X}\,\overline{Y}$, respectivamente, $r = d(P, O)$ e φ o ângulo que o segmento orientado OP faz com o semi-eixo positivo $O\overline{X}$. Então,

$$\begin{cases} \overline{x} = r\cos\varphi \\ \overline{y} = r\,\operatorname{sen}\varphi\,, \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x = r\cos(\varphi+\theta) \\ y = r\,\operatorname{sen}(\varphi+\theta)\,. \end{cases}$$

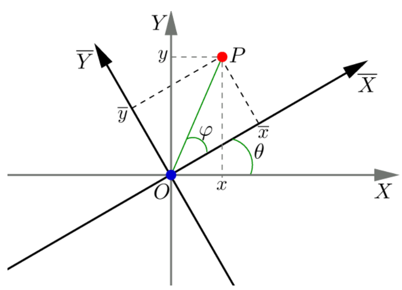


Fig. 1: $O\overline{X}\,\overline{Y}$ obtido girando OXY de θ.

Logo,

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\varphi - r\,\operatorname{sen}\theta\,\operatorname{sen}\varphi \\ y = r\,\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + r\cos\theta\,\operatorname{sen}\varphi\,, \end{cases}$$

ou seja,

$$\boxed{\begin{cases} x = \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} \\ y = \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y} \end{cases}}$$

A **mudança de coordenadas pela rotação de um ângulo θ dos eixos OX e OY** pode ser escrita, também, na forma matricial:

$$\boxed{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix}}$$

ou, na forma:

$$\boxed{(x, y) = (\cos\theta, \operatorname{sen}\theta)\overline{x} + (-\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\overline{y}}$$

A mudança de coordenadas **inversa**, obtida pela rotação de $-\theta$ dos eixos $O\,\overline{X}$ e $O\,\overline{Y}$, se expressa, em termos de matizes, como:

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{x} \\ \overline{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}$$

pois $\cos(-\theta) = \cos\theta$ e $\operatorname{sen}(-\theta) = -\operatorname{sen}\theta$. Então,

$$\boxed{\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}}$$

ou seja,

$$\boxed{(\overline{x}, \overline{y}) = (\cos\theta, -\operatorname{sen}\theta)\, x + (\operatorname{sen}\theta, \cos\theta)\, y}$$

Exemplo 1

Por uma rotação de 45^o dos eixos coordenados, uma certa equação é transformada na equação $4\overline{x}^2 - 9\overline{y}^2 = 36$. Encontre a equação original nas coordenadas x, y.

Solução.
Como

$$\begin{cases} \overline{x} & = & \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ \overline{y} & = & -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y & = & \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y)\,, \end{cases}$$

a equação acima, nas coordenadas x, y, se escreve na forma:

$$4 \cdot \frac{2}{4}(x+y)^2 - 9 \cdot \frac{2}{4}(-x+y)^2 = 36\,,$$

ou seja,

$$4(x^2+2xy+y^2) - 9(x^2-2xy+y^2) = 72\,,$$

isto é,

$$\boxed{-5x^2+26xy-5y^2-72=0}$$

Como, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação pode ser escrita na forma $\frac{\overline{x}^2}{9} - \frac{\overline{y}^2}{4} = 1$, ela representa uma hipérbole com $a=3$; $b=2$; $c=\sqrt{13}$; centro $C=(0,0)$; reta focal $\ell : \overline{y}=0$; vértices $A_1=(-3,0)$ e $A_2=(3,0)$; reta não-focal $\ell' : \overline{x}=0$; vértices imaginários $B_1=(0,-2)$ e $B_2=(0,2)$, e assíntotas $\overline{y} = \pm\frac{2}{3}\overline{x}$, ou seja, $2\overline{x} \pm 3\overline{y} = 0$. Usando as relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} x = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x}-\overline{y}) \\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}(\overline{x}+\overline{y})\,, \end{cases}$$

vemos que, nas coordenadas x e y, o centro é $C=(0,0)$; os vértices são $A_1 = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$ e $A_2 = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)$, e os vértices imaginários são $B_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}, -\frac{2}{\sqrt{2}}\right)$, $B_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$. Usando, agora, as relações de mudança de coordenadas inversa:

$$\begin{cases} \overline{x} = \frac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(-x+y)\,, \end{cases}$$

obtemos que, nas coordenadas x e y, a reta focal é $\ell : -x+y=0$; a reta não-focal é $\ell' : x+y=0$, e as assíntotas são:

$$\begin{aligned} 2\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(x+y) \pm 3\,\frac{\sqrt{2}}{2}\,(-x+y) &= 0 \\ 2\,(x+y) \pm 3\,(-x+y) = 0\,, \end{aligned}$$

ou seja, $\quad r_1 : y = \frac{1}{5}x \quad$ e $\quad r_2 : y = 5\,x\,.$ $\square$

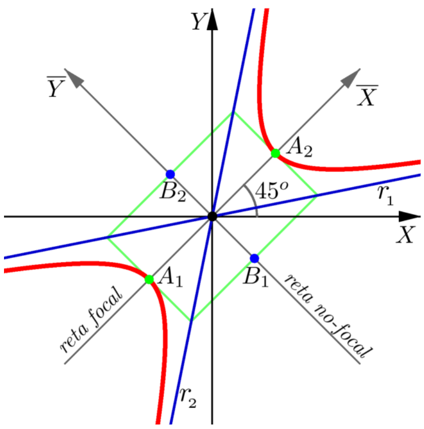


Fig. 2: $-5x^2+26xy-5y^2-72=0$.

2. Redução da equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ à forma canônica, por uma rotação do sistema de eixos

Consideremos a equação do segundo grau:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,. \tag{1}$$

Após uma rotação positiva de ângulo θ, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, dos eixos OX e OY, obtemos um novo sistema de eixos ortogonais $O\overline{X}$ e $O\overline{Y}$. As coordenadas (x, y) e $(\overline{x}, \overline{y})$ de um ponto P do plano nos sistemas de eixos OXY e $O\overline{X}\,\overline{Y}$, respectivamente, estão relacionadas da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} \\ y &= \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y}\,. \end{aligned}$$

Substituindo x por $\cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y}$ e y por $\operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y}$ na equação (1), obtemos a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

$$\boxed{A_\theta\overline{x}^2 + B_\theta\overline{x}\,\overline{y} + C_\theta\overline{y}^2 + D_\theta\overline{x} + E_\theta\overline{y} + F_\theta = 0} \tag{2}$$

onde

$$\begin{aligned} A_\theta &= A\cos^2\theta + B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\operatorname{sen}^2\theta \\ B_\theta &= 2(C - A)\operatorname{sen}\theta\cos\theta + B(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta) \\ C_\theta &= A\operatorname{sen}^2\theta - B\operatorname{sen}\theta\cos\theta + C\cos^2\theta \\ D_\theta &= D\cos\theta + E\operatorname{sen}\theta \\ E_\theta &= -D\operatorname{sen}\theta + E\cos\theta \\ F_\theta &= F\,. \end{aligned}$$

Por uma verificação direta, temos:

$$\boxed{\begin{pmatrix} A_\theta & B_\theta/2 \\ B_\theta/2 & C_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix}} \tag{3}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} D_\theta \\ E_\theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}} \tag{4}$$

Determinemos, agora, o ângulo $\theta = \theta_0$, $0 < \theta_0 < \dfrac{\pi}{2}$, para o qual o coeficiente B_{θ_0} da equação nas variáveis $\overline{x}, \overline{y}$, é igual a zero.

Sendo

$$\begin{aligned} B_{\theta_0} &= 2(C-A)\operatorname{sen}\theta_0\cos\theta_0 + B(\cos^2\theta_0 - \operatorname{sen}^2\theta_0) \\ &= (C-A)\operatorname{sen}2\theta_0 + B\cos 2\theta_0 = 0, \end{aligned}$$

obtemos:

1. $\theta_0 = 45^o$, se $A = C$. **2.** $\operatorname{tg}2\theta_0 = \dfrac{B}{A-C}$, se $A \neq C$.

Da relação $1 + \operatorname{tg}^2 2\theta_0 = \sec^2 2\theta_0$, e pelo fato que $\operatorname{tg}2\theta_0$ e $\cos 2\theta_0$ têm o mesmo sinal, já que $0 < 2\theta_0 < 180^o$, obtemos:

$$\begin{aligned} \cos 2\theta_0 &= \frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta_0}}, \quad \text{se} \quad \frac{B}{A-C} > 0, \quad \text{e} \\ \cos 2\theta_0 &= \frac{-1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 2\theta_0}}, \quad \text{se} \quad \frac{B}{A-C} < 0. \end{aligned}$$

Além disto, como $\cos 2\theta_0 = \cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta$ e $\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta = 1$:

$$\begin{aligned} & \cos 2\theta_0 = \cos^2\theta_0 - (1-\cos^2\theta_0) = 2\cos^2\theta_0 - 1 \\ \text{e} \quad & \cos 2\theta_0 = (1-\operatorname{sen}^2\theta_0) - \operatorname{sen}^2\theta_0 = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta_0, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\boxed{\cos\theta_0 = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta_0}{2}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta_0 = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta_0}{2}}}$$

Fazendo $\theta = \theta_0$, $\overline{A} = A_{\theta_0}$, $\overline{C} = C_{\theta_0}$, $\overline{D} = D_{\theta_0}$, $\overline{E} = E_{\theta_0}$ e $\overline{F} = F_{\theta_0} = F$ a equação do segundo grau (2) fica na forma

$$\boxed{\overline{A}\overline{x}^2 + \overline{C}\overline{y}^2 + \overline{D}\overline{x} + \overline{E}\overline{y} + \overline{F} = 0}$$

onde

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_0 \\ -\operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & -\operatorname{sen}\theta_0 \\ \operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix}}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_0 & \operatorname{sen}\theta_0 \\ -\operatorname{sen}\theta_0 & \cos\theta_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D \\ E \end{pmatrix}}$$

Definição 1

O **indicador** da equação do segundo grau

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0\,,$$

é o número

$$\boxed{I = B^2 - 4AC = -4\,\det\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix}}$$

Como o determinante de um produto de matrizes é igual ao produto dos determinantes das matrizes fatores, temos, por (3), que:

$$I_\theta = B_\theta^2 - 4A_\theta C_\theta = -4\,\det\begin{pmatrix} A_\theta & B_\theta/2 \\ B_\theta/2 & C_\theta \end{pmatrix} = -4\,\det\begin{pmatrix} A & B/2 \\ B/2 & C \end{pmatrix} = I\,,$$

para todo $\theta \in \mathbb{R}$, pois

$$\det\begin{pmatrix} \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\theta & -\operatorname{sen}\theta \\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = 1.$$

Em particular, fazendo $\theta = \theta_0$, temos que $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C}$. Dizemos que a equação $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ é do tipo:

- **elíptico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} < 0\,.$
- **parabólico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} = 0\,.$
- **hiperbólico**, se $I = B^2 - 4AC = -4\overline{A}\,\overline{C} > 0\,.$

3. Exemplos

Exemplo 2

(a) Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação

$$x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0 \qquad (5)$$

à sua forma canônica.

(b) Determine o foco, o vértice e a diretriz de (5) nas coordenadas x, y.

(c) Faça um esboço da curva.

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são $A = 1$, $B = 2$, $C = 1$, $D = -1$, $E = 1$, $F = 1$, e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 2^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$. Então a equação é do tipo parabólico.

Sendo $A = C = 1$, o ângulo da rotação necessária para eliminar o termo misto (xy) é $\theta = 45^o$ e as relações de mudança de coordenadas, por essa rotação, são:

$$\begin{cases} x = \cos(45^o)\,\overline{x} - \operatorname{sen}(45^o)\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \operatorname{sen}(45^o)\,\overline{x} + \cos(45^o)\,\overline{y} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y}) \end{cases} \tag{6}$$

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos(45^o)\,x + \operatorname{sen}(45^o)\,y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x + y) \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}(45^o)\,x + \cos(45^o)\,y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x + y) \end{cases} \tag{7}$$

Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a equação (5) se escreve na forma:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0$$

onde $\overline{F} = F = 1$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2/2 \\ 2/2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{A} = 2$, $\overline{C} = 0$, e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -\sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix},$$

ou seja, $\overline{D} = 0$, $\overline{E} = \sqrt{2}$.

Portanto, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a equação da cônica se escreve na forma:

$$2\overline{x}^2 + \sqrt{2}\,\overline{y} + 1 = 0,$$

isto é,

$$\overline{x}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{y} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right),$$

que é a forma canônica de uma parábola.

(b) Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a parábola possui os seguintes elementos:

- vértice: $V = \left(0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;
- reta focal: $\ell : \overline{x} = 0$;
- parâmetro: $2p = \dfrac{\sqrt{2}}{4} \Longrightarrow p = \dfrac{\sqrt{2}}{8}$;
- foco: $F = \left(0, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{8}\right) = \left(0, -\dfrac{5\sqrt{2}}{8}\right)$;
- diretriz: $\overline{y} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{8} = -\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$;

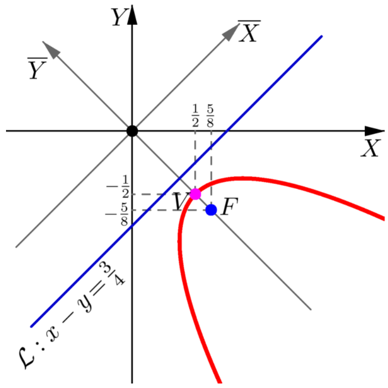


Fig. 3: $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$.

Determinação dos elementos da parábola nas coordenadas x e y:

Por (6), $V = \left(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}\right)$ é o vértice, $F = \left(\dfrac{5}{8}, -\dfrac{5}{8}\right)$ é o foco, e por (7), $\ell : x + y = 0$ é a reta focal e $\mathcal{L} : x - y = \dfrac{3}{4}$ é a diretriz da parábola nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 3 mostramos o esboço da parábola. □

Exemplo 3

(a) Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação

$$5x^2 + 4xy + 2y^2 + 20x + 20y + 44 = 0\,,$$

à sua forma canônica.

(b) Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e a reta não-focal da cônica nas coordenadas x, y.

(c) Faça um esboço da curva.

(d) Prove que a reta $x + y = 10$ não é tangente à curva.

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são $A = 5$, $B = 4$, $C = 2$, $D = 20$, $E = 20$, $F = 44$, e seu indicador é $I = B^2 - 4AC = 16 - 40 = -24 < 0$.

Portanto, a equação é do tipo elíptico.

Como $A \neq C$, temos que $\operatorname{tg} 2\theta = \dfrac{B}{A - C} = \dfrac{4}{3} > 0$. Logo,

$$\cos 2\theta = \sqrt{\frac{1}{1+\text{tg}^2 2\theta}} = \sqrt{\frac{1}{1+16/9}} = \frac{3}{5} > 0\,,$$

de onde obtemos:

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1+3/5}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}\,,$$
$$\text{sen}\,\theta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1-3/5}{2}} = \sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}\,.$$

As relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2\overline{x} - \overline{y}) \\ y = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(\overline{x} + 2\overline{y}) \end{cases} \quad (8) \qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(2x + y) \\ \overline{y} = \dfrac{\sqrt{5}}{5}(-x + 2y) \end{cases} \quad (9)$$

e a equação nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ fica na forma:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0,$$

onde $\overline{F} = F = 44$;

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 12 & 6 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 30 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ou seja, $\overline{A} = 6$ e $\overline{C} = 1$.

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{5}}{5}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 20 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12\sqrt{5} \\ 4\sqrt{5} \end{pmatrix},$$

ou seja, $\overline{D} = 12\sqrt{5}$ e $\overline{E} = 4\sqrt{5}$.

Logo, a equação da elipse, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, é dada por:

$$6\overline{x}^2 + \overline{y}^2 + 12\sqrt{5}\,\overline{x} + 4\sqrt{5}\,\overline{y} + 44 = 0\,.$$

Completando os quadrados, temos:

$$\begin{aligned} & 6(\overline{x}^2 + 2\sqrt{5}\overline{x}) + (\overline{y}^2 + 4\sqrt{5}\,\overline{y}) = -44 \\ & 6(\overline{x}^2 + 2\sqrt{5}\overline{x} + 5) + (\overline{y}^2 + 4\sqrt{5}\,\overline{y} + 20) = -44 + 30 + 20 \\ & 6(\overline{x} + \sqrt{5})^2 + (\overline{y} + 2\sqrt{5})^2 = 6 \\ & \mathcal{E} : (\overline{x} + \sqrt{5})^2 + \frac{(\overline{y} + 2\sqrt{5})^2}{6} = 1\,, \end{aligned}$$

que é a forma canônica de uma elipse.

(b) A equação representa uma elipse $\mathcal{E}$ com $a = \sqrt{6}$; $b = 1$; e $c = \sqrt{5}$, que nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem:

- centro: $C = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5})$;
- reta focal: $\ell : \overline{x} = -\sqrt{5}$, paralela ao eixo$-O\,\overline{Y}$;
- reta não-focal: $\ell' : \overline{y} = -2\sqrt{5}$, paralela ao eixo$-O\,\overline{X}$;
- vértices no eixo focal: $A_1 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} - \sqrt{6})$ e $A_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} + \sqrt{6})$;
- vértices no eixo não-focal: $B_1 = (-\sqrt{5} - 1, -2\sqrt{5})$ e $B_2 = (-\sqrt{5} + 1, -2\sqrt{5})$;
- focos: $F_1 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} - \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, -3\sqrt{5})$ e $F_2 = (-\sqrt{5}, -2\sqrt{5} + \sqrt{5}) = (-\sqrt{5}, -\sqrt{5})$;
- excentricidade: $e = \dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}$.

Determinação dos elementos da elipse nas coordenadas x e y.

Temos, por (9), que:

- $\ell : 2x + y = -5$ é a reta focal;
- $\ell' : x - 2y = 10$ é a reta não-focal;

e, por (8),

- $C = (0, -5)$ é o centro;
- $F_1 = (1, -7)$ e $F_2 = (-1, -3)$ são os focos;

- Os vértices sobre a reta focal nas coordenadas x e y são:

$$A_1 = \left(\frac{\sqrt{30}}{5}, -5 - \frac{2\sqrt{30}}{5}\right)$$

$$A_2 = \left(-\frac{\sqrt{30}}{5}, -5 + \frac{2\sqrt{30}}{5}\right).$$

- Os vértices sobre o eixo não-focal da elipse nas coordenadas x e y são:

$$B_1 = \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}, -5 - \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$$

$$B_2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, -5 + \frac{\sqrt{5}}{5}\right).$$

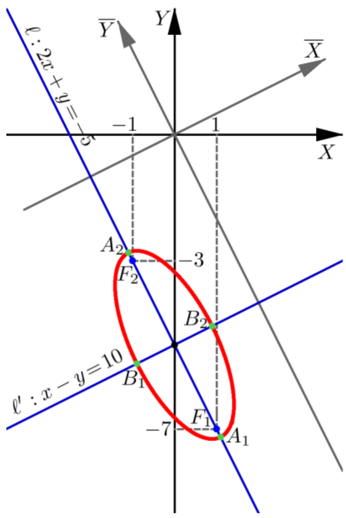


Fig. 4: $x^2 + 2xy + y^2 - x + y + 1 = 0$.

(c) Na figura 4 mostramos o esboço da elipse.

(d) Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a reta $r : x + y = 10$ é dada por:

$$r : \frac{\sqrt{5}}{5}(2\overline{x} - \overline{y} + \overline{x} + 2\overline{y}) = 10, \quad \text{ou seja,} \quad r : 3\overline{x} + \overline{y} = 10\sqrt{5}.$$

Então $(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathcal{E} \cap r$ se, e somente se, $\overline{y} = 10\sqrt{5} - 3\overline{x}$ e

$$
\begin{aligned}
& 6(\overline{x}+\sqrt{5})^2+(10\sqrt{5}-3\overline{x}+2\sqrt{5})^2=6\\
\iff\ & 6\overline{x}^2+12\sqrt{5}\overline{x}+30+9\overline{x}^2-72\sqrt{5}\overline{x}+720-6=0\\
\iff\ & 15\overline{x}^2-60\sqrt{5}\overline{x}-744=0\,.
\end{aligned}
$$

Como essa equação possui duas raízes, pois o seu discriminante é

$$\Delta=(-60\sqrt{5})^2-4\cdot 15\cdot(-744)=60(300+744)>0\,,$$

$r\cap\mathcal{E}$ consiste de dois pontos. Então r não é tangente à elipse $\mathcal{E}$. $\square$

Exemplo 4

(a) Reduza, por uma rotação dos eixos coordenados, a equação

$$11x^2+10\sqrt{3}xy+y^2-(22+10\sqrt{3})x-(2+10\sqrt{3})y-(4-10\sqrt{3})=0,$$

à sua forma canônica.

(b) Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e as assíntotas, se existirem, da cônica nas coordenadas x, y.

(c) Faça um esboço da curva.

Solução.

(a) Os coeficientes da equação são $A=11$, $B=10\sqrt{3}$, $C=1$, $D=-(22+10\sqrt{3})$, $E=-(2+10\sqrt{3})$, $F=-(4-10\sqrt{3})$, e seu indicador é $I=B^2-4AC=300-44=256>0$.
Então a equação é do tipo hiperbólico.

Como $A\neq C$, temos que $\operatorname{tg}2\theta_0=\dfrac{B}{A-C}=\sqrt{3}>0$.

Logo $\cos 2\theta_0=\sqrt{\dfrac{1}{1+3}}=\dfrac{1}{2}>0$,

$$\cos\theta_0=\sqrt{\frac{1+1/2}{2}}=\frac{\sqrt{3}}{2}\quad\text{e}\quad \operatorname{sen}\theta_0=\sqrt{\frac{1-1/2}{2}}=\frac{1}{2}\,,$$

isto é, $\theta_0=30^o$.
Assim, as relações de mudança de coordenadas são:

$$\begin{cases} x=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}\overline{x}-\overline{y})\\[2mm] y=\dfrac{1}{2}(\overline{x}+\sqrt{3}\overline{y})\end{cases}\qquad(10)\qquad\qquad \begin{cases} \overline{x}=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}x+y)\\[2mm] \overline{y}=\dfrac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y)\end{cases}\qquad(11)$$

e a equação, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, é dada por:

$$\overline{A}\overline{x}^2+\overline{C}\overline{y}^2+\overline{D}\overline{x}+\overline{E}\overline{y}+\overline{F}=0,$$

onde $\overline{F} = F = -(4 - 10\sqrt{3})$;

$$\begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 11 & 5\sqrt{3} \\ 5\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 16\sqrt{3} & 16 \\ 4 & -4\sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 16 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},$$

ou seja, $\overline{A} = 16$ e $\overline{C} = -4$, e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -(22 + 10\sqrt{3}) \\ -(2 + 10\sqrt{3}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -16\sqrt{3} - 16 \\ -4 + 4\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

ou seja, $\overline{D} = -16(\sqrt{3} + 1)$ e $\overline{E} = 4(\sqrt{3} - 1)$.

Nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a equação se escreve como:

$$16\overline{x}^2 - 4\overline{y}^2 - 16(\sqrt{3} + 1)\overline{x} - 4(1 - \sqrt{3})\overline{y} - (4 - 10\sqrt{3}) = 0.$$

Completando os quadrados nessa equação, obtemos:

$$16(\overline{x}^2 - (\sqrt{3} + 1)\overline{x}) - 4(\overline{y}^2 + (1 - \sqrt{3})\overline{y}) = 4 - 10\sqrt{3}$$

$$16\left(\overline{x}^2 - (\sqrt{3} + 1)\overline{x} + \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{4}\right) - 4\left(\overline{y}^2 + (1 - \sqrt{3})\overline{y} + \frac{(1 - \sqrt{3})^2}{4}\right)$$

$$= 4 - 10\sqrt{3} + 4(\sqrt{3} + 1)^2 - (1 - \sqrt{3})^2$$

$$16\left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 - 4\left(\overline{y} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 = 16$$

$$\mathcal{H} : \left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3} + 1}{2}\right)^2 - \frac{\left(\overline{y} + \frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right)^2}{4} = 1,$$

que é a forma canônica de uma hipérbole.

(b) A equação representa uma hipérbole com $a^2 = 1$, $b^2 = 4$, $c^2 = a^2 + b^2 = 5$, que nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem:

- centro: $C = \left(\dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}, \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}\right)$;
- reta focal: $\ell : \overline{y} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$, paralela ao eixo$-O\overline{X}$;
- reta não-focal: $\ell' : \overline{x} = \dfrac{\sqrt{3} + 1}{2}$, paralela ao eixo$-O\overline{Y}$;

• focos: $F_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} - \sqrt{5}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ e $F_2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2} + \sqrt{5}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;

• vértices: $A_1 = \left(\frac{\sqrt{3}-1}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$ e $A_2 = \left(\frac{\sqrt{3}+3}{2}, \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right)$;

• vértices imaginários: $B_1 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}-5}{2}\right)$ e $B_2 = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{2}, \frac{\sqrt{3}+3}{2}\right)$;

• excentricidade: $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{1} = \sqrt{5}$;

• assíntotas: $2\left(\overline{x} - \frac{\sqrt{3}+1}{2}\right) \pm \left(\overline{y} - \frac{\sqrt{3}-1}{2}\right) = 0$;

Determinação dos elementos da hipérbole nas coordenadas x e y.

Temos, por (11), que:

• $\ell : x - \sqrt{3}y = 1 - \sqrt{3}$ é a reta focal;

• $\ell' : \sqrt{3}x + y = \sqrt{3} + 1$ é a reta não-focal;

• $\begin{cases} r_1 : (2\sqrt{3}-1)(x-1) + (\sqrt{3}+2)(y-1) = 0 \\ r_2 : (2\sqrt{3}+1)(x-1) + (2-\sqrt{3})(y-1) = 0 \end{cases}$ são as assíntotas;

e, por (10),

• $C = (1, 1)$ é o centro;

• $F_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{15}}{2}, 1 - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ e $F_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{15}}{2}, 1 + \frac{\sqrt{5}}{2}\right)$ são os focos;

• $A_1 = \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ e $A_2 = \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{3}{2}\right)$ são os vértices;

• $B_1 = (2, 1 - \sqrt{3})$ e $B_2 = (0, 1 + \sqrt{3})$ são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas x e y.

(c) Na figura 5 mostramos o esboço da hipérbole. □

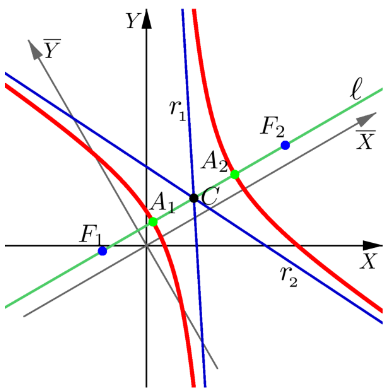


Fig. 5: Hipérbole $11x^2 + 10\sqrt{3}xy + y^2 - (22 + 10\sqrt{3})x - (2 + 10\sqrt{3})y - (4 - 10\sqrt{3}) = 0$.

4. Exercícios de revisão

1. **(a)** Reduza, por meio de uma rotação e uma translação, a equação $4xy - 3y^2 = 36$ à sua forma canônica.

(b) Determine os focos, os vértices, o centro, a reta focal e as assíntotas, se existirem, da cônica acima.

(c) Faça um esboço da curva.

2. **(a)** Por meio de uma rotação e uma translação, reduza à sua forma canônica a cônica $C : 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$.

(b) Determine o foco, o vértice, a diretriz e a reta focal de C.

(c) Faça um esboço da curva.

(d) Verifique que a reta $4x + 3y = 15$ é tangente à curva, e determine o ponto de tangência.

3. Sejam OXY um sistema de eixos otrogonais e $O\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos obtido por uma rotação positiva de 30^o dos sistema OXY.

(a) Se uma curva é dada por $(\overline{x}-1)^2+4(\overline{y}+1)^2 = 4$ nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, determine os vértices, os focos e a reta focal da cônica nas coordenadas x, y.

(b) Faça um esboço da curva no sistema OXY.

(c) Verifique que a reta $-x + \sqrt{3}\,y = 1$ não intersecta a cônica.

4. Verifique que as curvas dadas pelas equações $x^2 + y^2 + 2xy - x + y - 1 = 0$ e $(x+9)^2 + (y-9)^2 = 1$ não se intersectam.

5. Considere a família de curvas dada por $\lambda x^2 + 4xy + \lambda y^2 = 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) Determine um sistema de coordenadas $O\overline{X}\,\overline{Y}$ no qual a família está na forma canônica, e calcule os coeficientes $\overline{A}$ e $\overline{C}$ em função do parâmetro λ.

(b) Classifique as curvas da família em função do parâmetro λ.

(c) Faça um esboço, no sistema OXY, da curva da família correspondente ao valor $\lambda = 1$.

6. Identifique a cônica (possívelmente degenerada) $4x^2 - 4xy + y^2 - 12x - 6y + 5 = 0$.

7. Identifique a cônica (possívelmente degenerada) $4xy - 3y^2 - 36 = 0$ e determine, conforme o caso, vértices, assíntotas e diretrizes no sistema OXY. Faça um esboço da cônica.

8. Identifique, em função do parâmetro $k \in \mathbb{R}$, a cônica (possívelmente degenerada) $2xy = k$ e faça um esboço das cônicas correspondentes aos valores $k = -1$, $k = 0$ e $k = 1$.

9. Classifique em função do parâmetro $k \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$(k-1)(k-2)x^2 + (k-2)y^2 - 2k(k-2)y = 3k^2 - k^3,$$

indicando, nos casos não-degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo-OX ou ao eixo OY.

10. **(a)** Reduza a equação de grau dois abaixo à sua forma canônica:

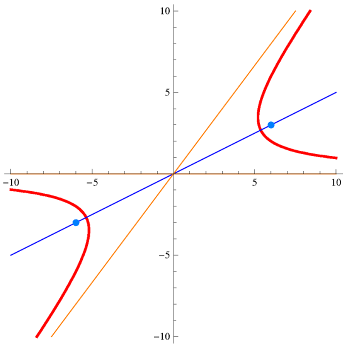
$$13x^2 - 18xy + 37y^2 + 20\sqrt{10}x - 20\sqrt{10}y + 40 = 0.$$

(b) Determine o centro, os focos, os vértices na reta-focal e na reta não-focal, a reta-focal e a reta não-focal da cônica nas coordenadas x e y.

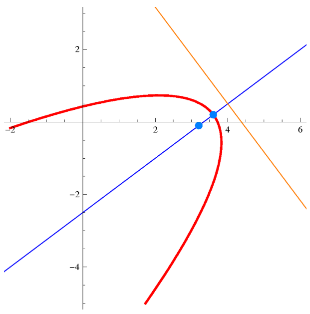
(c) Faça um esboço da cônica indicando os elementos determinados no item (b).

4.1. Respostas

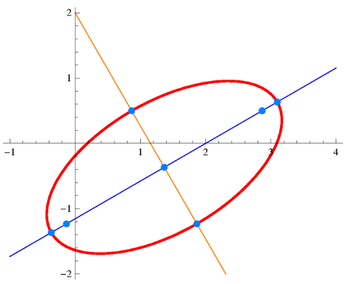
1. (a) A equação nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$ é $\overline{x}^2 - 4\overline{y}^2 = 36$, onde $\overline{x} = \frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{y}{\sqrt{5}}$ e $\overline{y} = -\frac{x}{\sqrt{5}} + \frac{2y}{\sqrt{5}}$. (b) Reta focal $x - 2y = 0$; assíntotas $4x - 3y = 0$ e $y = 0$; centro $(0, 0)$; vértices $\left(-\frac{12\sqrt{5}}{5}, -\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(\frac{12\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$; focos $(6, 3)$ e $(-6, -3)$. (c) Veja a figura, abaixo.



2. (a) A equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ é $\overline{y}^2 = -2\overline{x}$, onde $\overline{x} = \frac{4x}{5} + \frac{3y}{5} - 3$ e $\overline{y} = -\frac{3x}{5} + \frac{4y}{5} + 2$. (b) Vértice $\left(\frac{18}{5}, \frac{1}{5}\right)$; foco $\left(\frac{32}{10}, -\frac{1}{10}\right)$; reta focal $-3x + 4y = -10$; diretriz $8x + 6y = 35$. (c) Veja a figura, abaixo.

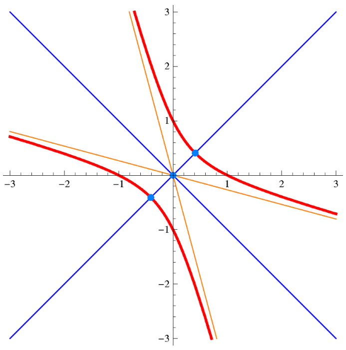


3. (a) Centro $\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-\sqrt{3}}{2}\right)$; vértices sobre a reta focal: $\left(\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\frac{1+3\sqrt{3}}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$; vértices sobre a reta não-focal: $\left(\frac{2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; focos: $\left(\frac{-2+\sqrt{3}}{2}, \frac{1-2\sqrt{3}}{2}\right)$ e $\left(\frac{4+\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$; reta focal: $-x + \sqrt{3}\,y = -2$; reta não-focal: $\sqrt{3}x + y = 2$. (b) Veja a figura, abaixo. (c) A reta $-x + \sqrt{3}\,y = 1$ se escreve $\overline{y} = \frac{1}{2}$ nas coordenadas $\overline{x}$, $\overline{y}$, a curva está contida no semi-plano $\overline{y} \leq 0$.



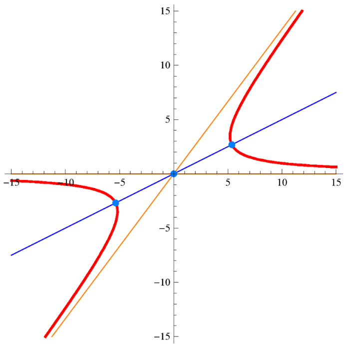
4. Por uma rotação de 45^o do sistema de eixos OXY as curvas $\mathcal{P}: x^2+2xy+y^2-x+y=1$ e $C:(x+9)^2+(y-9)^2=1$ se escrevem, no novo sistema de eixos $O\overline{X}\,\overline{Y}$, como $\overline{\mathcal{P}}: \overline{x}^2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\overline{y}-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ e $\overline{C}: \overline{x}^2+(\overline{y}-9\sqrt{2})^2=1$, onde $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x}-\overline{y})$ e $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x}+\overline{y})$. Como a parábola $\mathcal{P}$ está abaixo de sua diretriz $\overline{y}=\frac{5\sqrt{2}}{8}$ temos que $\overline{\mathcal{P}}\subset\left\{(\overline{x},\overline{y})\,\middle|\,\overline{y}<\frac{5\sqrt{2}}{8}\right\}$. Por outro lado $\overline{C}\subset\left\{(\overline{x},\overline{y})\,\middle|\,\overline{y}\geq 9\sqrt{2}-1\right\}$. Como $9\sqrt{2}-1>\frac{5\sqrt{2}}{8}$, temos que $\overline{C}\cap\overline{\mathcal{P}}=\varnothing$ e, portanto, $C\cap\mathcal{P}=\varnothing$.

5. (a) Por uma rotação de 45^o do sistema OXY, a família $\lambda x^2+4xy+\lambda y^2=1$, $\lambda\in\mathbb{R}$, é dada por $(\lambda+2)\overline{x}^2+(\lambda-2)\overline{y}^2=1$, $\lambda\in\mathbb{R}$, onde $x=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x}-\overline{y})$ e $y=\frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x}+\overline{y})$. (b) Se $\lambda\leq-2$, a equação representa o conjunto vazio. Se $-2<\lambda<2$, a equação representa uma hipérbole com centro na origem e reta focal $y=x$. Se $\lambda=2$, a equação representa uma elipse com centro na origem e reta focal $y=-x$. (c) A curva é uma hipérbole de centro na origem, vértices $\left(\frac{\sqrt{6}}{6},\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{6}}{6},-\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$, e assíntotas $-(1+\sqrt{3})x+(1-\sqrt{3})y=0$ e $(-1+\sqrt{3})x+(1+\sqrt{3})y=0$. Veja a figura, abaixo.

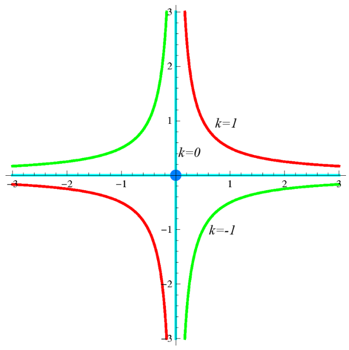


6. Como $I=0$ a cônica é de tipo parabolico que se escreve, na forma canônica, $5\overline{x}^2-4=0$, correspondendo assim a um par de retas (cônica degenerada) $\overline{x}=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$ e $\overline{x}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

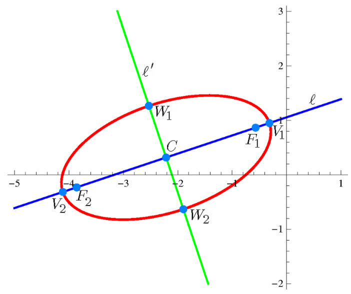
7. Como $I=16>0$ a cônica é de tipo hiperbólico. No sistema rotacionado $O\overline{X}\,\overline{Y}$, a equação da cônica é $\frac{\overline{x}^2}{6^2}-\frac{\overline{y}^2}{3^2}=1$. Nesse mesmo sistema, os vértices são $(6,0)$ e $(-6,0)$ e as assíntotas são $\overline{x}-2\overline{y}=0$ e $\overline{x}+2\overline{y}=0$. Usando as relações de mudança de coordenadas $\begin{cases} x=\frac{2\sqrt{5}}{5}\overline{x}-\frac{\sqrt{5}}{5}\overline{y}\\ y=\frac{\sqrt{5}}{5}\overline{x}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\overline{y}\end{cases}$ obtemos que as coordenadas dos vértices, nas coordenadas OXY são $\left(-\frac{12\sqrt{5}}{5},-\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$ e $\left(\frac{12\sqrt{5}}{5},\frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$. Usando as relações de mudança de coordenadas $\begin{cases}\overline{x}=\frac{2\sqrt{5}}{5}x+\frac{\sqrt{5}}{5}y\\ \overline{y}=-\frac{\sqrt{5}}{5}x+\frac{2\sqrt{5}}{5}y\end{cases}$ obtemos que as equações das assíntotas, no sistema OXY são $4x-3y=0$ e $y=0$. Veja a figura, abaixo.



8. Como o indicador da cônica é $I = 4 > 0$ independentemente do valor de k, a cônica é de tipo hiperbólico. Seja $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema obtido por uma rotação de 45^o do sistema OXY, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a cônica se escreve: $\overline{x}^2 - \overline{y}^2 = k$. Portanto, ela representa uma hipérbole não degenerada para todo $k \neq 0$ e duas retas concorrentes (hipérbole degenerada) $x \pm y = 0$ no caso $k = 0$.



Ex. 8



Ex. 10 (c)

9. Para $1 \leq k \leq 2$ a equação representa o conjunto vazio. Para $k < 1$ a equação representa uma hipérbole de eixo-focal paralelo ao eixo-OX, para $2 < k3$ a equação representa uma elipse de eixo-focal paralelo ao eixo-OY.

10. (a) $\frac{(\overline{x}+2)^2}{4} + (\overline{y} - 1)^2 = 1$. (b) Centro $C = \left(-\frac{7}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; focos $F_1 = \left(\frac{-7+3\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)$ e $F_2 = \left(\frac{-7-3\sqrt{3}}{\sqrt{10}}, \frac{-1+\sqrt{3}}{\sqrt{10}}\right)$; vértices no eixo-focal $V_1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$ e $V_2 = \left(-\frac{13}{\sqrt{10}}, -\frac{1}{\sqrt{10}}\right)$; vértices no eixo não-focal $W_1 = \left(-4\sqrt{\frac{2}{5}}, 2\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$ e $W_2 = \left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}, -\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$; reta-focal $\ell : -x + 3y = \sqrt{10}$ e reta não-focal $\ell' : 3x + y = -2\sqrt{10}$. (c) Ver figura acima.

Capítulo 11

Definição geral de uma cônica

Neste Capítulo vamos apresentar e estudar as curvas cônicas a partir de três elementos característicos: uma reta diretriz, um foco e a excentricidade.

1. Definição geral de uma cônica

Definição 1

Seja $e > 0$ uma constante, F um ponto e $\mathcal{L}$ uma reta do plano tal que $F \notin \mathcal{L}$. A **cônica** $\mathcal{C}$ de excentricidade e, foco F e diretriz $\mathcal{L}$ é o conjunto que consiste dos pontos P do plano tais que:

$$\boxed{\frac{d(P,F)}{d(P,\mathcal{L})} = e}$$

Isto é, $\mathcal{C} = \left\{ P \mid \frac{d(P,F)}{d(P,\mathcal{L})} = e \right\}$.

Observação 1

• Quando $e = 1$, a cônica é uma **parábola**, que já foi estudada.

• Vamos provar que, se $0 < e < 1$, a cônica é uma **elipse**, e se $e > 1$, a cônica é uma **hipérbole**.

Para isso, escolheremos um sistema de eixos ortogonais OXY tal que (Fig. 1):

$$F = (0,0) \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L} : x = m\,,$$

onde $m > 0$. Temos, então, que:

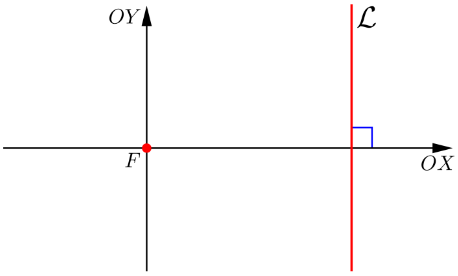


Fig. 1: escolha do sistema de eixos OXY.

$$P = (x, y) \in C$$

$$\iff \sqrt{x^2 + y^2} = e\,|x - m| \iff x^2 + y^2 = e^2(x - m)^2$$

$$\iff x^2 + y^2 = e^2(x^2 - 2mx + m^2)$$

$$\iff (1 - e^2)\left(x^2 + \frac{2me^2}{1 - e^2}\,x\right) + y^2 = m^2e^2$$

$$\iff (1 - e^2)\left(x + \frac{me^2}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = m^2e^2 + \frac{(1 - e^2)m^2e^4}{(1 - e^2)^2}$$

$$\iff (1 - e^2)\left(x + \frac{me^2}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = m^2e^2\left(1 + \frac{e^2}{1 - e^2}\right)$$

$$\iff (1 - e^2)\left(x + \frac{me^2}{1 - e^2}\right)^2 + y^2 = \frac{m^2e^2}{1 - e^2}$$

$$\iff \boxed{\frac{\left(x + \frac{me^2}{1 - e^2}\right)^2}{\frac{m^2e^2}{(1 - e^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{m^2e^2}{1 - e^2}} = 1} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \textbf{Nesta equação, o termo} \\ \quad 1 - e^2 \\ \textbf{determina o sinal do} \\ \textbf{coeficiente de } y^2\,\textbf{!} \end{array} \right. \qquad (\star)$$

• **Se** $0 < e < 1$, então $1 - e^2 > 0$. Assim, C é uma **elipse**, cuja reta focal é o eixo$-OX$.

Como $0 < 1 - e^2 < 1$, temos $0 < (1 - e^2)^2 < 1 - e^2 < 1$, logo:

$$\frac{m^2e^2}{(1 - e^2)^2} > \frac{m^2e^2}{1 - e^2}\,.$$

Assim, $a = \dfrac{me}{1 - e^2}$, $b = \dfrac{me}{\sqrt{1 - e^2}}$, e

$$c^2 = a^2 - b^2 = \frac{m^2e^2}{1 - e^2}\left(\frac{1}{1 - e^2} - 1\right) = \frac{m^2e^2}{1 - e^2}\left(\frac{e^2}{1 - e^2}\right)$$

$$\Longrightarrow c^2 = \frac{m^2e^4}{(1 - e^2)^2} \Longrightarrow \boxed{c = \frac{me^2}{1 - e^2}}\,.$$

Além disso:

- $\dfrac{c}{a} = \dfrac{me^2}{1-e^2} \cdot \dfrac{1-e^2}{me} = e$ é a excentricidade.
- $C = \left(\dfrac{-me^2}{1-e^2}, 0\right)$ é o centro.
- $F_1 = C + (c, 0) = (0,0) = F$ é um foco.
- $\mathcal{L} : x = +m$ é perpendicular à reta focal = eixo$-OX$

e

$$\begin{aligned} d(C, \mathcal{L}) &= |x - m| = \left| -\frac{me^2}{1-e^2} - m \right| = \left| \frac{me^2}{1-e^2} + m \right| \\ &= m \left| \frac{e^2 + 1 - e^2}{1-e^2} \right| = \frac{m}{1-e^2} = \frac{a}{e}. \end{aligned}$$

• **Se** $e > 1$ então $1 - e^2 < 0$ e o coeficiente de y^2 na equação $(\star)$ é negativo. Logo C é uma **hipérbole** com reta-focal = eixo$-OX$, pois

$$\frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{m^2e^2}{1-e^2} < 0.$$

Assim,

$$C : \frac{\left(x + \dfrac{me^2}{1-e^2}\right)^2}{\dfrac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}} - \frac{y^2}{\dfrac{m^2e^2}{e^2-1}} = 1,$$

onde

$$a = \sqrt{\frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2}} = \frac{me}{e^2-1}, \qquad b = \sqrt{\frac{m^2e^2}{e^2-1}} = \frac{me}{\sqrt{e^2-1}},$$

e

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 = \frac{m^2e^2}{(1-e^2)^2} + \frac{m^2e^2}{e^2-1} \\ &= \frac{m^2e^2}{1-e^2} \left(\frac{1}{1-e^2} - 1 \right) \\ &= \frac{m^2e^2}{1-e^2} \left(\frac{1 - 1 + e^2}{1-e^2} \right) = \frac{m^2e^4}{(1-e^2)^2} \\ &\Longrightarrow \quad c = \frac{me^2}{e^2-1}. \end{aligned}$$

Também:

- $\dfrac{c}{a} = \dfrac{me^2}{e^2-1} \cdot \dfrac{e^2-1}{me} = e$ é a excentricidade,
- $C = \left(-\dfrac{me^2}{1-e^2}, 0\right)$ é o centro,
- $F_1 = C + (c,0) = (0,0) = F$ é um foco,
- $\mathcal{L} : x = m$ é perpendicular à reta-focal = eixo$-OX$ e

$$\begin{aligned} d(C,\mathcal{L}) &= |x-m| = \left|-\frac{me^2}{1-e^2} - m\right| = \left|\frac{me^2}{1-e^2} + m\right| \\ &= m\left|\frac{e^2}{1-e^2} + 1\right| = m\left|\frac{1}{1-e^2}\right| = \frac{m}{e^2-1} = \frac{a}{e} \end{aligned}$$

1.1. Elipse

No caso de uma elipse de focos F_1 e F_2 temos duas diretrizes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ correspondentes a cada um dos focos.

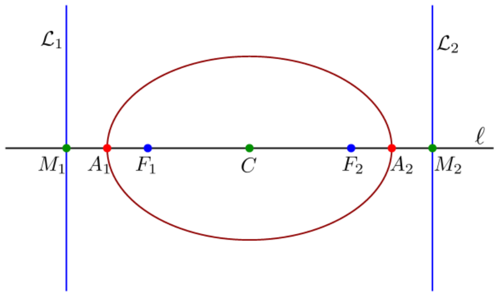


Fig. 2: Focos, vértices e diretrizes da elipse.

A diretriz $\mathcal{L}_i$ correspondente ao foco F_i, $i = 1, 2$, é a reta perpendicular à reta focal que está à distância $\dfrac{a}{e}$ do centro, com o foco F_i pertencente ao segmento CM_i, onde M_i é o ponto da interseção da reta focal ℓ com $\mathcal{L}_i$.

- Para a elipse (Fig. 3)

$$\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,,$$

de centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo-OX, a diretriz $\mathcal{L}_1 : x = x_0 - \dfrac{a}{e}$ corresponde ao foco $F_1 = (x_0 - c, y_0)$ e a diretriz $\mathcal{L}_2 : x = x_0 + \dfrac{a}{e}$ corresponde ao foco $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

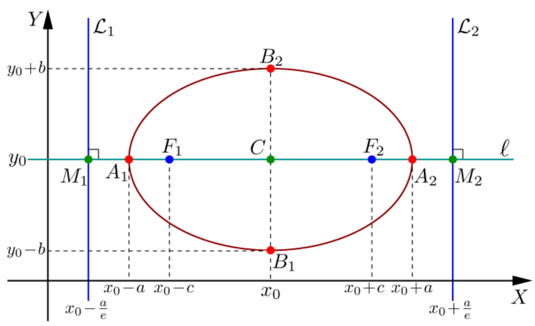


Fig. 3: $\mathcal{E} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

• Para a elipse (Fig. 4)

$$\mathcal{E} : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1\,,$$

de centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$, a diretriz

$$\mathcal{L}_1 : y = y_0 - \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_1 = (x_0, y_0 - c)$, enquanto que a diretriz

$$\mathcal{L}_2 : y = y_0 + \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.

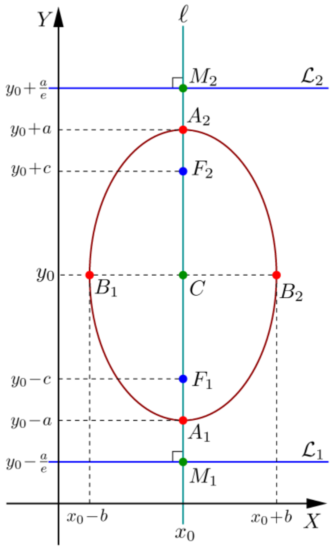


Fig. 4: $\mathcal{E} : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} + \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.

1.2. Hipérbole

No caso de uma hipérbole de focos F_1 e F_2 temos, também, duas diretrizes $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ correspondentes a cada um dos focos.

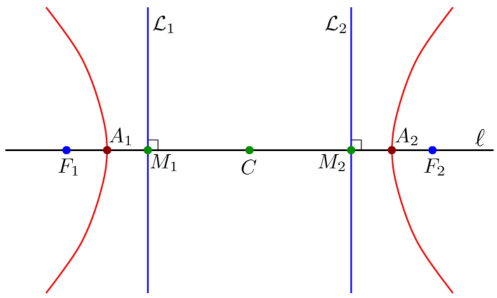


Fig. 5: Focos, vértices e diretrizes da hipérbole.

A diretriz $\mathcal{L}_1$ (respectivamente L_2) correspondente ao foco F_1 (resp. F_2), é a reta perpendicular à reta focal que está à distância $\frac{a}{e}$ do centro, com $M_1 \in CF_1$ (resp. $M_2 \in CF_2$), sendo M_1 (resp. M_2) o ponto de interseção da diretriz $\mathcal{L}_1$ (resp. $\mathcal{L}_2$) com a reta focal ℓ.

• Para a hipérbole (Fig. 6)

$$\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1\,,$$

com centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OX$, a diretriz $\mathcal{L}_1 : x = x_0 - \frac{a}{e}$ corresponde ao foco $F_1 = (x_0 - c, y_0)$, enquanto

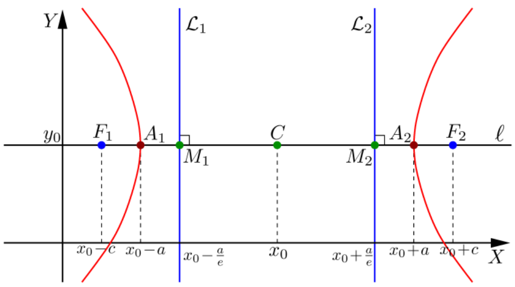


Fig. 6: $\mathcal{H} : \frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$.

que a diretriz $\mathcal{L}_2 : x = x_0 + \dfrac{a}{e}$ corresponde ao foco $F_2 = (x_0 + c, y_0)$.

• Para a hipérbole (Fig. 7)

$$\mathcal{H} : \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1\,,$$

de centro $C = (x_0, y_0)$ e reta focal

$$\ell : x = x_0$$

paralela ao eixo$-OY$, a diretriz

$$\mathcal{L}_1 : y = y_0 - \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_1 = (x_0, y_0 - c)$, enquanto que a diretriz

$$\mathcal{L}_2 : y = y_0 + \frac{a}{e}$$

corresponde ao foco $F_2 = (x_0, y_0 + c)$.

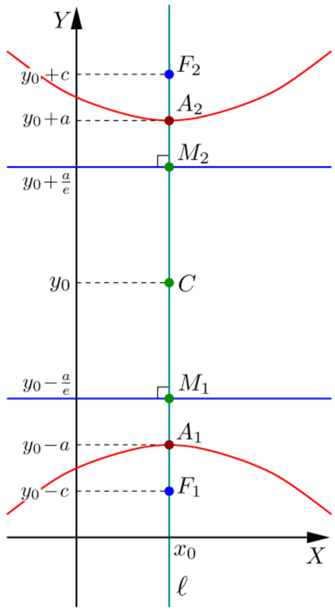


Fig. 7: $\mathcal{H} : \frac{(y-y_0)^2}{a^2} - \frac{(x-x_0)^2}{b^2} = 1$.

Exemplo 1

Determine os focos, os vértices e as equações das diretrizes das cônicas abaixo. Faça um esboço da curva correspondente.

(a) $5x^2 + 9y^2 = 45$.

Solução.

A equação se escreve na forma $\mathcal{E} : \dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{5} = 1$ e representa a elipse com centro $C = (0, 0)$; reta focal: $y = 0$ (eixo$-OX$); $a^2 = 9$; $b^2 = 5$; $c^2 = a^2 - b^2 = 4$; focos: $F_1 = (-2, 0)$ e $F_2 = (2, 0)$; vértices sobre a reta focal: $A_1 = (-3, 0)$ e $A_2 = (3, 0)$; vértices sobre a reta não-focal: $B_1 = (0, -\sqrt{5})$ e $B_2 = (0, \sqrt{5})$; reta não-focal: $x = 0$ (eixo$-OY$); excentricidade $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{2}{3}$; diretrizes: $\mathcal{L}_1 : x = -\dfrac{a}{e} = -\dfrac{9}{2}$ e $\mathcal{L}_2 : x = \dfrac{a}{e} = \dfrac{9}{2}$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente. □

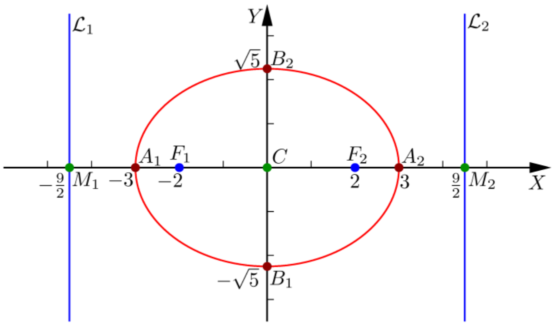


Fig. 8: Elipse $\mathcal{E} : 5x^2 + 9y^2 = 45$.

(b) $2y^2 - 7x^2 = 14$.

Solução.

A equação se escreve na forma

$$\mathcal{H} : \frac{y^2}{7} - \frac{x^2}{2} = 1,$$

e representa a hipérbole de centro $C = (0,0)$; reta focal $\ell : x = 0$ (eixo$-OY$); $a^2 = 7$; $b^2 = 2$; $c^2 = a^2 + b^2 = 9$; focos: $F_1 = (0,-3)$ e $F_2 = (0,3)$; vértices: $A_1 = (0,-\sqrt{7})$ e $A_2 = (0,\sqrt{7})$; vértices imaginários: $B_1 = (-\sqrt{2},0)$ e $B_2 = (\sqrt{2},0)$; excentricidade: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{3}{\sqrt{7}}$; diretrizes: $\mathcal{L}_1 : y = -\dfrac{a}{e} = -\dfrac{7}{3}$ e $\mathcal{L}_2 : y = \dfrac{a}{e} = \dfrac{7}{3}$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente, e assíntotas: $r_\pm : x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}y$. □

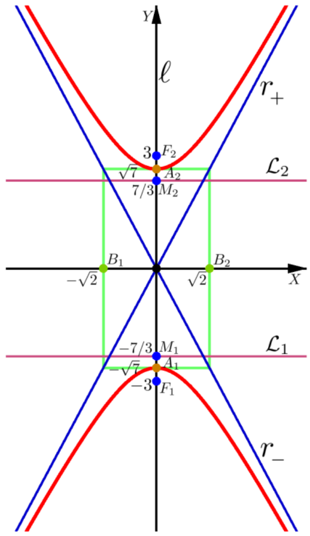


Fig. 9: $\mathcal{H} : 2y^2 - 7x^2 = 14$.

(c) $9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191$.

Solução.

Completando os quadrados na equação, temos:

$$\begin{aligned}
& 9(x^2 - 2x) + 25(y^2 - 2y) = 191 \\
\iff\ & 9(x^2 - 2x + 1) + 25(y^2 - 2y + 1) = 191 + 9 + 25 \\
\iff\ & 9(x-1)^2 + 25(y-1)^2 = 225 \\
\iff\ & \mathcal{E} : \frac{(x-1)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{9} = 1\,.
\end{aligned}$$

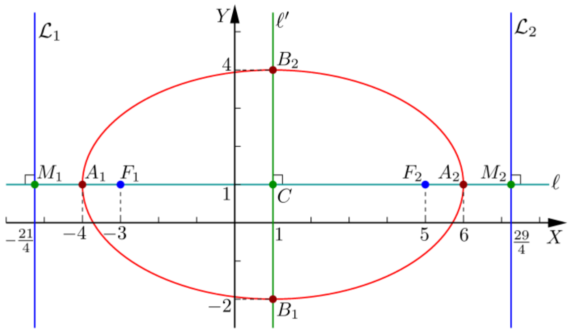


Fig. 10: Elipse $\mathcal{E} : 9x^2 - 18x + 25y^2 - 50y = 191$.

Assim, a cônica é a elipse (Fig. 10) com centro $C = (1, 1)$; reta focal $\ell : y = 1$, paralela ao eixo$-OX$; $a^2 = 25$, $b^2 = 9$, $c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 9 = 16$; os pontos $A_1 = (1 - a, 1) = (-4, 1)$ e $A_2 = (1 + a, 1) = (6, 1)$ são os vértices sobre a reta focal; os focos são os pontos: $F_1 = (1 - c, 1) = (-3, 1)$ e $F_2 = (1 + c, 1) = (5, 1)$; os vértices sobre a reta não-focal são: $B_1 = (1, 1 - b) = (1, -2)$ e $B_2 = (1, 1 + b) = (1, 4)$; a reta não-focal $\ell' : x = 1$ é paralela ao eixo$-OY$; sua excentricidade é: $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{4}{5}$; e as diretrizes são: $\mathcal{L}_1 : x = 1 - \dfrac{a}{e} = 1 - \dfrac{25}{4} = -\dfrac{21}{4}$ e $\mathcal{L}_2 : x = 1 + \dfrac{a}{e} = 1 + \dfrac{25}{4} = \dfrac{29}{4}$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente. □

Exemplo 2

Considere a elipse de centro $C = (1, 1)$, foco $(3, 2)$ e excentricidade $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$. Determine os vértices, o outro foco, as diretrizes e a equação da elipse. Faça, também, um esboço da curva.

Solução.

Seja $F_2 = (3, 2)$ o foco dado. Temos que:

$$c = d(C, F_2) = \sqrt{(3-1)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}.$$

Como $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$, temos $a = 3$. Logo $b^2 = a^2 - c^2 = 9 - 5 = 4$.

Seja F_1 o outro foco. Então $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$, isto é,

$$F_1 = 2C - F2 = 2(1, 1) - (3, 2) = (-1, 0).$$

Seja ℓ a reta focal. Como $\ell \parallel CF_2 \parallel O\tilde{F}$, onde $\tilde{F} = F_2 - C = (2, 1)$, isto é, ℓ é perpendicular ao segmento da origem até o ponto $(1, -2)$, e

$C = (1,1) \in \ell$, obtemos:

$$\ell : x - 2y = -1\,.$$

Sejam $A_1 = (2y_1 - 1, y_1)$ e $A_2 = (2y_2 - 1, y_2)$ os vértices sobre a reta focal.

Como $d(A_1, C) = d(A_2, C) = a = 3$, temos que y_1 e y_2 são as raízes da equação $d((2y-1, y), C)^2 = 3^2$, que resolvemos da seguinte maneira:

$$\begin{aligned}
& d((2y-1,y),C)^2 = 3^2 && \iff && (2y-1-1)^2 + (y-1)^2 = 9 \\
\iff\ & 4(y-1)^2 + (y-1)^2 = 9 && \iff && 5(y-1)^2 = 9 \\
\iff\ & (y-1)^2 = \frac{9}{5} && \iff && y - 1 = \pm\frac{3}{\sqrt{5}} \\
\iff\ & y = 1 \pm \frac{3}{\sqrt{5}} && \iff && y_1 = 1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\,, \quad \text{e} \quad y_2 = 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\,.
\end{aligned}$$

Logo,

$$x_1 = 2y_1 - 1 = 2\left(1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 1 - \frac{6}{\sqrt{5}}\,,$$

e

$$x_2 = 2y_2 - 1 = 2\left(1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right) - 1 = 1 + \frac{6}{\sqrt{5}}\,.$$

Assim,

$$A_1 = \left(1 - \frac{6}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{3}{\sqrt{5}}\right) \quad \text{e} \quad A_2 = \left(1 + \frac{6}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{3}{\sqrt{5}}\right),$$

são os vértices sobre a reta focal.

Seja ℓ' a reta não-focal. Então

$$\ell' \parallel (1,-2) \parallel \frac{(1,-2)}{\sqrt{5}} \quad \text{e} \quad C = (1,1) \in \ell'.$$

Logo, a reta não focal ℓ' é dada pelas equações paramétricas:

$$\ell' : \begin{cases} x = 1 + \dfrac{t}{\sqrt{5}} \\ y = 1 - \dfrac{2t}{\sqrt{5}} \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

Seja B um dos vértices sobre a reta não-focal.

Então,

$$B = (1,1) + t\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\,,$$

e

$$|BC| = |t|\,\left|\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right| = |t| = b = 2\,,$$

ou seja, $t = \pm 2$. Logo,

$$B_1 = (1,1) - 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(1 - \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 + \frac{4}{\sqrt{5}}\right)$$
$$B_2 = (1,1) + 2\left(\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{5}}, 1 - \frac{4}{\sqrt{5}}\right),$$

são os vértices sobre a reta não-focal.

Como $\ell' \perp (2,1)$ e $C = (1,1) \in \ell'$, temos que $\ell' : 2x + y = 3$ é a equação cartesiana da reta não-focal.

Sejam $\mathcal{L}_1$ e $\mathcal{L}_2$ as diretrizes da elipse. Como essas retas são paralelas à reta não focal ℓ' e estão a distância $\dfrac{a}{e} = \dfrac{9}{\sqrt{5}}$ de ℓ', temos que:

$$\mathcal{L}_1 : 2x + y = m_1\,, \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}_2 : 2x + y = m_2\,,$$

onde

$$\frac{|m_1 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{|m_2 - 3|}{\sqrt{4+1}} = \frac{a}{e} = \frac{9}{\sqrt{5}}\,.$$

Isto é, m_1 e m_2 são as soluções da equação $|m - 3| = 9$. Portanto, $m_1 = 3 - 9 = -6$ e $m_2 = 3 + 9 = 12$. Logo as diretrizes da elipse são:

$$\mathcal{L}_1 : 2x + y = -6\,, \qquad \text{e} \qquad \mathcal{L}_2 : 2x + y = 12\,.$$

Além disso, como $2 \cdot 3 + 2 = 8 < 12$, o foco $F_2 = (3,2)$ está no semi-plano $2x + y < 12$ e, como $2 \cdot 3 + 2 = 8 > 3$, o foco F_2 está no semi-plano $2x + y > 3$. Logo o foco F_2 é o foco correspondente à diretriz $\mathcal{L}_2$ e, consequentemente, o foco $F_1 = (-1,0)$ é o foco correspondente à diretriz $\mathcal{L}_1$.

Determinemos a equação da elipse $\mathcal{E}$.

Temos que $P = (x,y) \in \mathcal{E}$ se, e somente se,

$$\frac{d(P,F_2)}{d(P,\mathcal{L}_2)} = \frac{\sqrt{(x-3)^2 + (y-2)^2}}{\dfrac{|2x + y - 12|}{\sqrt{4+1}}} = \frac{\sqrt{5}}{3} = e\,,$$

isto é, se, e só se,

$$9\left((x-3)^2 + (y-2)^2\right) = |2x + y - 12|^2\,,$$
$$\iff 9\left(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4\right) = (2x + y - 12)^2\,,$$
$$\iff 9\left(x^2 - 6x + 9 + y^2 - 4y + 4\right) = 4x^2 + y^2 + 4xy - 48x - 24y + 144\,,$$
$$\iff \mathcal{E} : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y - 27 = 0\,,$$

Na figura 11 mostramos o esboço da elipse $\mathcal{E}$. □

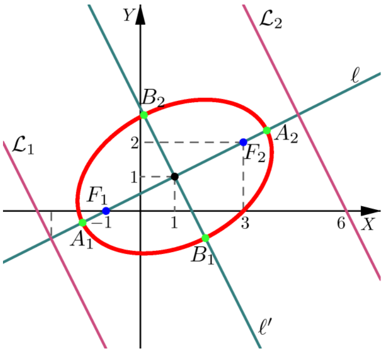


Fig. 11: Elipse $\mathcal{E} : 5x^2 - 4xy + 8y^2 - 6x - 12y - 27 = 0$.

Exemplo 3

Determine o vértice e a equação da parábola $\mathcal{P}$ que tem foco na origem e a reta $\mathcal{L} : 2x + y = 1$ como diretriz.

Solução.

Temos que um ponto $P = (x, y)$ pertence à parábola $\mathcal{P}$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$, ou seja, se, e somente se,

$$\sqrt{x^2 + y^2} = \frac{|2x + y - 1|}{\sqrt{5}} \iff x^2 + y^2 = \frac{(2x + y - 1)^2}{5}$$
$$\iff 5x^2 + 5y^2 = 4x^2 + 4xy + y^2 - 4x - 2y + 1\,.$$

Logo $x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$ é a equação da parábola $\mathcal{P}$.

A reta focal da parábola, ℓ, é a reta perpendicular à diretriz $\mathcal{L}$ que passa pelo foco $F = (0, 0)$. Então $\ell : x - 2y = 0$.

Seja $A = (x, y)$ o ponto de interseção de ℓ e $\mathcal{L}$. Então as coordenadas x e y satisfazem o sistema

$$\begin{cases} x = 2y \\ 2x + y = 1. \end{cases}$$

Substituindo $x = 2y$ na segunda equação, obtemos $5y = 1$, ou seja, $y = \dfrac{1}{5}$.

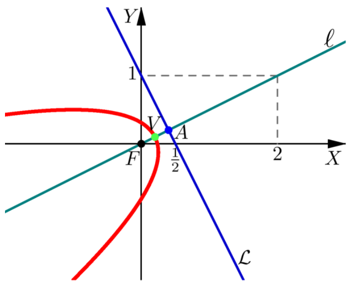


Fig. 12: Parábola $\mathcal{P} : x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x + 2y - 1 = 0$.

Logo $x = 2y = \dfrac{2}{5}$ e $A = \left(\dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{5}\right)$. Seja V o vértice da parábola. Como $d(V, F) = d(V, \mathcal{L}) = d(V, A)$, temos que V é o ponto médio do segmento FA, isto é,

$$V = \frac{A+F}{2} = \left(\frac{2}{10}, \frac{1}{10}\right) = \left(\frac{1}{5}, \frac{1}{10}\right).$$

A parábola $\mathcal{P}$ é esboçada na figura 12. $\square$

Exemplo 4

Determine o foco e a equação da parábola $\mathcal{P}$ que tem vértice no ponto $V = (2, 1)$ e a reta $\mathcal{L} : 4x + 3y = 1$ como diretriz.

Solução.

A reta focal ℓ é perpendicular ao segmento da origem ao ponto $(3, -4)$ e passa pelo vértice. Então $\ell : 3x - 4y = 2$.

Seja $A = (x, y)$ o ponto de interseção das retas ℓ e $\mathcal{L}$. Então,

$$\begin{cases} 4x + 3y = 1 & (\cdot 4) \\ 3x - 4y = 2 & (\cdot 3) \end{cases} \iff \begin{cases} 16x + 12y = 4 \\ 9x - 12y = 6 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow 25x = 10\,,\; x = \frac{2}{5} \;\text{ e }\; y = \frac{1-4x}{3} = -\frac{1}{5}.$$

Isto é, $A = \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right)$.

Como V é o ponto médio do segmento AF, temos que $V = \dfrac{A+F}{2}$. Logo,

$$F = 2V - A = (4, 2) - \left(\frac{2}{5}, -\frac{1}{5}\right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{11}{5}\right).$$

Determinemos a equação da parábola $\mathcal{P}$.

Temos que $P = (x, y) \in \mathcal{P}$ se, e só se, $d(P, F) = d(P, \mathcal{L})$. Temos então:

$$d(P,F) = d(P,\mathcal{L}) \iff \left(x - \frac{18}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{11}{5}\right)^2 = \frac{|4x + 3y - 1|^2}{25}$$

$$\begin{aligned} \iff \quad & 25\left(x^2 - \frac{36}{5}x + \frac{324}{25}\right) + 25\left(y^2 - \frac{22}{5}y + \frac{121}{25}\right) \\ & = 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 8x - 6y + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iff \quad & 25x^2 - 180x + 324 + 25y^2 - 110y + 121 \\ & = 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 8x - 6y + 1. \end{aligned}$$

Logo

$$\mathcal{P} : 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 172x - 104y + 444 = 0$$

é a equação da parábola $\mathcal{P}$.

Na figura 13 mostramos o esboço do gráfico da parábola $\mathcal{P}$. $\square$

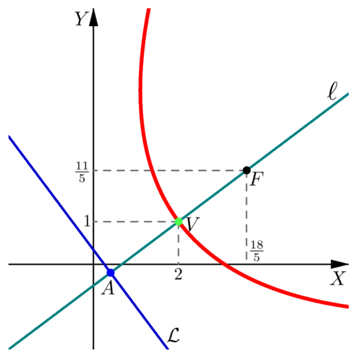


Fig. 13: Parábola $\mathcal{P} : 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 172x - 104y + 444 = 0$.

Exemplo 5

Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$ e seus principais elementos, conhecendo-se um dos seus focos $(3,0)$, a equação da diretriz $x + y = 1$ correspondente a esse foco e a sua excentricidade $e = 1/2$. Faça, também, um esboço da curva.

Solução.

Seja $\mathcal{L}_1 : x + y = 1$ a diretriz correspondente ao foco $F_1 = (3,0)$.

Temos que $P = (x,y) \in \mathcal{E}$ se, e somente se, $\dfrac{d(P,F_1)}{d(P,\mathcal{L}_1)} = e = \dfrac{1}{2}$. Isto é,

$$\begin{aligned}
& P = (x,y) \in \mathcal{E} \\
\iff\ & 2\,d(P,F) = d(P,\mathcal{L}_1) \iff 4\,d(P,F)^2 = d(P,\mathcal{L}_1)^2 \\
\iff\ & 4((x-3)^2 + y^2) = \frac{(x+y-1)^2}{2} \\
\iff\ & 8(x^2 - 6x + 9 + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y + 1\,.
\end{aligned}$$

Logo $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$ é a equação da elipse $\mathcal{E}$.
Seja C o centro de $\mathcal{E}$. Como

$$d(F_1,\mathcal{L}_1) = d(C,\mathcal{L}_1) - d(C,F_1) = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ae = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2}\,,$$

e $d(F_1,\mathcal{L}_1) = \dfrac{|3+0-1|}{\sqrt{2}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, temos $\dfrac{3}{2}a = \sqrt{2}$, ou seja, $a = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}$.

Logo $c = ae = \dfrac{2}{3}\sqrt{2}\,\dfrac{1}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{3}$ e $b^2 = a^2 - c^2 = \dfrac{8}{9} - \dfrac{2}{9} = \dfrac{6}{9} = \dfrac{2}{3}$, isto é, $b = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

A reta focal é a reta ℓ perpendicular a $\mathcal{L}_1$ que passa pelo foco $F_1 = (3,0)$. Logo, a equação cartesiana de ℓ é $\ell : x - y = 3$, e

$$\ell : \begin{cases} x = t + 3 \\ y = t \end{cases} ; \quad t \in \mathbb{R},$$

são as equações paramétricas de ℓ.

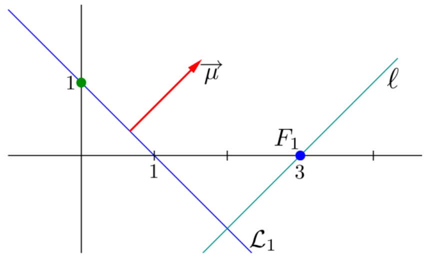


Fig. 14: Posição de F_1 com respeito a $\mathcal{L}_1$.

Como o foco $F_1 = (3,0)$ está contido no semi-plano $x + y > 1$, determinado pela diretriz $\mathcal{L}_1 : x + y = 1$ e a cônica é uma elipse, temos que o centro $C \in \ell$ é da forma $C = (3 + t, t)$, para algum $t > 0$.

Além disto, $d(F_1, C) = c = d((t,t),(0,0)) = t\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$. Logo, $t = \frac{1}{3}$, e $C = \left(\frac{1}{3} + 3, \frac{1}{3}\right) = \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

Seja A_1 o vértice sobre a reta focal ℓ que está entre F_1 e $\mathcal{L}_1$.
Então $A_1 = C + t(1,1)$ para algum $t < 0$.

Como $d(A_1, C) = |t|\sqrt{2} = -t\sqrt{2} = a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, temos $t = -\frac{2}{3}$.

Logo, $A_1 = \left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{3}(1,1) = \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right)$.

Seja A_2 o outro vértice sobre a reta focal. Então $C = \frac{A_1 + A_2}{2}$, ou seja,

$$A_2 = 2C - A_1 = 2\left(\frac{10}{3}, \frac{1}{3}\right) - \left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{12}{3}, \frac{3}{3}\right) = (4,1)\ .$$

Se F_2 é o outro foco, $C = \frac{F_1 + F_2}{2}$, isto é,

$$F_2 = 2C - F_1 = \left(\frac{20}{3}, \frac{2}{3}\right) - (3,0) = \left(\frac{11}{3}, \frac{2}{3}\right).$$

Seja ℓ' a reta não-focal. Como ℓ' é perpendicular a ℓ e passa pelo centro C, temos que:

$$\ell' : x + y = \frac{11}{3}.$$

Sejam B_1 e B_2 os vértices sobre a reta não-focal. Como $\ell' \parallel (1,-1)$ e $C \in \ell'$, temos que $B_i = C + t(1,-1)$ e $d(B_i, C) = |t|\sqrt{2} = b = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, $i = 1, 2$.

Logo $t = \pm\frac{1}{\sqrt{3}}$. Assim, os vértices sobre a reta não-focal ℓ' são:

$$B_1 = C + \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1) = \left(\frac{10}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right),$$
$$B_2 = C - \frac{1}{\sqrt{3}}(1,-1) = \left(\frac{10}{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Falta determinar a diretriz $\mathcal{L}_2$ associada ao foco F_2.

Como $\mathcal{L}_2 \parallel \ell'$ e $d(\ell', \mathcal{L}_2) = \frac{a}{e} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$, temos que $\mathcal{L}_2 : x + y = m$ e

$$d(\ell', \mathcal{L}_2) = \frac{|m - 11/3|}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}.$$

Logo $\left|m - \frac{11}{3}\right| = \frac{8}{3}$, isto é,

$$m = \frac{11}{3} + \frac{8}{3} = \frac{19}{3} \text{ ou } m = \frac{11}{3} - \frac{8}{3} = 1\,.$$

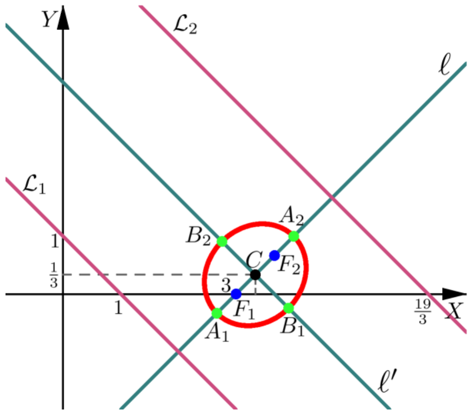


Fig. 15: $\mathcal{E} : 7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0$.

Assim, $\mathcal{L}_2 : x + y = \frac{19}{3}$, já que $x + y = 1$ é a diretriz $\mathcal{L}_1$.

Na figura 15, mostramos o esboço da elipse $\mathcal{E}$. □

Exemplo 6

O ponto $P_0 = (1, -2)$ pertence a uma cônica C em que um dos focos é o ponto $(-2, 2)$, sendo $2x - y = 1$ a diretriz correspondente a esse foco. Classifique a cônica, e determine sua equação e seus principais elementos.

Solução.

Sejam $F_1 = (-2, 2)$ e $\mathcal{L}_1 : 2x - y = 1$. Então,

$$P = (x, y) \in C \iff \frac{d(P, F_1)}{d(P, \mathcal{L}_1)} = e = \frac{d(P_0, F_1)}{d(P_0, \mathcal{L}_1)}.$$

Como

$$d(P_0, F_1) = \sqrt{(-2-1)^2 + (2-(-2))^2} = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$$

e

$$d(P_0, \mathcal{L}_1) = \frac{|2+2-1|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}},$$

temos que $e = \frac{5\sqrt{5}}{3} > 1$.

Então a cônica C é uma hipérbole, e $P = (x, y) \in C$ se, e somente se,

$\dfrac{d(P,F_1)}{d(P,\mathcal{L}_1)} = e = \dfrac{5\sqrt{5}}{3}$, isto é, se, e só se,

$$\frac{\sqrt{(x+2)^2+(y-2)^2}}{\dfrac{|2x-y-1|}{\sqrt{5}}} = \frac{5\sqrt{5}}{3}$$

$$\iff \quad 9((x+2)^2+(y-2)^2) = 25\,|2x-y-1|^2$$

$$\iff \quad 9(x^2+4x+4+y^2-4y+4) = 25\,(4x^2-4xy+y^2-4x+2y+1)\,.$$

Logo, $91x^2 - 100xy + 16y^2 - 136x + 86y - 47 = 0$ é a equação da hipérbole C.

Como

$$\begin{aligned} d(F_1,\mathcal{L}_1) &= c - \frac{a}{e} = ae - \frac{a}{e} = a\left(e - \frac{1}{e}\right) = a\left(\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{3}{5\sqrt{5}}\right) \\ &= a\left(\frac{5\sqrt{5}}{3} - \frac{3\sqrt{5}}{25}\right) = a\,\frac{\sqrt{5}}{75}\,(125-9) = \frac{116\sqrt{5}}{75}\,a\,, \end{aligned}$$

e $d(F_1,\mathcal{L}_1) = \dfrac{|-4-2-1|}{\sqrt{5}} = \dfrac{7}{\sqrt{5}} = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$, temos $\dfrac{116\sqrt{5}}{75}\,a = \dfrac{7\sqrt{5}}{5}$, isto é, $a = \dfrac{7\cdot 15}{116} = \dfrac{105}{116}$.

Logo, $c = ae = \dfrac{105}{116}\cdot\dfrac{5\sqrt{5}}{3} = \dfrac{175\sqrt{5}}{116}$ e

$$b^2 = c^2 - a^2 = \frac{175^2\cdot 5 - 105^2}{116^2} = \frac{5^2\cdot 7^2}{116^2}(125-9) = \frac{5^2\cdot 7^2}{116^2}\cdot 116 = \frac{5^2\cdot 7^2}{2^2\cdot 29}\,.$$

Assim, $b = \dfrac{5\cdot 7}{2\sqrt{29}} = \dfrac{35}{2\sqrt{29}} = \dfrac{35\sqrt{29}}{58}$.

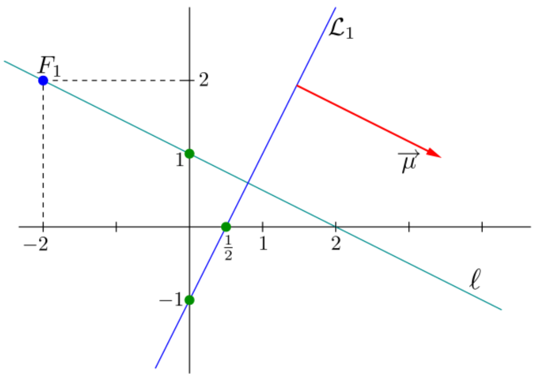


Fig. 16: Posição do centro C em relação à diretriz $\mathcal{L}_1$.

Como a reta focal ℓ é perpendicular a $\mathcal{L}_1$ e passa pelo foco F_1, temos que $\ell \perp (1,2)$ e, portanto, $\ell : x + 2y = 2$ é a equação cartesiana da reta focal.

Seja C o centro da hipérbole.

Como o foco $F_1 = (-2,2)$ pertence ao semi-plano $2x - y < 1$, determinado pela diretriz $\mathcal{L}_1$, e a cônica é uma hipérbole, temos que o centro $C = F_1 + t(2,-1)$ se encontra no semi-plano $2x - y > 1$.

Além disso, $d(C, F_1) = t\sqrt{5} = c = \dfrac{175\sqrt{5}}{116}$, isto é, $t = \dfrac{175}{116}$. Portanto,

$$\begin{aligned} C &= F_1 + \frac{175}{116}(2,-1) = (-2,2) + \frac{175}{116}(2,-1) = (-2,2) + \left(\frac{350}{116}, -\frac{175}{116}\right) \\ &= \left(\frac{-232+350}{116}, \frac{232-175}{116}\right) = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right). \end{aligned}$$

Seja A_1 o vértice da hipérbole entre C e F_1.
Então $A_1 = C + t(2,-1)$ para algum $t < 0$ e

$$d(A_1, C) = -t\sqrt{5} = a = \frac{105}{116}.$$

Logo, $t = -\dfrac{105}{116\sqrt{5}} = -\dfrac{21\sqrt{5}}{116}$, e

$$\begin{aligned} A_1 &= C - \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right) - \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) \\ &= \left(\frac{118-42\sqrt{5}}{116}, \frac{57+21\sqrt{5}}{116}\right). \end{aligned}$$

Seja A_2 o outro vértice da hipérbole. Então $C = \dfrac{A_1 + A_2}{2}$, isto é,

$$\begin{aligned} A_2 &= 2C - A_1 = 2C - C + \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) \\ &= C + \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right) + \frac{21\sqrt{5}}{116}(2,-1) \\ &= \left(\frac{118+42\sqrt{5}}{116}, \frac{57-21\sqrt{5}}{116}\right). \end{aligned}$$

Seja F_2 o outro foco da hipérbole. Então $C = \dfrac{F_1 + F_2}{2}$, isto é,

$$\begin{aligned} F_2 &= 2C - F_1 = 2\left(F_1 + \frac{175}{116}(2,-1)\right) - F_1 \\ &= 2F_1 + 2\,\frac{175}{116}(2,-1) - F_1 \\ &= F_1 + 2\,\frac{175}{116}(2,-1) = (-2,2) + \frac{175}{116}(4,-2) \\ &= \left(\frac{-2\cdot 116 + 175\cdot 4}{116}, \frac{2\cdot 116 - 175\cdot 2}{116}\right) = \left(\frac{468}{116}, -\frac{118}{116}\right). \end{aligned}$$

Seja ℓ' a reta não-focal. Como $\ell' \parallel \mathcal{L}_1$ e $C \in \ell'$, temos que

$$\ell' : 2x - y = \frac{2\cdot 118 - 57}{116} = \frac{179}{116}.$$

Seja $\mathcal{L}_2$ a diretriz associada ao foco F_2. Então $\mathcal{L}_2 \parallel \ell'$ e

$$d(\ell', \mathcal{L}_2) = \frac{a}{e} = \frac{105}{116} \cdot \frac{3}{5\sqrt{5}} = \frac{63}{116\sqrt{5}}.$$

Logo,

$$\mathcal{L}_2 : 2x - y = m \quad \text{e} \quad \frac{|m - 179/116|}{\sqrt{5}} = \frac{63}{116\sqrt{5}},$$

isto é, $m = \dfrac{242}{116}$ ou $m = \dfrac{116}{116} = 1$. Como a segunda alternativa corresponde à diretriz $\mathcal{L}_1$, temos que $\mathcal{L}_2 : 2x - y = \dfrac{242}{116}$.

Os vértices imaginários B da hipérbole estão sobre a reta não-focal ℓ' a distância b do centro.

Assim,

$$B = C + t(1,2) \quad \text{e} \quad d(B,C) = |t|\sqrt{5} = b = \frac{35\sqrt{29}}{58}.$$

Logo, $t = \pm\dfrac{7\sqrt{29 \cdot 5}}{58} = \pm\dfrac{7\sqrt{145}}{58}$, e

$$B_1 = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right) + \frac{7\sqrt{145}}{58}(1,2) \quad \text{e} \quad B_2 = \left(\frac{118}{116}, \frac{57}{116}\right) - \frac{7\sqrt{145}}{58}(1,2).$$

As assíntotas $r^{\pm}$ são as duas retas que passam pelo centro e têm inclinação $\pm\dfrac{b}{a}$, onde $\dfrac{b}{a} = \dfrac{35\sqrt{29}}{58} \cdot \dfrac{116}{105} = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \sqrt{29}}{3 \cdot 5 \cdot 7} = \dfrac{2}{3}\sqrt{29}$, em relação à reta focal $\ell : y = -\dfrac{x}{2} + 1$.

Então,

$$r_{\pm} : y - \frac{57}{116} = \operatorname{tg}(\theta \pm \varphi)\left(x - \frac{118}{116}\right),$$

onde $\operatorname{tg}\theta = -\dfrac{1}{2}$, e $\operatorname{tg}\varphi = \dfrac{b}{a} = \dfrac{2}{3}\sqrt{29}$. Logo,

$$r_{+} : y - \frac{57}{116} = \frac{25 - 3\sqrt{29}}{8}\left(x - \frac{118}{116}\right)$$

$$r_{-} : y - \frac{57}{116} = \frac{25 + 3\sqrt{29}}{8}\left(x - \frac{118}{116}\right),$$

pois

$$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \frac{\operatorname{tg}\theta + \operatorname{tg}\varphi}{1 - \operatorname{tg}\theta\operatorname{tg}\varphi} = \frac{-\dfrac{1}{2} + \dfrac{2\sqrt{29}}{3}}{1 + \dfrac{\sqrt{29}}{3}} = \frac{-3 + 4\sqrt{29}}{6 + 2\sqrt{29}} = \frac{25 - 3\sqrt{29}}{8},$$

e

$$\operatorname{tg}(\theta-\varphi)=\frac{\operatorname{tg}\theta-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\theta\,\operatorname{tg}\varphi}=\frac{-\dfrac{1}{2}-\dfrac{2\sqrt{29}}{3}}{1-\dfrac{\sqrt{29}}{3}}=-\frac{3+4\sqrt{29}}{6-2\sqrt{29}}=\frac{25+3\sqrt{29}}{8}.$$

Na figura 17 mostramos um esboço da hipérbole $\mathcal{C}$. □

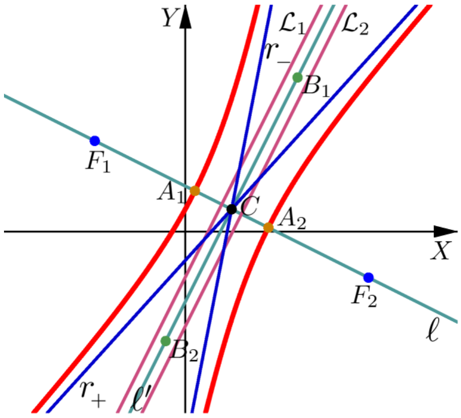


Fig. 17: $\mathcal{C}: 91x^2-100xy+16y^2-136x+86y-47=0$.

2. Exercícios de revisão

1. Determine a equação da cônica de foco $(-1,-2)$, diretriz $y=x+1$ e excentricidade $e=\dfrac{1}{2}$.

2. Determine a equação da cônica de foco na origem, diretriz $x+2y+2=0$ e excentricidade $e=1$.

3. Determine a equação da cônica de foco $(3,3)$, diretriz $x+3y-3=0$ e excentricidade $e=2$.

4. Determine a equação da cônica de foco $(1,-3)$, diretriz $3x+y-3=0$ e excentricidade $e=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$.

5. Para cada uma das cônicas dadas determine as coordenadas dos focos e as equações das diretrizes correspondentes.

(a) $16x^2-9y^2-144=0$.

(b) $5x^2 + y^2 = 5$.

(c) $2y^2 - 7x^2 = 14$.

(d) $9x^2 + 25y^2 - 18x - 50y - 191 = 0$.

6. Seja $\mathcal{H}$ a hipérbole com centro $C = (1, 0)$, foco $F = (1, \sqrt{13})$ localizado a distância $\dfrac{4}{\sqrt{13}}$ de sua diretriz correspondente.

(a) Determine os vértices, os vértices imaginários, o outro foco, as assíntotas, as diretrizes e a equação da hipérbole.

(b) Faça um esboço de $\mathcal{H}$ indicando os elementos determinados no item anterior.

7. Sejam $A_1 = (4, 1)$ e $B_1 = (3, 2)$.

(a) Determine as equações das duas hipérboles na forma canônica que possuem A_1 como vértice e B_1 como vértice imaginário.

(b) Determine os focos, o outro vértice, o outro vértice imaginário, o centro, a reta-focal, a reta não-focal, as assíntotas e as diretrizes das hipérboles obtidas no item anterior.

(c) Faça um esboço das duas hipérboles num mesmo sistema de coordenadas.

8. Seja $\mathcal{C}$ a cônica com foco $F_1 = (3, 4)$, centro $C = (0, 1)$, com $d(C, \ell_1) = \dfrac{25\sqrt{2}}{3}$, onde ℓ_1 é a diretriz correspondente ao foco F_1.

(a) Classifique a cônica $\mathcal{C}$, determine seus vértices, o outro foco, sua reta-focal e sua reta não-focal.

(b) Determine a equação de $\mathcal{C}$.

(c) Faça um esboço de $\mathcal{C}$ indicando os elementos encontrados em (a).

2.1. Respostas

1. A cônica é uma elipse de equação $7x^2 + 2xy + 7y^2 + 14x + 34y + 39 = 0$.

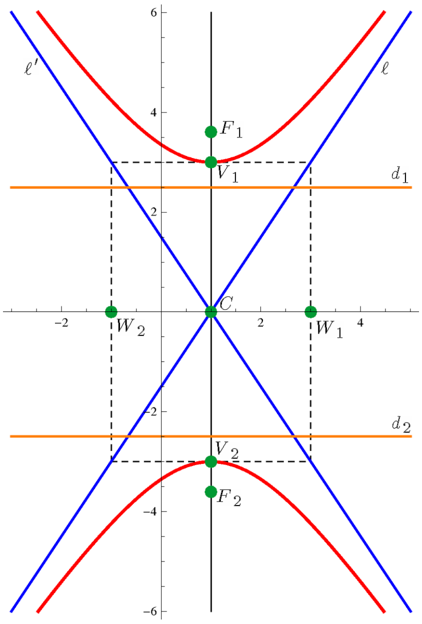
2. A cônica é uma parábola de equação $4x^2 - 4xy + y^2 - 4x - 8y - 4 = 0$

3. A cônica é uma hipérbole de equação $3x^2 - 12xy - 13y^2 - 18x + 6y + 72 = 0$.

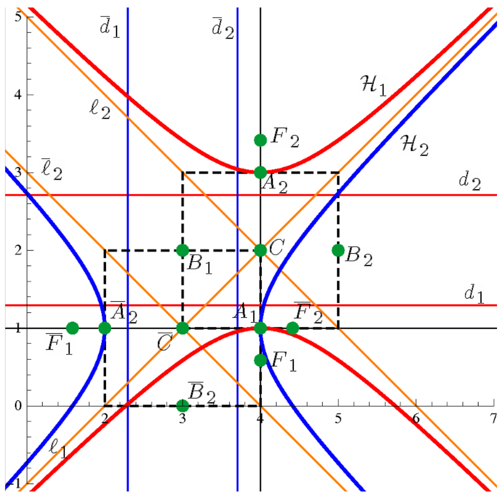
4. A cônica é uma elipse de equação $7x^2 - 6xy + 15y^2 - 14x + 102y + 151 = 0$.

5. (a) $F_1 = (5,0)$, $d_1 : 5x - 9 = 0$ e $F_2 = (-5,0)$, $d_2 : 5x + 9 = 0$. (b) $F_1 = (0,2)$, $d_1 : 2y - 5 = 0$ e $F_2 = (0,-2)$, $d_2 : 2y + 5 = 0$. (c) $F_1 = (0,3)$, $d_1 : 3y - 7 = 0$ e $F_2 = (0,-3)$, $d_2 : 3y + 7 = 0$. (d) $F_1 = (-3,1)$, $d_1 : 4x - 29 = 0$ e $F_2 = (5,1)$, $d_2 : 4x + 21 = 0$.

6. (a) Vértices: $V_1 = (1,3)$ e $V_2 = (1,-3)$; Vértices imaginários: $W_1 = (3,0)$ e $W_2 = (-1,0)$; Focos: $F_1 = (1,\sqrt{13})$ e $F_2 = (1,-\sqrt{13})$; Diretrizes correspondentes: $d_1 : y = \frac{9}{\sqrt{13}}$ e $d_2 : y = -\frac{9}{\sqrt{13}}$; Assíntotas $\ell_1 : 3x - 2y = 3$ e $\ell' : 3x + 2y = 3$. Equação: $\frac{y^2}{9} - \frac{(x-1)^2}{4} = 1$. (b) Ver figura, abaixo.



Exercício 6 (b).

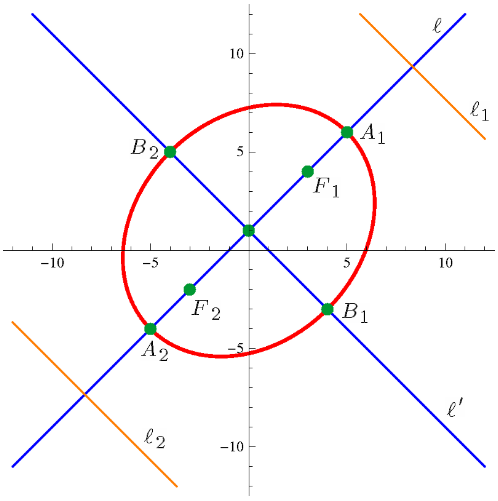


Exercício 7 (c).

7. (a) e (b) Hipérbole $\mathcal{H}_1 : (y-2)^2 - (x-4)^2 = 1$; Centro: $C = (4,2)$; Vértices: $A_1 = (4,1)$, $A_2 = (4,3)$; Vértices imaginários: $B_1 = (3,2)$ e $B_2 = (5,2)$; Focos: $F_1 = (4, 2 - \sqrt{2})$ e $F_2 = (4, 2 + \sqrt{2})$; Diretrizes: $d_1 : y = 2 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $d_2 : y = 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}$; Assíntotas: $\ell_1 : x - y = 2$ e $\ell_2 : x + y = 6$.

   Hipérbole $\mathcal{H}_2 : (x-3)^2 - (y-1)^2 = 1$; Centro: $\overline{C} = (3,1)$; Vértices: $A_1 = (4,1)$, $\overline{A}_2 = (2,1)$; Vértices imaginários: $B_1 = (3,2)$ e $\overline{B}_2 = (3,0)$; Focos: $\overline{F}_1 = (3 - \sqrt{2}, 1)$ e $\overline{F}_2 = (3 + \sqrt{2}, 1)$; Diretrizes: $\overline{d}_1 : x = 3 - \frac{1}{\sqrt{2}}$ e $\overline{d}_2 : x = 3 + \frac{1}{\sqrt{2}}$; Assíntotas: $\ell_1 : x - y = 2$ e $\overline{\ell}_2 : x + y = 4$. (c) Ver figura acima.

8. (a) Como $d(C,F_1) = 3\sqrt{2} < \frac{25\sqrt{2}}{3} = d(C,\ell_1)$ a cônica é uma elipse. Vértices na reta-focal: $A_1 = (5,6)$ e $A_2 = (-5,-4)$; Vértices na reta não-focal: $B_1 = (4,-3)$ e $B_2 = (-4,5)$; Outro foco: $F_2 = (-3,-2)$; Reta-focal: $\ell : x - y + 1 = 0$; Reta não-focal: $\ell' : x + y - 1 = 0$. (b) Equação geral da cônica: $41x^2 - 18xy + 41y^2 + 18x - 82y - 1559 = 0$ (c) Ver figura, abaixo:



9.

Capítulo 12

Exemplos diversos

Finalizamos com uma variedade de exemplos onde os conceitos apresentados ao longo de todo o texto são diretamente aplicados.

Exemplo 1

Determine a equação da hipérbole equilátera, $\mathcal{H}$, que passa pelo ponto $Q = (-1, -5)$ e tem os eixos coordenados como assíntotas.

Solução.

Como as assíntotas da hipérbole são os eixos coordenados e a reta focal é uma das bissetrizes das assíntotas, temos que $\ell : x = -y$ ou $\ell : x = y$.

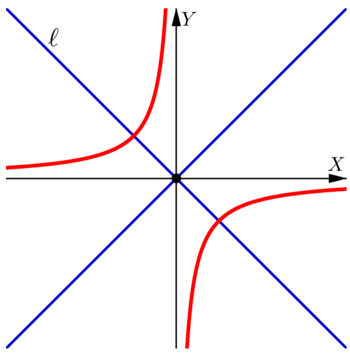


Fig. 1: Caso $\ell : x = -y$.

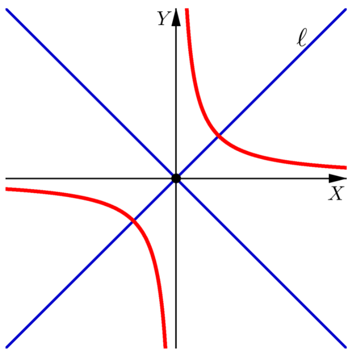


Fig. 2: Caso $\ell : x = y$.

Se a reta focal ℓ fosse a reta $x = -y$, a hipérbole estaria inteiramente contida no 2^o e 4^o quadrantes, o que é um absurdo, pois o ponto $Q = (-1, -5)$, pertencente à hipérbole $\mathcal{H}$, está no 3^o quadrante.

Logo, $\ell : x = y$ é a reta focal de $\mathcal{H}$.
Além disso, o centro C da hipérbole, que é o ponto de intersecção das assíntotas, é a origem. Então, os focos de $\mathcal{H}$ são da forma $F_1 = (-m, -m)$ e $F_2 = (m, m)$, para algum $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$.
Como $c = d(F_1, C) = d(F_2, C)$, $c^2 = a^2 + b^2$ e $a = b$, já que a hipérbole é equilátera, temos que:

$$a^2 + a^2 = c^2 = m^2 + m^2 \,, \qquad \text{ou seja,} \qquad a = m.$$

Assim, um ponto $P = (x, y)$ pertence à hipérbole $\mathcal{H}$ se, e só se,

$$\begin{aligned}
& \left| \sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} - \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \right| = 2m \\
\iff \quad & \sqrt{(x+m)^2 + (y+m)^2} = \pm 2m + \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\iff \quad & (x+m)^2 + (y+m)^2 \\
& = 4m^2 + (x-m)^2 + (y-m)^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\iff \quad & x^2 + 2mx + m^2 + y^2 + 2my + m^2 \\
& = 4m^2 + x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2my + m^2 \\
& \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\iff \quad & 2mx + 2my = 4m^2 - 2mx - 2my \\
& \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\iff \quad & 4mx + 4my = 4m^2 \pm 4m\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\iff \quad & x + y = m \pm \sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\iff \quad & x + y - m = \pm\sqrt{(x-m)^2 + (y-m)^2} \\
\iff \quad & (x + y - m)^2 = (x-m)^2 + (y-m)^2 \\
\iff \quad & x^2 + y^2 + 2xy + m^2 - 2mx - 2my \\
& = x^2 - 2mx + m^2 + y^2 - 2my + m^2 \\
\iff \quad & 2xy = m^2 \\
\iff \quad & xy = \frac{m^2}{2}.
\end{aligned}$$

Como $Q = (-1, -5) \in \mathcal{H}$, temos que $\dfrac{m^2}{2} = (-1)(-5)$, isto é, $m^2 = 10$.
Logo, $xy = 5$ é a equação da hipérbole $\mathcal{H}$. □

Exemplo 2

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica com centro $C = (1,2)$, excentricidade $e = \frac{1}{2}$, reta focal paralela ao eixo$-OX$ e $d(F, L) = 3$, onde $\mathcal{L}$ é a diretriz correspondente ao foco F. Classifique a cônica e determine seus vértices, seus focos, suas diretrizes e sua equação.

Solução.

A cônica $\mathcal{C}$ é uma elipse, pois $e = \frac{1}{2} < 1$. Então,

$$3 = d(F, \mathcal{L}) = d(C, \mathcal{L}) - d(C, F) = \frac{a}{e} - c = \frac{a}{e} - ae$$
$$\iff 3 = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} \iff a = 2\,.$$

Sendo $a = 2$, temos que

$$c = ae = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1 \quad \text{e} \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{4-1} = \sqrt{3}.$$

Além disso, a reta $\ell : y = 2$, paralela ao eixo$-OX$, é a reta focal de $\mathcal{C}$. Logo,

$$\mathcal{C} : \frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y-2)^2}{3} = 1$$

é a equação canônica da elipse.

Nessa elipse:

- $A_1 = (-1, 2)$ e $A_2 = (3, 2)$ são os vértices sobre a reta focal.
- $B_1 = (1, 2-\sqrt{3})$ e $B_2 = (1, 2+\sqrt{3})$ são os vértices sobre a reta não-focal.
- $F_1 = (0, 2)$ e $F_2 = (2, 2)$ são os focos.
- $\mathcal{L}_1 : x = 1 - \frac{a}{e} = -3$ e $\mathcal{L}_2 : x = 1 + \frac{a}{e} = 5$ são as diretrizes correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente. □

Exemplo 3

Seja $\mathcal{C}$ uma cônica centrada no ponto $(1,2)$, de excentricidade $e = 2$, reta focal paralela ao eixo$-OY$ e $d(F, \mathcal{L}) = 3$, onde $\mathcal{L}$ é a diretriz correspondente ao foco F de $\mathcal{C}$. Classifique a cônica e determine seus vértices, seus focos, suas diretrizes e sua equação.

Solução.

A cônica $\mathcal{C}$ é uma hipérbole, pois $e = 2 > 1$. Então,

$$3 = d(F, \mathcal{L}) = d(F, C) - d(C, \mathcal{L}) = c - \frac{a}{e} = ae - \frac{a}{e}$$
$$\iff 3 = 2a - \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} \iff a = 2.$$

Logo, $c = ae = 4$ e $b = \sqrt{c^2 - a^2} = \sqrt{16 - 4} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$.

Como a reta focal $\ell : x = 1$ é paralela ao eixo$-OY$, temos que:

$$C : \frac{(y-2)^2}{4} - \frac{(x-1)^2}{12} = 1 ,$$

é a equação da hipérbole, com:

- vértices: $A_1 = (1, 0)$ e $A_2 = (1, 4)$.
- vértices imaginários: $B_1 = (1 - 2\sqrt{3}, 2)$ e $B_2 = (1 + 2\sqrt{3}, 2)$.
- focos: $F_1 = (1, -2)$ e $F_2 = (1, 6)$.
- diretrizes: $\mathcal{L}_1 : y = 2 - \frac{a}{e} = 1$ e $\mathcal{L}_2 : y = 2 + \frac{a}{e} = 3$, correspondentes aos focos F_1 e F_2, respectivamente.
- assíntotas: $x - 1 = \pm\sqrt{3}\,(y - 2)$. □

Exemplo 4

Classifique, em função do parâmetro $k \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$4x^2 + ky^2 + 8kx + 20k + 24 = 0 ,$$

indicando, nos casos não-degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.

Completando o quadrado na equação, temos que:

$$\begin{aligned}
& 4x^2 + ky^2 + 8kx + 20k + 24 = 0 \\
\iff\ & 4(x^2 + 2kx) + ky^2 = -20k - 24 \\
\iff\ & 4(x^2 + 2kx + k^2) + ky^2 = -20k - 24 + 4k^2 \\
\iff\ & 4(x + k)^2 + ky^2 = 4(k^2 - 5k - 6) \\
\iff\ & 4(x + k)^2 + ky^2 = 4(k + 1)(k - 6) .
\end{aligned}$$

Estudo do sinal dos coeficientes k e $(k + 1)(k - 6)$ da equação:

	$-\infty < k < -1$	$k = -1$	$-1 < k < 0$	$k = 0$	$0 < k < 6$	$k = 6$	$6 < k < +\infty$
k	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$(k+1)(k-6)$	$+$	0	$-$	$-$	$-$	0	$+$

Então, para:

- $k \in (-\infty, -1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-k, 0)$ e reta focal = eixo$-OX$.
- $k = -1$, a equação $4(x-1)^2 - y^2 = 0$ representa o par de retas concorrentes $y = \pm 2(x-1)$ que passam pelo ponto $(1, 0)$.
- $k \in (-1, 0)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-k, 0)$ e reta focal $\ell : x = -k$ paralela ao eixo$-OY$.
- $k = 0$, a equação $4x^2 = -24$ representa o conjunto vazio.
- $k \in (0, 6)$, a equação representa o conjunto vazio, pois $4(x+k)^2 + ky^2 \geq 0$ e $4(k+1)(k-6) < 0$ nesse intervalo.
- $k = 6$, a equação $4(x+6)^2 + 6y^2 = 0$ representa o ponto $(-6, 0)$.
- $k \in (6, +\infty)$, a equação, que pode ser escrita na forma:

$$\frac{(x+k)^2}{\dfrac{4(k+1)(k-6)}{4}} + \frac{y^2}{\dfrac{4(k+1)(k-6)}{k}} = 1\,,$$

representa uma elipse de centro $(-k, 0)$ e reta focal $\ell =$ eixo$-OX$, pois $\dfrac{4(k+1)(k-6)}{4} > \dfrac{4(k+1)(k-6)}{k}$ nesse intervalo. □

Exemplo 5

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido por uma rotação positiva de um ângulo θ dos eixos OX e OY, onde $\cos\theta = \dfrac{4}{5}$ e $\operatorname{sen}\theta = \dfrac{3}{5}$.

Uma parábola $\mathcal{P}$ nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem foco no ponto $F = \left(\dfrac{12}{5}, \dfrac{16}{5}\right)$ e vértice no ponto $V = \left(\dfrac{12}{5}, -\dfrac{9}{5}\right)$.

(a) Determine a equação da parábola nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, e nas coordenadas x e y.

(b) Determine o foco, o vértice, a reta focal e a diretriz da parábola nas coordenadas x e y.

(c) Faça um esboço da curva no sistema de eixos OXY, indicando seus elementos.

Solução.

(a) Como $p = d(F,V) = \dfrac{25}{5} = 5$ e, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a reta focal $\ell : \overline{x} = \dfrac{12}{5}$ é paralela ao eixo$-O\overline{Y}$ e o foco F encontra-se acima do vértice V, temos que

$$\mathcal{P} : \left(\overline{x} - \frac{12}{5}\right)^2 = 20\left(\overline{y} + \frac{9}{5}\right)$$

é a equação da parábola, de diretriz $\mathcal{L} : \overline{y} = -\dfrac{9}{5} - p = -\dfrac{9}{5} - 5 = -\dfrac{34}{5}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \overline{x} &= \cos\theta\; x + \operatorname{sen}\theta\; y = \frac{1}{5}(4x + 3y) \\ \overline{y} &= -\operatorname{sen}\theta\; x + \cos\theta\; y = \frac{1}{5}(-3x + 4y)\,, \end{aligned} \tag{1}$$

obtemos que a equação da parábola, nas coordenadas x e y, é dada por:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{1}{5}(4x + 3y) - \frac{12}{5}\right)^2 = 20\left(\frac{1}{5}(-3x + 4y) + \frac{9}{5}\right) \\ \Longleftrightarrow\quad & (4x + 3y - 12)^2 = \frac{20 \cdot 25}{5}(-3x + 4y + 9) \\ \Longleftrightarrow\quad & (4x + 3y)^2 - 24(4x + 3y) + 144 = 100(-3x + 4y + 9) \\ \Longleftrightarrow\quad & 16x^2 + 24xy + 9y^2 - 96x - 72y + 144 = -300x + 400y + 900 \\ \Longleftrightarrow\quad & \boxed{\mathcal{P} : 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 204x - 472y - 756 = 0} \end{aligned}$$

(b) Pelas relações de mudança de coordenadas (1), $\ell : \dfrac{1}{5}(4x + 3y) = \dfrac{12}{5}$, isto é, $\ell : 4x + 3y = 12$ é a equação cartesiana da reta focal. Também, $\mathcal{L} : \dfrac{1}{5}(-3x + 4y) = -\dfrac{34}{5}$, isto é, $\mathcal{L} : -3x + 4y = -34$ é a equação cartesiana da diretriz nas coordenadas x e y.

E, pelas relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} x &= \cos\theta\; \overline{x} - \operatorname{sen}\theta\; \overline{y} = \frac{1}{5}(4\overline{x} - 3\overline{y}) \\ y &= \operatorname{sen}\theta\; \overline{x} + \cos\theta\; \overline{y} = \frac{1}{5}(3\overline{x} + 4\overline{y})\,, \end{aligned}$$

obtemos que

$$F = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{48}{5} - \frac{48}{5}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{36}{5} + \frac{64}{5}\right)\right) = (0, 4)$$

é o foco e

$$V = \left(\frac{1}{5}\left(\frac{48}{5} + \frac{27}{5}\right), \frac{1}{5}\left(\frac{36}{5} - \frac{36}{5}\right)\right) = (3, 0)$$

é o vértice da parábola nas coordenadas x e y.

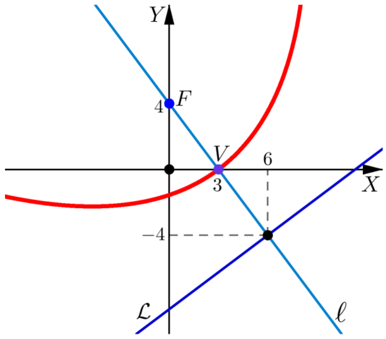


Fig. 3: Parábola $\mathcal{P} : 16x^2 + 24xy + 9y^2 + 204x - 472y - 756 = 0$.

(c) Na figura 3 mostramos o esboço da parábola $\mathcal{P}$. $\square$

Exemplo 6

Esboçe em detalhe a região do plano dada pelo sistema de inequações:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + y^2 \geq 4 \\ 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0 \\ -4x^2 + y^2 - 4y \leq 0 \\ |x| \leq 2\,. \end{cases}$$

Solução.

A região $\mathcal{R}$ é a intersecção das seguintes quatro regiões do plano:

$$\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$$
$$\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \mid 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0\}$$
$$\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \mid -4x^2 + y^2 - 4y \leq 0\}$$
$$\mathcal{R}_4 = \{(x, y) \mid |x| \leq 2\}\,.$$

• Descrição da região $\mathcal{R}_1$.

A região $\mathcal{R}_1$ consiste dos pontos exteriores ao círculo $\mathcal{C}_1 : x^2 + y^2 = 4$ de centro na origem e raio 2.

• Descrição da região $\mathcal{R}_2$.

Para descrever a região $\mathcal{R}_2$ vamos, primeiro, determinar a cônica

$$C_2 : 16x^2 + y^2 - 8y = 0.$$

Completando o quadrado na equação da curva C_2 obtemos:

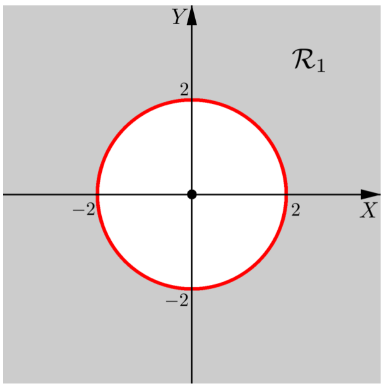


Fig. 4: Círculo C_1 e região $\mathcal{R}_1$.

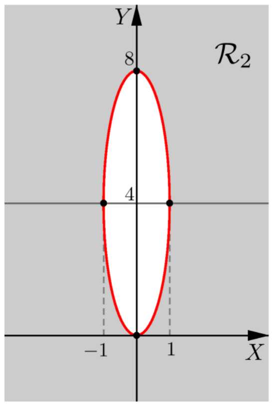


Fig. 5: Elipse C_2 e região $\mathcal{R}_2$.

$$\begin{aligned} 16x^2 + y^2 - 8y = 0 &\iff 16x^2 + (y^2 - 8y + 16) = 16 \\ &\iff 16x^2 + (y-4)^2 = 16 \\ &\iff C_2 : x^2 + \frac{(y-4)^2}{16} = 1\,. \end{aligned}$$

Então, C_2 é a elipse de centro $(0, 4)$; reta focal ℓ = eixo$-OY$; reta não-focal: $\ell' : y = 4$; $a^2 = 16$, $b^2 = 1$, ou seja, $a = 4$ e $b = 1$; vértices sobre a reta focal $A_1 = (0, 0)$ e $A_2 = (0, 8)$; vértices sobre a reta não-focal $B_1 = (-1, 4)$ e $B_2 = (1, 4)$.

Portanto,

$$\mathcal{R}_2 : 16x^2 + y^2 - 8y \geq 0 \iff \mathcal{R}_2 : x^2 + \frac{(y-4)^2}{16} \geq 1$$

consiste dos pontos do plano exteriores ou sobre a elipse C_2.

• Descrição da região $\mathcal{R}_3$.

Para descrever a região $\mathcal{R}_3$ vamos identificar a cônica

$$C_3 : -4x^2 + y^2 - 4y = 0.$$

Completando o quadrado na equação de C_3, temos:

$$\begin{aligned} -4x^2 + y^2 - 4y = 0 &\iff -4x^2 + (y^2 - 4y + 4) = 4 \\ &\iff -4x^2 + (y-2)^2 = 4 \\ &\iff C_3 : -x^2 + \frac{(y-2)^2}{4} = 1\,, \end{aligned}$$

que é a equação da hipérbole de centro: $(0, 2)$, reta focal: ℓ = eixo$-OY$; reta não-focal: $\ell' : y = 2$, paralela ao eixo$-OX$; $a^2 = 4$ e $b^2 = 1$, ou seja,

$a = 2$ e $b = 1$; vértices: $A_1 = (0,0)$ e $A_2 = (0,4)$ e vértices imaginários: $B_1 = (-1,2)$ e $B_2 = (1,2)$.

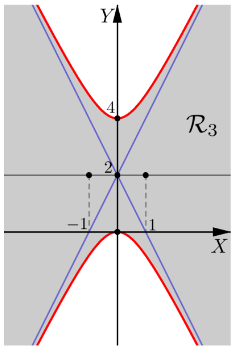


Fig. 6: Hipérbole C_3 e região R_3.

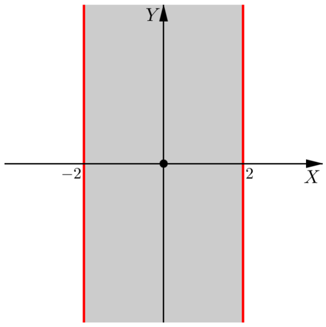


Fig. 7: Retas r_1 e r_2 e região R_4.

A hipérbole divide o plano em três regiões, duas delas limitadas pelos ramos da hipérbole e a outra situada entre eles. Como as coordenadas do centro $(0,2)$ satisfazem $-4x^2 + y^2 - 4y \leq 0$, concluímos que a região $\mathcal{R}_3$ consiste dos pontos entre os ramos da hipérbole ou sobre eles, isto é, $\mathcal{R}_3$ é a região que contém o centro e inclui os ramos da hipérbole.

• Descrição da região $\mathcal{R}_4$.

Temos que

$$|x| \leq 2 \iff -2 \leq x \leq 2.$$

Portanto, a região $\mathcal{R}_4$ é o conjunto:

$$\{(x,y) \mid -2 \leq x \leq 2,\ y \in \mathbb{R}\},$$

que consiste dos pontos da faixa vertical limitada pelas retas $r_1 : x = 2$ e $r_2 : x = -2$.

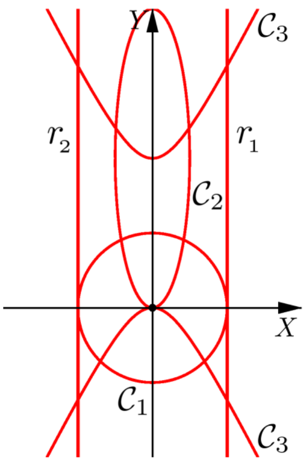


Fig. 8: Curvas que limitam a região $\mathcal{R}$.

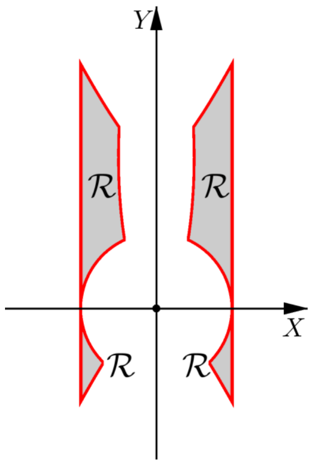


Fig. 9: Região $\mathcal{R}$.

• Descrição da região $\mathcal{R}$.
Finalmente, a região $\mathcal{R}$ consiste dos pontos exteriores ao círculo C_1, exteriores à elipse C_2, que estão entre os ramos da hipérbole C_3 e na faixa $\mathcal{R}_4$, podendo, também, pertencer a uma das curvas do bordo C_1, C_2, C_3 ou a uma das retas r_1 ou r_2, como vemos nas figuras 8 e 9. □

Exemplo 7

Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$x^2 + (\lambda - 2)y^2 + 2\lambda x + 2(\lambda - 2)y + 3\lambda - 3 = 0\,,$$

indicando, nos casos não-degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.

Completando os quadrados na equação da família, temos que:

$$\begin{aligned}
& (x^2 + 2\lambda x) + (\lambda - 2)(y^2 + 2y) = 3 - 3\lambda \\
\iff\ & (x^2 + 2\lambda x + \lambda^2) + (\lambda - 2)(y^2 + 2y + 1) = 3 - 3\lambda + \lambda^2 + \lambda - 2 \\
\iff\ & (x + \lambda)^2 + (\lambda - 2)(y + 1)^2 = \lambda^2 - 2\lambda + 1 \\
\iff\ & (x + \lambda)^2 + (\lambda - 2)(y + 1)^2 = (\lambda - 1)^2 . \qquad (\star)
\end{aligned}$$

Para fazermos a classificação da família de curvas, precisamos estudar o sinal dos coeficientes $(\lambda - 2)$ e $(\lambda - 1)^2$ da equação $(\star)$:

	$-\infty < \lambda < 1$	$\lambda = 1$	$1 < \lambda < 2$	$\lambda = 2$	$2 < \lambda < +\infty$
$\lambda - 2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\lambda - 1)^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$

Então, para:

• $\lambda \in (-\infty, 1)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$.

• $\lambda = 1$, a equação $(x + 1)^2) - (y + 1)^2 = 0$ representa o par de retas concorrentes $y + 1 = \pm(x + 1)$ que se cortam no ponto $(-1, -1)$.

• $\lambda \in (1, 2)$, a equação representa uma hipérbole de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$.

• $\lambda = 2$, a equação $(x + 2)^2 = 1$ representa o par de retas $x + 2 = \pm 1$, ou seja, $x = -3$ e $x = -1$ paralelas ao eixo$-OY$.

• $\lambda \in (2, +\infty)$, a equação, que se escreve na forma

$$\frac{(x+\lambda)^2}{(\lambda-1)^2} + \frac{(y+1)^2}{\dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}} = 1\,,$$

representa:

∘ um círculo de centro $(-3, -1)$ e raio 2, se $\lambda = 3$, pois, nesse caso, $(\lambda-1)^2 = \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2} = 4$.

∘ uma elipse de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : x = -\lambda$, paralela ao eixo$-OY$, se $\lambda \in (2, 3)$, pois, nesse intervalo, $(\lambda-1)^2 < \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$.

∘ uma elipse de centro $(-\lambda, -1)$ e reta focal $\ell : y = -1$ paralela ao eixo$-OX$, se $\lambda \in (3, +\infty)$, pois, nesse intervalo, $(\lambda-1)^2 > \dfrac{(\lambda-1)^2}{\lambda-2}$. □

Exemplo 8

Considere os pontos $F = (2, 1)$ e $Q = (4, 0)$.

(a) Determine as equações das parábolas com reta focal ℓ perpendicular à reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, -2)$ e foco F, que contêm o ponto Q.

(b) Determine os vértices das parábolas obtidas acima.

(c) Faça um esboço das parábolas obtidas no mesmo sistema de eixos ortogonais OXY, indicando todos os seus elementos.

Solução.

(a) Como a diretriz $\mathcal{L}$ é perpendicular à reta focal ℓ e ℓ é perpendicular à reta que passa pela origem e pelo ponto $(1, -2)$, temos que $\mathcal{L}$ é perpendicular à reta que passa pela origem e pelo ponto $(2, 1)$. Então, $\mathcal{L} : 2x + y = m$, para algum $m \in \mathbb{R}$.

Além disso, já que $Q = (4, 0)$ pertence à parábola, $d(Q, F) = d(Q, \mathcal{L})$. Isto é,

$$\sqrt{(4-2)^2 + (0-1)^2} = \frac{|2\cdot 4 + 0\cdot 1 - m|}{\sqrt{5}} \iff \sqrt{5} = \frac{|8-m|}{\sqrt{5}}$$
$$\iff |m-8| = 5 \iff m = 8 \pm 5\,.$$

Logo, $\mathcal{L} : 2x + y = 8 \pm 5$.

Caso 1. Parábola $\mathcal{P}_1$ de foco $F = (2,1)$ e diretriz $\mathcal{L}_1 : 2x + y = 13$.
Nesse caso, $P = (x,y) \in \mathcal{P}_1$ se, e só se, $d(P,F) = d(P,\mathcal{L}_1)$, ou seja,

$$\begin{aligned} & d(P,F)^2 = d(P,\mathcal{L}_1)^2 \\ \iff\ & (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(2x+y-13)^2}{5} \\ \iff\ & 5(x^2+y^2-4x-2y+5) = 4x^2+4xy+y^2-52x-26y+169 \\ \iff\ & \boxed{\mathcal{P}_1 : x^2 - 4xy + 4y^2 + 32x + 16y - 144 = 0} \end{aligned}$$

Caso 2. Parábola $\mathcal{P}_2$ de foco $F = (2,1)$ e diretriz $\mathcal{L}_2 : 2x + y = 3$.
Assim, $P = (x,y) \in \mathcal{P}_2$ se, e só se, $d(P,F) = d(P,\mathcal{L}_2)$, ou seja,

$$\begin{aligned} & d(P,F)^2 = d(P,\mathcal{L}_2)^2 \\ \iff\ & (x-2)^2 + (y-1)^2 = \frac{(2x+y-3)^2}{5} \\ \iff\ & 5(x^2+y^2-4x-2y+5) = 4x^2+4xy+y^2-12x-6y+9 \\ \iff\ & \boxed{\mathcal{P}_2 : x^2 - 4xy + 4y^2 - 8x - 4y + 16 = 0} \end{aligned}$$

(b) Consideremos as duas parábolas obtidas no item anterior.

• O vértice V_1 da parábola $\mathcal{P}_1$ é o ponto médio do segmento A_1F, onde $A_1 = (x,y)$ é o ponto de intersecção da reta focal $\ell : x - 2y = 0$ com a diretriz $\mathcal{L}_1 : 2x + y = 13$.
Então, as coordenadas x e y do ponto A_1 satisfazem o sistema:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 13\,. \end{cases}$$

A solução desse sistema é: $x = \dfrac{26}{5}$ e $y = \dfrac{13}{5}$, isto é, $A_1 = \left(\dfrac{26}{5}, \dfrac{13}{5}\right)$.
Logo,

$$V_1 = \frac{A_1 + F}{2} = \frac{\left(\frac{26}{5}, \frac{13}{5}\right) + (2,1)}{2} = \left(\frac{36}{10}, \frac{18}{10}\right) = \left(\frac{18}{5}, \frac{9}{5}\right).$$

• O vértice V_2 da parábola $\mathcal{P}_2$ é o ponto médio do segmento A_2F, onde $A_2 = (x,y)$ é o ponto de intersecção da reta focal $\ell : x - 2y = 0$ com a diretriz $\mathcal{L}_2 : 2x + y = 3$. As coordenadas x e y do ponto A_2 satisfazem:

$$\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 3\,, \end{cases}$$

cuja solução é $x = \frac{6}{5}$ e $y = \frac{3}{5}$, isto é, $A_2 = \left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right)$. Logo,

$$V_2 = \frac{A_2 + F}{2} = \frac{\left(\frac{6}{5}, \frac{3}{5}\right) + (2,1)}{2} = \left(\frac{16}{10}, \frac{8}{10}\right) = \left(\frac{8}{5}, \frac{4}{5}\right).$$

(c) Na figura 10 mostramos o esboço das parábolas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$, no mesmo sistema de eixos ortogonais OXY. □

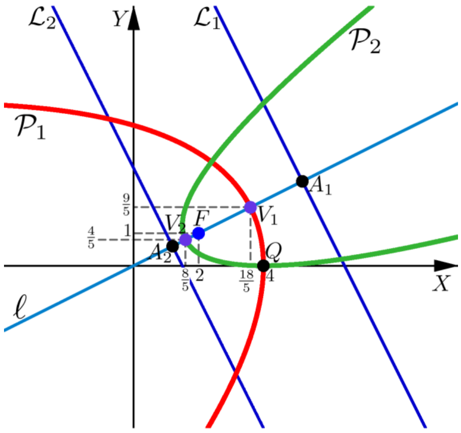


Fig. 10: Parábolas $\mathcal{P}_1$ e $\mathcal{P}_2$.

Exemplo 9

Sejam OXY um sistema de eixos ortogonais e $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$ o sistema de eixos ortogonais obtido por uma rotação positiva de 45^o dos eixos OX e OY em torno da origem.

Uma hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ tem centro na origem, um de seus vértices no ponto $(\sqrt{2}, 0)$ e a reta $\overline{y} = 2\overline{x}$ como uma de suas assíntotas.

(a) Determine a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, e nas coordenadas x e y.

(b) Determine o centro, os vértices, os vértices imaginários e as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.

(c) Faça um esboço da curva no sistema de eixos OXY, indicando todos os elementos encontrados no item **(b)**.

Solução.

(a) Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a reta focal ℓ é o eixo$-O\overline{X}$, pois o centro $C = (0,0)$ e o vértice $V = (\sqrt{2}, 0)$ pertencem a ℓ. Além disso, $a = d(C,V) = \sqrt{2}$ e $\dfrac{b}{a} = 2$, pois $\overline{y} = 2\overline{x}$ é uma assíntota da hipérbole.

Então, $b = 2a = 2\sqrt{2}$ e

$$\mathcal{H} : \frac{\overline{x}^2}{2} - \frac{\overline{y}^2}{8} = 1,$$

é a equação da hipérbole nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$.

Usando as relações de mudança de coordenadas

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos 45^o\, x + \operatorname{sen} 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y) \\ \overline{y} = -\operatorname{sen} 45^o\, x + \cos 45^o\, y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y), \end{cases} \qquad (1)$$

obtemos a equação da hipérbole nas coordenadas x e y:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}(x+y)^2 - \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{4}(-x+y)^2 = 1 \\ \iff\; & 4(x+y)^2 - (-x+y)^2 = 16 \\ \iff\; & 4(x^2+2xy+y^2) - (x^2-2xy+y^2) = 16 \\ \iff\; & 3x^2 + 10xy + 3y^2 = 16 \\ \iff\; & \boxed{\mathcal{H} : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0} \end{aligned}$$

(b) Nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$, a hipérbole tem:

- centro: $C = (0,0)$;
- vértices: $A_1 = (-\sqrt{2}, 0)$ e $A_2 = (\sqrt{2}, 0)$;
- vértices imaginários: $B_1 = (0, -2\sqrt{2})$ e $B_2 = (0, 2\sqrt{2})$;
- reta focal: $\ell : \overline{y} = 0$;
- reta não-focal: $\ell' : \overline{x} = 0$;
- assíntotas: $\overline{y} = \pm 2\overline{x}$;

Por (1), obtemos que $\ell : -x + y = 0$ é a reta focal; $\ell' : x + y = 0$ é a reta não-focal e $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-x+y) = \pm 2 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}(x+y)$, isto é, $r_- : y = -3x$ e $r_+ : y = -\dfrac{1}{3}x$ são as assíntotas da hipérbole nas coordenadas x e y.

Das relações de mudança de coordenadas:

$$x = \cos 45^o\,\overline{x} - \operatorname{sen} 45^o\,\overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} - \overline{y})$$
$$y = \operatorname{sen} 45^o\,\overline{x} + \cos 45^o\,\overline{y} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\overline{x} + \overline{y})\,,$$

obtemos que $C = (0,0)$ é o centro, os pontos $A_1 = (-1,-1)$ e $A_2 = (1,1)$ são os vértices e $B_1 = (2,-2)$ e $B_2 = (-2,2)$ são os vértices imaginários da hipérbole nas coordenadas x e y.

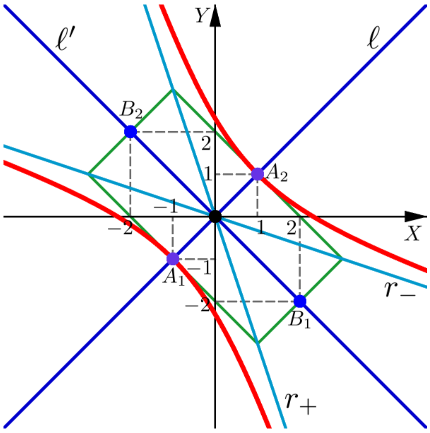


Fig. 11: $\mathcal{H} : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 16 = 0$.

(c) Na figura 11 mostramos o esboço da hipérbole $\mathcal{H}$. □

Exemplo 10

Sejam $V_1 = (7,1)$ e $V_2 = (2,5)$ os vértices de uma elipse com reta focal paralela a um dos eixos coordenados.

(a) Determine o centro, a reta focal, a reta não-focal, os vértices e os focos da elipse $\mathcal{E}$ cujo vértice V_1 pertence à reta focal.

(b) Determine, agora, o centro, a reta focal, a reta não-focal, os vértices e os focos da elipse $\overline{\mathcal{E}}$ cujo vértice V_2 pertence à reta focal.

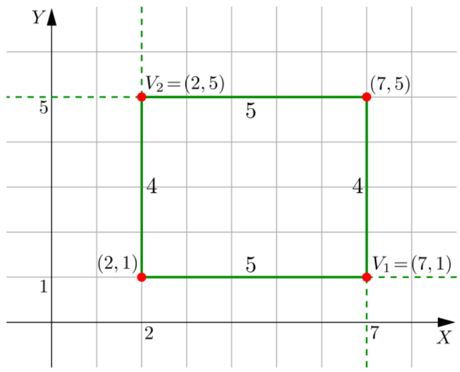


Fig. 12: Retângulo de vértices V_1 e V_2.

(c) Faça um esboço das duas elipses encontradas acima num mesmo sistema de eixos ortogonais, indicando todos os seus elementos.

Solução.

Consideremos o retângulo de lados paralelos aos eixos coordenados e vértices nos pontos $V_1 = (7,1)$ e $V_2 = (2,5)$ (Fig. 12).

Como $a > b$ numa elipse, temos que $a = 5$ e $b = 4$ nas elipses de vértices V_1 e V_2 e reta focal paralela a um dos eixos coordenados.

(a) Se o vértice $V_1 = (7,1)$ pertence à reta focal da elipse, temos que $\ell : y = 1$ é a reta focal, $\ell' : x = 2$ é a reta não-focal, $C = (2,1)$ é o centro, $A_1 = (-3,1)$ e $A_2 = V_1 = (7,1)$ são os vértices sobre a reta focal, $B_1 = (2,-3)$ e $B_2 = V_2 = (2,5)$ são os vértices sobre a reta não-focal, $F_1 = (-1,1)$ e $F_2 = (5,1)$ são os focos, pois $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 3$, e

$$\mathcal{E} : \frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1$$

é a equação da elipse $\mathcal{E}$.

(b) Se o vértice $V_2 = (2,5)$ pertence à reta focal da elipse $\overline{\mathcal{E}}$, temos que $\overline{\ell} : y = 5$ é a reta focal, $\overline{\ell}' : x = 7$ é a reta não-focal, $\overline{C} = (7,5)$ é o centro, $\overline{A}_1 = V_2 = (2,5)$ e $\overline{A}_2 = (12,5)$ são os vértices sobre a reta focal, $\overline{B}_1 = (7,9)$ e $B_2 = V_1 = (7,1)$ são os vértices sobre a reta não-focal, $\overline{F}_1 = (4,5)$ e $\overline{F}_2 = (10,5)$ são os focos, e

$$\overline{\mathcal{E}} : \frac{(x-7)^2}{25} + \frac{(y-5)^2}{16} = 1$$

é a equação da elipse $\overline{\mathcal{E}}$.

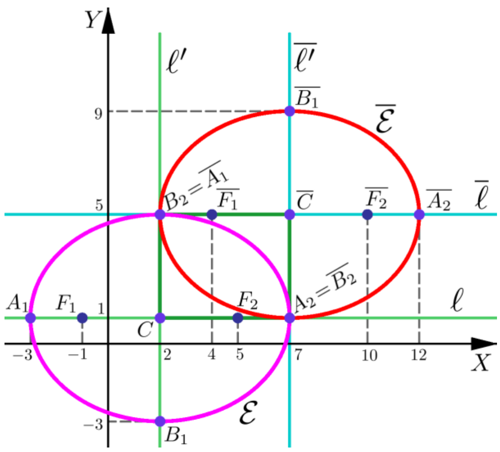


Fig. 13: Elipses $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$.

(c) Na figura 13 mostramos as elipses $\mathcal{E}$ e $\overline{\mathcal{E}}$ no mesmo sistema de eixos ortogonais. □

Exemplo 11

Considere os pontos $A = (4,1)$ e $B = (3,2)$.

(a) Determine as equações e os principais elementos das duas hipérboles que possuem B como vértice imaginário, A como vértice e reta focal paralela a um dos eixos coordenados.

(b) Faça um esboço das duas hipérboles num mesmo sistema de eixos ortogonais, indicando todos os seus elementos (menos os focos e as diretrizes).

Solução.

Caso 1. Reta focal ℓ paralela ao eixo$-OX$.

Como $A = (4,1) \in \ell$ e $B = (3,2) \in \ell'$, onde ℓ' é a reta não-focal, temos que $\ell : y = 1$ e $\ell' : x = 3$. Então, o centro C da hipérbole, ponto de intersecção da reta focal com a reta não-focal, tem coordenadas $x = 3$ e $y = 1$, isto é, $C = (3,1)$. Além disso, temos

$$a = d(C,A) = 1,\ b = d(C,B) = 1 \ \text{ e } \ c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}.$$

Logo

$$\mathcal{H} : (x-3)^2 - (y-1)^2 = 1$$

é a equação da hipérbole.

Na hipérbole $\mathcal{H}$, $F_1 = (3-\sqrt{2}, 1)$ e $F_2 = (3+\sqrt{2}, 1)$ são os focos; $A_1 = (2,1)$ e $A_2 = A = (4,1)$ são os vértices; $B_1 = (3,0)$ e $B_2 = B = (3,2)$ são os vértices imaginários; $y - 1 = \pm(x-3)$ são as assíntotas; a reta $\mathcal{L}_1 : x = 3 - \dfrac{a}{e} = 3 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ é a diretriz correspondente ao foco F_1 e a reta $\mathcal{L}_2 : x = 3 + \dfrac{a}{e} = 3 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ é a diretriz correspondente ao foco F_2 da hipérbole $\mathcal{H}$.

Caso 2. Reta focal $\overline{\ell}$ paralela ao eixo$-OY$.

Nesse caso, $\overline{\ell} : x = 4$ é a reta focal e $\overline{\ell'} : y = 2$ é a reta não-focal da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$ que tem reta focal paralela ao eixo$-OY$, vértice $A = (4,1)$ e vértice imaginário $B = (3,2)$.

Então, $\overline{C} = (4,2)$ é o centro, $\overline{a} = d(\overline{C}, A) = 1$, $\overline{b} = d(\overline{C}, B) = 1$ e $\overline{c} = \sqrt{\overline{a}^2 + \overline{b}^2} = \sqrt{2}$, e

$$\overline{\mathcal{H}} : (y-2)^2 - (x-4)^2 = 1$$

é a equação da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$.

Além disso, $\overline{F}_1 = (4, 2-\sqrt{2})$ e $\overline{F}_2 = (4, 2+\sqrt{2})$ são os focos; $\overline{A}_1 = A = (4,1)$ e $\overline{A}_2 = (4,3)$ são os vértices; $\overline{B}_1 = B = (3,2)$ e $\overline{B}_2 = (5,2)$ são os vértices imaginários; $x - 4 = \pm(y-2)$ são as assíntotas; a reta $\overline{\mathcal{L}}_1 : y = 2 - \dfrac{\overline{a}}{\overline{e}} = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ é a diretriz correspondente ao foco $\overline{F}_1$ e a reta $\overline{\mathcal{L}}_2 : y = 2 + \dfrac{\overline{a}}{\overline{e}} = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ é a diretriz correspondente ao foco $\overline{F}_2$ da hipérbole $\overline{\mathcal{H}}$.

(b) Na figura abaixo mostramos as hipérboles $\mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{H}}$ num mesmo sistema de eixos ortogonais. □

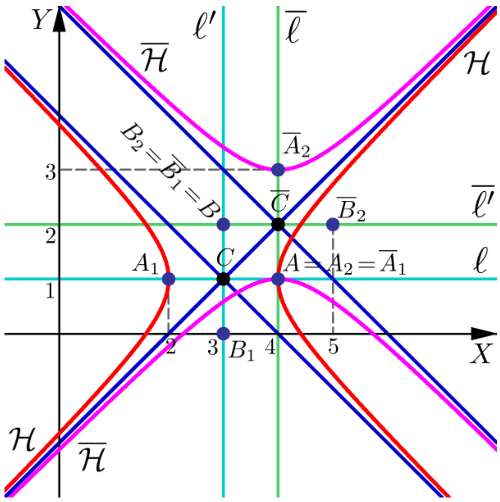


Fig. 14: Hipérboles $\mathcal{H}$ e $\overline{\mathcal{H}}$.

Exemplo 12

Considere as curvas

$$\begin{aligned} C_1 &: x^2 - 20x + y + 100 = 0; \\ C_2 &: x^2 - y^2 - 6x = 0; \\ C_3 &: x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0. \end{aligned}$$

(a) Classifique as curvas e determine todos os seus elementos.

(b) Faça um esboço detalhado da região do plano dada pelo sistema de inequações

$$\mathcal{R}: \begin{cases} x^2 - 20x + y + 100 \geq 0 \\ x^2 - y^2 - 6x \geq 0 \\ x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0 \\ x \leq 10 \\ y \geq -4\,. \end{cases}$$

Observação: Ache as intersecções de C_1 e C_2 com a reta $y = -4$.

Solução.

(a) Curva $C_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0$.

Completando o quadrado, a equação de C_1 na forma canônica é:

$$\begin{aligned} &C_1 : x^2 - 20x = -y - 100 \\ &C_1 : x^2 - 20x + 100 = -y - 100 + 100 \\ &C_1 : (x - 10)^2 = -y \end{aligned}$$

Logo, C_1 é a parábola com reta focal $x = 10$, paralela ao eixo$-OY$, vértice $V = (10, 0)$, $4p = 1$, ou seja, $p = \dfrac{1}{4}$, e foco $F = \left(10, -\dfrac{1}{4}\right)$.

Curva $C_2 : x^2 - 6x - y^2 = 0$.

A equação da curva C_2 se escreve, completando os quadrados, como:

$$\begin{aligned} &C_2 : x^2 - 6x - y^2 = 0 \\ &C_2 : (x^2 - 6x + 9) - y^2 = 9 \\ &C_2 : (x - 3)^2 - y^2 = 9 \\ &C_2 : \frac{(x-3)^2}{9} - \frac{y^2}{9} = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, C_2 é a hipérbole com reta focal $\ell : y = 0$; reta não-focal $\ell' : x = 3$; centro $C = (3, 0)$; $a = b = 3$; $c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3\sqrt{2}$; vértices $A_1 = (0, 0)$ e $A_2 = (6, 0)$; vértices imaginários $B_1 = (3, -3)$ e $B_2 = (3, 3)$; assíntotas $r_\pm : y = \pm(x - 3)$ e focos $F_1 = (3 - 3\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (3 + 3\sqrt{2}, 0)$.

Curva $C_3 : x^2 - 6x + 16y^2 - 7 = 0$.

Completando o quadrado na equação, obtemos:

$$\begin{aligned} &C_3 : x^2 - 6x + 16y^2 - 7 = 0 \\ &C_3 : (x^2 - 6x + 9) + 16y^2 = 7 + 9 \\ &C_3 : (x - 3)^2 + 16y^2 = 16 \\ &C_3 : \frac{(x-3)^2}{16} + y^2 = 1\,. \end{aligned}$$

Logo, C_3 é a equação da elipse com reta focal $\ell : y = 0$; reta não-focal $\ell' : x = 3$; centro $C = (3, 0)$; $a = 4$ e $b = 1$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{15}$; vértices sobre a reta focal $A_1 = (-1, 0)$ e $A_2 = (7, 0)$; vértices sobre a reta não-focal $B_1 = (3, -1)$ e $B_2 = (3, 1)$; focos $F_1 = (3-\sqrt{15}, 0)$ e $F_2 = (3+\sqrt{15}, 0)$.

(b) A região $\mathcal{R}$ é a intersecção das regiões:

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}_1 : x^2 - 20x + y + 100 \geq 0\\
&\mathcal{R}_2 : x^2 - y^2 - 6x \geq 0\\
&\mathcal{R}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0\\
&\mathcal{R}_4 : x \leq 10\\
&\mathcal{R}_5 : y \geq -4\,.
\end{aligned}$$

Região $\mathcal{R}_1 : x^2 - 20x + y + 100 \geq 0$.

A parábola

$$\mathcal{C}_1 : x^2 - 20x + y + 100 = 0$$

divide o plano em duas regiões disjuntas, uma das quais contém o foco $F = \left(10, -\frac{1}{4}\right)$.

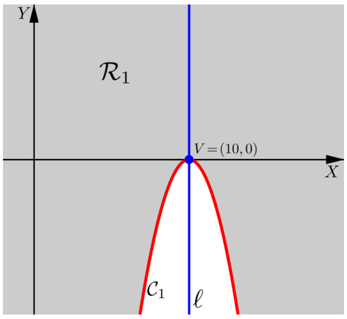


Fig. 15: Região $\mathcal{R}_1$.

Substituindo as coordenadas do foco na expressão $x^2 - 20x + y + 100$, obtemos:

$$10^2 - 20 \cdot 10 - \frac{1}{4} + 100 = 100 - 200 - \frac{1}{4} + 100 = -\frac{1}{4} < 0\,.$$

Portanto, $\mathcal{R}_1$ é a união da região determinada pela parábola, que não contém o foco F, com os pontos da parábola, onde a igualdade na inequação que define $\mathcal{R}_1$ é satisfeita. Na figura 15 mostramos a região $\mathcal{R}_1$.

- **Região $\mathcal{R}_2 : x^2 - y^2 - 6x \geq 0$.**

A hipérbole $\mathcal{C}_2 : x^2 - y^2 - 6x = 0$ divide o plano em três regiões disjuntas: uma das quais contém o centro $C = (3, 0)$ e as outras contêm os focos. A expressão $x^2 - y^2 - 6x$ tem sinal constante em cada uma dessas regiões, sendo iguais os sinais nas regiões que contêm os focos.

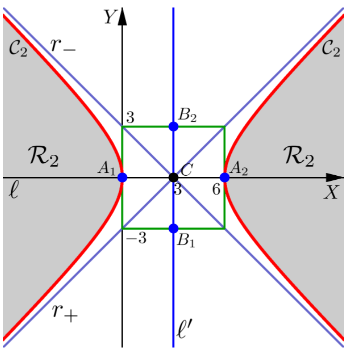


Fig. 16: Região $\mathcal{R}_2$.

Substituindo as coordenadas do centro na expressão $x^2 - y^2 - 6x$:

$$3^2 - 0^2 - 6 \cdot 3 = 9 - 0 - 18 = -9 < 0\,.$$

Portanto, $\mathcal{R}_2$ consiste da união das regiões determinadas pela hipérbole C_2 que contêm os focos e inclui os ramos da curva C_2, onde a igualdade $x^2 - y^2 - 6x = 0$ é verificada. Na figura 16 mostramos a região $\mathcal{R}_2$.

• **Região $\mathcal{R}_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 \geq 0$.**
A elipse $C_3 : x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0$ divide o plano em duas regiões, uma das quais (denominada interior) contém o centro $C = (3, 0)$.
O sinal da expressão $x^2 + 16y^2 - 6x - 7$ no centro C é:

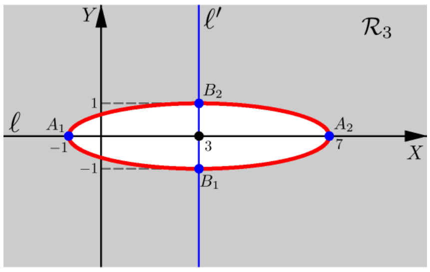


Fig. 17: Região $\mathcal{R}_3$.

$$3^2 + 16 \cdot 0^2 - 6 \cdot 3 - 7 = 9 + 0 - 18 - 7 = -16 < 0 .$$

Portanto, a região $\mathcal{R}_3$ é a região exterior à elipse C_3 junto com a própria curva C_3 que é onde a igualdade $x^2 + 16y^2 - 6x - 7 = 0$ é satisfeita.

• **Regiões $\mathcal{R}_4 : x \leq 10$ e $\mathcal{R}_5 : y \geq -4$.**
A região $\mathcal{R}_4$ consiste dos pontos do plano à esquerda da reta $x = 10$, incluindo os pontos da reta, e a região $\mathcal{R}_5$ consiste dos pontos do plano acima da reta horizontal $y = -4$, incluindo os pontos da reta.

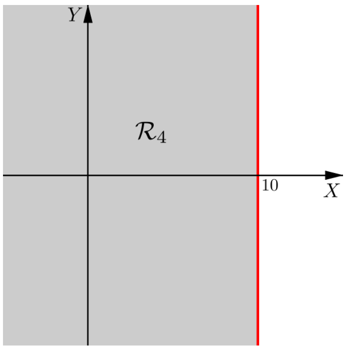


Fig. 18: Região $\mathcal{R}_4$.

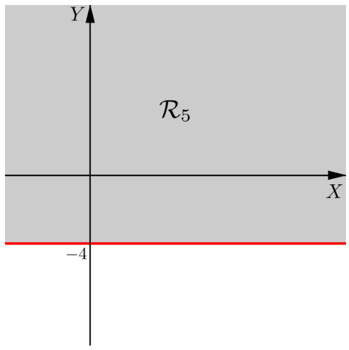


Fig. 19: Região $\mathcal{R}_5$.

• **Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4 \cap \mathcal{R}_5$.**
Para esboçarmos corretamente a região $\mathcal{R}$, devemos determinar as:

∘ **Intersecções da parábola C_1 com $x = 10$ e $y = -4$.**

A parábola C_1 intersecta a reta vertical $x = 10$ exatamente no vértice $(10, 0)$. Para achar a intersecção de C_1 com a reta horizontal $y = -4$, substituímos y por -4 na equação $C_1 : y = -(x - 10)^2$:

$$-4 = -(x - 10)^2 \Longrightarrow (x - 10)^2 = 4 \Longrightarrow x - 10 = \pm 2 \Longrightarrow x = 10 \pm 2 .$$

Temos então, que $C_1 \cap \{y = -4\} = \{(8, -4), (12, -4)\}$.

$\circ$ **Intersecções da hipérbole C_2 com $x = 10$ e $y = -4$.**

Para achar a intersecção de C_2 com a reta horizontal $y = -4$, substituímos y por -4 na equação $C_2 : (x-3)^2 - y^2 = 9$:

$$\begin{aligned}(x-3)^2-(-4)^2=9 &\implies (x-3)^2-16=9 \implies (x-3)^2=16+9=25\\ &\implies x-3=\pm 5 \implies x = 3\pm 5\,.\end{aligned}$$

Logo

$$C_2 \cap \{y=-4\} = \{(-2,-4),(8,-4)\}.$$

Em particular, observe que:

$$C_1 \cap C_2 \cap \{y=-4\} = \{(8,-4)\}.$$

Para achar a intersecção de C_2 com a reta vertical $x = 10$, substituímos x por 10 na equação $C_2 : (x-3)^2 - y^2 = 9$:

$$(10-3)^2 - y^2 = 9 \implies 7^2 - y^2 = 9 \implies y^2 = 49-9 = 40 \implies y = \pm 2\sqrt{10}$$

Logo,

$$C_2 \cap \{x=10\} = \{(10,-2\sqrt{10}),(10,2\sqrt{10})\}.$$

Na figura 20 mostramos todas as curvas envolvidas e na figura 21 o esboço da região $\mathcal{R}$. $\square$

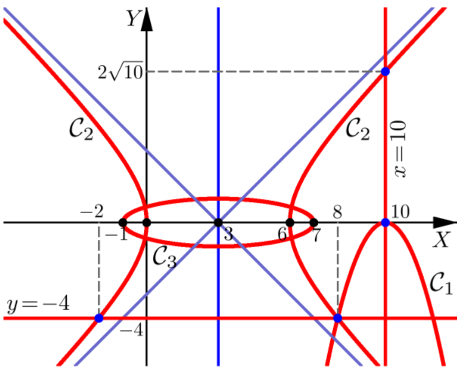


Fig. 20: Curvas C_1, C_2 e C_3.

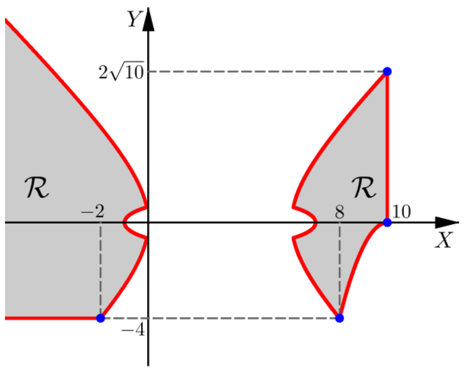


Fig. 21: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 \cap \mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_4 \cap \mathcal{R}_5$.

Exemplo 13

Classifique, em função do parâmetro $\lambda \in \mathbb{R}$, a família de curvas

$$(\lambda-1)x^2 + (\lambda-2)y^2 - 2\lambda(\lambda-1)x + \lambda^3 - 2\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0\,,$$

indicando também, nos casos não-degenerados, se a reta focal é paralela ao eixo$-OX$ ou ao eixo$-OY$.

Solução.
Completando o quadrado, temos que:

$$\begin{aligned}
& (\lambda-1)x^2+(\lambda-2)y^2-2\lambda(\lambda-1)x+\lambda^3-2\lambda^2-2\lambda+3=0\\
\iff\ & (\lambda-1)(x^2-2\lambda x)+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3\\
\iff\ & (\lambda-1)(x^2-2\lambda x+\lambda^2)+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3+\lambda^2(\lambda-1)\\
\iff\ & (\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=-\lambda^3+2\lambda^2+2\lambda-3+\lambda^3-\lambda^2\\
\iff\ & (\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=\lambda^2+2\lambda-3\\
\iff\ & (\lambda-1)(x-\lambda)^2+(\lambda-2)y^2=(\lambda-1)(\lambda+3),.
\end{aligned}$$

Para fazermos a classificação, precisamos estudar o sinal dos coeficientes $\lambda-1$, $\lambda-2$ e $(\lambda-1)(\lambda+3)$ da equação:

	$-\infty<\lambda<-3$	$\lambda=-3$	$-3<\lambda<1$	$\lambda=1$	$1<\lambda<2$	$\lambda=2$	$2<\lambda<+\infty$
$\lambda-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$\lambda-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$(\lambda-1)(\lambda+3)$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$

Então, para:

• $\lambda\in(-\infty,-3)$:

A equação representa o conjunto vazio, pois

$$(\lambda-1)(x-\lambda)^2\le 0,\ (\lambda-2)y^2\le 0 \ \text{ e } \ (\lambda+3)(\lambda-1)>0.$$

• $\lambda=-3$:

A equação $-4(x+3)^2-5y^2=0$ representa o conjunto unitário que consiste do ponto $(-3,0)$.

• $\lambda\in(-3,1)$:

A equação, que se escreve na forma

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}}+\frac{y^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2}}=1\,,$$

representa uma elipse com centro $(\lambda,0)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$, pois

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}=\frac{(1-\lambda)(\lambda+3)}{1-\lambda}>\frac{(1-\lambda)(\lambda+3)}{2-\lambda}=\frac{(\lambda+3)(\lambda-1)}{\lambda-2}>0\,,$$

já que $0<1-\lambda<2-\lambda$ e $\lambda+3>0$ para λ nesse intervalo.

• $\lambda=1$:

A equação $-y^2=0$, ou seja, $y=0$, representa o eixo$-OX$.

• $\lambda\in(1,2)$:

A equação representa uma hipérbole de centro $(\lambda, 0)$ e reta focal igual ao eixo$-OX$, pois

$$\frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1} > 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2} < 0\,,$$

para λ nesse intervalo.

• $\lambda = 2$:

A equação $(x-2)^2 = 5$, ou seja, $x = 2 \pm \sqrt{5}$, representa um par de retas paralelas ao eixo$-OY$.

• $\lambda \in (2, +\infty)$:

A equação, que se escreve na forma

$$\frac{(x-\lambda)^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-1}} + \frac{y^2}{\dfrac{(\lambda-1)(\lambda+3)}{\lambda-2}} = 1\,,$$

representa uma elipse de centro $(\lambda, 0)$ e reta focal paralela ao eixo$-OY$, pois $\lambda - 1 > \lambda - 2 > 0$ e $(\lambda-1)(\lambda+3) > 0$ para λ nesse intervalo. □

Exemplo 14

Seja $\mathcal{P}$ uma parábola com reta focal paralela ao eixo$-OX$ e foco $F = (0, 3)$, que intersecta o eixo$-OX$ no ponto $(4, 0)$ e o eixo$-OY$ no ponto $(0, 2)$.

(a) Determine o vértice, a diretriz e a equação da parábola $\mathcal{P}$.

(b) Faça um esboço de $\mathcal{P}$, indicando seus elementos.

Solução.

(a) Como a reta focal ℓ da parábola é paralela ao eixo$-OX$ e o foco $F = (0, 3) \in \ell$, temos que $\ell : y = 3$, $V = (x_0, 3)$ é o vértice, para algum $x_0 \in \mathbb{R}$, já que $V \in \ell$, e

$$(y-3)^2 = \pm 4p(x - x_0)$$

é a forma da equação de $\mathcal{P}$.

Além disso, como $\mathcal{P} \cap \text{eixo} - OX = \{(4, 0)\}$ e $\mathcal{P} \cap \text{eixo} - OY = \{(0, 2)\}$, temos:

$$(0-3)^2 = \pm 4p(4 - x_0) \qquad \text{e} \qquad (2-3)^2 = \pm 4p(0 - x_0)\,,$$

isto é,

$$9 = \pm 4p(4 - x_0) \qquad \text{e} \qquad 1 = \pm 4p(-x_0)\,.$$

Logo, $9 = \pm 16p \pm 4p(-x_0) = \pm 16p + 1$, ou seja, $8 = \pm 16p$.
Sendo $p > 0$, concluímos que $8 = 16p$, isto é, $p = \frac{1}{2}$, e $1 = 4p(-x_0) = -2x_0$, ou seja, $x_0 = -\frac{1}{2}$. Obtemos, assim, o vértice $V = \left(-\frac{1}{2}, 3\right)$ da parábola e sua equação:

$$\mathcal{P} : (y-3)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right).$$

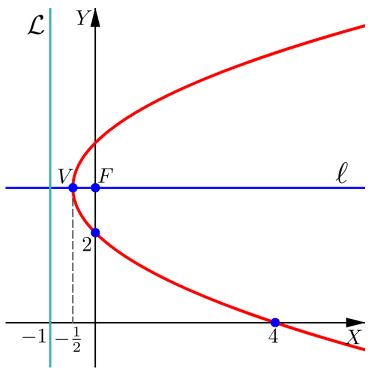


Fig. 22: $\mathcal{P} : (y-3)^2 = 2\left(x + \frac{1}{2}\right)$.

A diretriz de $\mathcal{P}$ é $\mathcal{L} : x = -\frac{1}{2} - p = -1$, pois $\mathcal{L}$ é perpendicular a ℓ, o foco F está à direita de V e $d(V, \mathcal{L}) = p = \frac{1}{2}$.

(b) Na figura 22 mostramos o gráfico de $\mathcal{P}$ junto com seus elementos. $\square$

Exemplo 15

Esboçe, detalhadamente, a região do plano dada pela inequação:

$$\mathcal{R} : (|x| - 4)(4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145) < 0.$$

Solução.
Completando o quadrado na equação

$$4x^2 + 9y^2 - 40x - 54y + 145 = 0,$$

obtemos:

$$\begin{aligned} & 4(x^2 - 10x) + 9(y^2 - 6y) = -145 \\ \iff & 4(x^2 - 10x + 25) + 9(y^2 - 6y + 9) = -145 + 100 + 81 \\ \iff & 4(x-5)^2 + 9(y-3)^2 = 36 \\ \iff & \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} = 1\,, \end{aligned}$$

que é a equação de uma elipse de centro $C = (5, 3)$, reta focal $\ell : y = 3$ (paralela ao eixo$-OX$), $a = 3$, $b = 2$, vértices sobre a reta focal $A_1 = (2, 3)$ e $A_2 = (8, 3)$, e vértices sobre a reta não-focal $B_1 = (5, 1)$ e $B_2 = (5, 5)$.
Então, a inequação, que define a região $\mathcal{R}$, pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{R} : (|x| - 4)\left(\frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} - 1\right) < 0.$$

Assim, $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, onde:

$$\mathcal{R}_1 : \begin{cases} |x| - 4 < 0 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} - 1 > 0 \end{cases} \qquad \mathcal{R}_2 : \begin{cases} |x| - 4 > 0 \\ \dfrac{(x-5)^2}{9} + \dfrac{(y-3)^2}{4} - 1 < 0. \end{cases}$$

• **A região $\mathcal{R}_1$.**

$$\mathcal{R}_1 = \{\,(x,y) \mid x \in (-4,4)\,\} \cap \left\{ (x,y) \mid \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} > 1 \right\},$$

consiste dos pontos exteriores à elipse contidos na faixa limitada pelas retas verticais $x = -4$ e $x = 4$, excluindo os pontos da elipse e das retas.

• **A região $\mathcal{R}_2$.**

$$\mathcal{R}_2 = \{\,(x,y) \mid x \in (-\infty,-4) \cup (4,+\infty)\,\}$$
$$\cap \left\{ (x,y) \mid \frac{(x-5)^2}{9} + \frac{(y-3)^2}{4} < 1 \right\},$$

consiste dos pontos exteriores à faixa limitada pelas retas $x = -4$ e $x = 4$ que estão na região interior à elipse, excluindo os pontos das retas e da elipse.

Nas figuras abaixo mostramos as regiões $\mathcal{R}_1$ e $\mathcal{R}_2$:

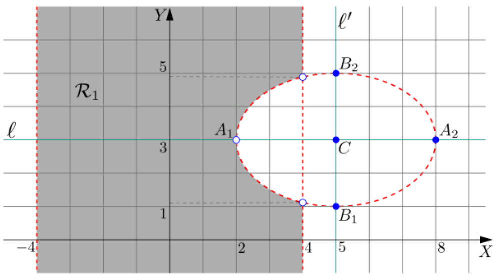


Fig. 23: Região $\mathcal{R}_1$.

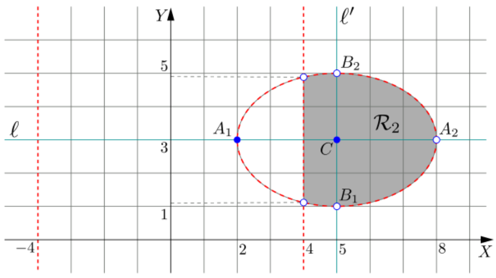


Fig. 24: Região $\mathcal{R}_2$.

Na figura 25 mostramos a região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$. $\square$

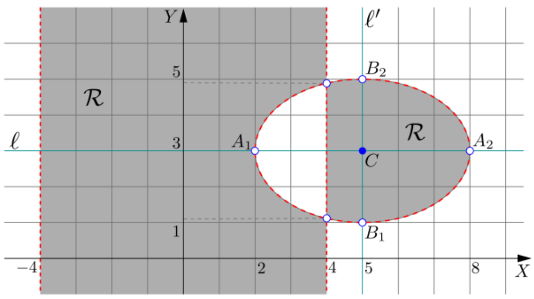


Fig. 25: Região $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$.

Exemplo 16

Determine a equação da elipse $\mathcal{E}$, da qual se conhecem um foco $F = (1,3)$ e uma diretriz $\mathcal{L} : x + 2y = 10$, sabendo que seu centro encontra-se no eixo$-OY$.

Solução.
Como a reta focal ℓ da elipse é perpendicular à diretriz $\mathcal{L} : x + 2y = 10$ e $F = (1,3) \in \ell$, temos que

$$\ell : 2x - y = -1.$$

Além disso, como o centro $C = (0, y_0) \in \ell$, temos que $-y_0 = -1$, ou seja, $C = (0,1)$.
Temos, também, que a reta $\mathcal{L} : x + 2y = 10$ é a diretriz correspondente ao foco $F = (1,3)$, pois

$$d(F,\mathcal{L}) = \frac{|1+6-10|}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}} < d(C,\mathcal{L}) = \frac{|0+2-10|}{\sqrt{5}} = \frac{8}{\sqrt{5}}.$$

Como

$$c = d(F,C) = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \quad \text{e} \quad \frac{a}{e} = \frac{a^2}{c} = d(C,\mathcal{L}) = \frac{8}{\sqrt{5}},$$

obtemos que $a^2 = 8$, isto é, $a = 2\sqrt{2}$ e $e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}$.
Logo, um ponto $P = (x,y)$ pertence à elipse $\mathcal{E}$ se, e somente se,

$$d(P,F) = e\, d(P,\mathcal{L}),$$

ou seja,

$$\begin{aligned}
& d(P,F)^2 = e^2\, d(P,\mathcal{L})^2 \\
\iff\ & (x-1)^2 + (y-3)^2 = \frac{5}{8}\,\frac{|x+2y-10|^2}{5} \\
\iff\ & x^2 - 2x + 1 + y^2 - 6x + 9 = \frac{1}{8}\,(x+2y-10)^2 \\
\iff\ & 8x^2 - 16x + 8y^2 - 48x + 80 = x^2 + 4xy + 4y^2 - 20x - 40y + 100 \\
\iff\ & \boxed{\mathcal{E} : 7x^2 - 4xy + 4y^2 + 4x - 8x - 20 = 0}
\end{aligned}$$

é a equação da elipse $\mathcal{E}$. □

Exemplo 17

Verifique que a equação do segundo grau

$$-7x^2 + 8xy - y^2 + \sqrt{5}(-x + y) = 0 \qquad (\star)$$

representa um par de retas concorrentes e ache suas equações.

Solução.

A equação tem coeficientes:

$$A = -7\,, \quad B = 8\,, \quad C = -1\,, \quad D = -\sqrt{5}\,, \quad E = \sqrt{5}\,, \quad \text{e} \quad F = 0\,.$$

Como $A \neq C$, devemos girar o eixo$-OX$ e o eixo$-OY$ de um ângulo θ, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$, no sentido positivo, onde

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{B}{A - C} = \frac{8}{-7 - (-1)} = -\frac{8}{6} = -\frac{4}{3},$$

e escrever a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ do novo sistema de eixos ortogonais $O\,\overline{X}\,\overline{Y}$, obtido após a rotação positiva de θ do sistema de eixos ortogonais OXY.

Sendo $\operatorname{tg} 2\theta = -\dfrac{4}{3} < 0$, temos que $\cos 2\theta = -\dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{16}{9}}} = -\dfrac{3}{5}$. Logo,

$$\cos\theta = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \qquad \text{e} \qquad \operatorname{sen}\theta = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}\,.$$

Efetuando a mudança de coordenadas dada pelas relações:

$$\begin{cases} x = \cos\theta\,\overline{x} - \operatorname{sen}\theta\,\overline{y} \\ y = \operatorname{sen}\theta\,\overline{x} + \cos\theta\,\overline{y} \end{cases}, \quad \text{ou seja,} \quad \begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(\overline{x} - 2\,\overline{y}) \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(2\overline{x} + \overline{y})\,, \end{cases}$$

na equação $(\star)$, obtemos a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

$$\overline{A}\,\overline{x}^2 + \overline{C}\,\overline{y}^2 + \overline{D}\,\overline{x} + \overline{E}\,\overline{y} + \overline{F} = 0\,,$$

onde $\overline{F} = F = 0$,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \overline{A} & 0 \\ 0 & \overline{C} \end{pmatrix} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 18 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -45 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\begin{pmatrix} \overline{D} \\ \overline{E} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sqrt{5} \\ \sqrt{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Assim, a equação nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$ é

$$\overline{x}^2 - 9\overline{y}^2 + \overline{x} + 3\overline{y} = 0\,.$$

Completando os quadrados, obtemos:

$$\begin{aligned}
& \left(\overline{x}^2 + \overline{x}\right) - 9\left(\overline{y}^2 - \frac{1}{3}\overline{y}\right) = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(\overline{x}^2 + \overline{x} + \frac{1}{4}\right) - 9\left(\overline{y}^2 - \frac{1}{3}\overline{y} + \frac{1}{36}\right) = \frac{1}{4} - 9 \cdot \frac{1}{36} \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(\overline{x} + \frac{1}{2}\right)^2 - 9\left(\overline{y} - \frac{1}{6}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0 \\
\Longleftrightarrow\quad & \left(\overline{x} + \frac{1}{2}\right)^2 = 9\left(\overline{y} - \frac{1}{6}\right)^2 \\
\Longleftrightarrow\quad & \overline{x} + \frac{1}{2} = \pm 3\left(\overline{y} - \frac{1}{6}\right).
\end{aligned}$$

Logo, a equação $(\star)$ representa o par de retas concorrentes:

$$\overline{x} + \frac{1}{2} = 3\left(\overline{y} - \frac{1}{6}\right) \qquad \text{e} \qquad \overline{x} + \frac{1}{2} = -3\left(\overline{y} - \frac{1}{6}\right),$$

ou seja, nas coordenadas $\overline{x}$ e $\overline{y}$:

$$\overline{x} - 3\overline{y} = -1 \qquad \text{e} \qquad \overline{x} + 3\overline{y} = 0\,.$$

Para achar as equações das retas nas coordenadas x e y, usamos as relações de mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} \overline{x} = \cos\theta\, x + \operatorname{sen}\theta\, y \\ \overline{y} = -\operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y \end{cases}, \qquad \text{ou seja,} \qquad \begin{cases} \overline{x} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(x + 2\,y) \\ \overline{y} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y)\,. \end{cases}$$

Substituindo $\overline{x}$ e $\overline{y}$ nas equações das retas, obtemos:

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) - 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) = -1$$

e

$$\frac{1}{\sqrt{5}}(x + 2y) + 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{5}}(-2x + y) = 0\,,$$

ou seja,

$$7x - y = -\sqrt{5} \qquad \text{e} \qquad -x + y = 0\,. \square$$

1. Exercícios de revisão

1. Seja C o círculo $x^2 + y^2 = r^2$ e $F = (a, 0)$ um ponto interior a C. Determine a equação que descreve o conjunto dos centros dos círculos tangentes a C que passam por F.

2. Dê a equação da elipse de excentricidade $\frac{1}{2}$, que tem um foco em $(3, 0)$ e diretriz correspondente a esse foco de equação $x + y = 1$.

3. Classifique a curva e reduza à forma canônica.

(a) $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

(b) $25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$.

(c) $4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$.

(d) $7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$.

4. Sejam $C_1 : x^2+9y^2-8x-72y+151 = 0$, $C_2 : x^2-y^2-8x+8y+4 = 0$, e $C_3 : y^2 + x - 8y + 6 = 0$.

(a) Classifique as cônicas acima e determine seus elementos.

(b) Verifique que $C_1 \cap C_3 = \emptyset$.

(c) Determine $C_2 \cap C_3$.

(e) Faça um esboço detalhado da região do plano dada pelo sistema:

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x^2 + 9y^2 - 8x - 72y + 151 \geq 0 \\ x^2 - y^2 - 8x + 8y + 4 \geq 0 \\ y^2 + x - 8y + 6 \leq 0 \\ x \geq 2\,. \end{cases}$$

5. Considere a cônica $C : 7x^2 + 48xy - 7y^2 - 40x - 30y - 75 = 0$.

(a) Determine os vértices, os vértices imaginários, as assíntotas e a reta-focal da cônica C nas coordenadas x e y.

(b) Faça um esboço da curva C, indicando os elementos encontrados no item anterior.

6. Descreva as regiões abaixo por meio de desigualdades do tipo:

$$\begin{cases} g_1(x) \le y \le g_2(x) \\ a \le x \le b \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} h_1(y) \le x \le h_2(y) \\ c \le y \le d \end{cases} .$$

(a) Região limitada pela hiperbole $xy = 4$ e pelas retas $y = x$ e $x = 6$.

(b) Região limitada pelas parábolas $y^2 = x - 1$ e $(x-1)^2 = y$.

(c) Região acima das retas $y = \frac{3}{4}|x| - 3$ e dentro da elipse $\dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$.

(d) Região acima da parábola $y = x^2$ e abaixo da reta que passa pelos pontos $(-1,1)$ e $(2,4)$.

7. Seja $\mathcal{P}$ a parábola que intersecta o eixo-OY, com foco $F = (3,0)$, reta-focal $\ell : x + 3y = 3$ e $d(F, \mathcal{L}) = \dfrac{6}{\sqrt{10}}$, onde $\mathcal{L}$ é a diretriz.

(a) Determine a equação de $\mathcal{P}$, de $\mathcal{L}$ e o vértice de $\mathcal{P}$.

(b) Faça um esboço de $\mathcal{P}$, indicando todos os seus elementos.

8. Esboçe os conjuntos dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

(a) $(|x| - 1)(|y| - 1) \le 1$.

(b) $x^2 + y^2 - 2|x| - 2y = 2$.

9. Faça um esboço do conjunto dos pontos do plano que satisfazem a inequação:

(a) $(|x| - 2)(4x^2 - 9y^2 - 40x - 54y + 10) \le 0$.

(b) $(9x^2 + y^2 - 36x + 27)(x^2 - 4x + y + 4) > 0$.

10. Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais o conjunto solução da inequação $x^2 - 2x + y + a > 0$ contém o eixo-OX.

11. Esboce, detalhadamente, a região do plano definida pelo sistema de inequações dado.

(a) $\begin{cases} |x + y| \le 2 \\ |x - y| < 2 \end{cases}$; **(b)** $\begin{cases} |x| \ge y + 1 \\ x^2 + y^2 < 1 \\ x > y \end{cases}$; **(c)** $\begin{cases} x \le y + 1 \\ x \ge -y \\ x^2 + y^2 > \frac{1}{2} \end{cases}$

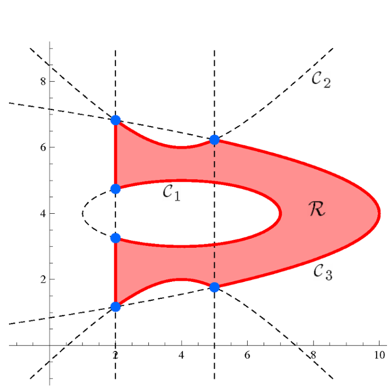
1.1. Respostas

1. $\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{\frac{r^2}{4}} + \frac{y^2}{\frac{r^4-a^2}{4}} = 1.$

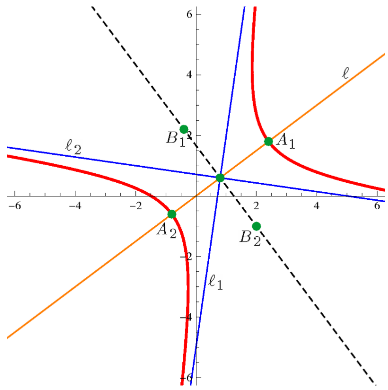
2. $7x^2 - 2xy + 7y^2 - 46x + 2y + 71 = 0.$

3. (a) Tipo hiperbólico, $\overline{x}^2 - \frac{\overline{y}^2}{4} = 1$. (b) Tipo elíptico, $\frac{\overline{x}^2}{16} + \frac{\overline{y}^2}{9} = 1$. (c) Tipo hiperbólico, $\frac{\overline{x}^2}{9} - \frac{\overline{y}^2}{4} = 1$. (d) Tipo hiperbólico, $\overline{x}^2 - 4\overline{y}^2 = 0$ (hipérbole degenerada) par de retas concorrentes.

4. (a) $\mathcal{C}_1$ é a elipse de equação canônica $\frac{(x-4)^2}{9} + (y-4)^2 = 1$, excentricidade $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, centro $(4,4)$, focos $(4-2\sqrt{2},4)$ e $(4+2\sqrt{2},4)$, diretrizes respectivas $\ell_1 : x = 4 - \frac{9}{2\sqrt{2}}$ e $\ell_2 : x = 4 + \frac{9}{2\sqrt{2}}$, vértices sobre o eixo-focal $(1,4)$ e $(7,4)$, vértices sobre o eixo não-focal $(4,3)$ e $(4,5)$. $\mathcal{C}_2$ é a hipérbole de equação canônica $\frac{(y-4)^2}{4} - \frac{(x-4)^2}{4} = 1$, vértices $(4,2)$ e $(4,6)$, focos $(4, 2-2\sqrt{2})$ e $(4, 6+2\sqrt{2})$, diretrizes respectivas $\mathcal{L}_1 : y = 4 - \sqrt{2}$ e $\mathcal{L}_2 : y = 4 + \sqrt{2}$, assíntotas $y = x$ e $y = 4 - x$. $\mathcal{C}_3$ é a parábola de equação canônica $(y-4)^2 = -(x-10)$, eixo-focal $y = 4$, vértice $(10,4)$, foco $\left(\frac{39}{4},4\right)$, diretriz $x = \frac{41}{4}$. (b) O sistema formado pelas equações de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_3$ implica na equação $x^2 - 17x + 97 = 0$ que, por ter discriminante negativo, não tem solução para x. Logo $\mathcal{C}_1 \cap \mathcal{C}_3 = \varnothing$. (c) Resolvendo o sistema formado pelas equações de $\mathcal{C}_2$ e $\mathcal{C}_3$ obtemos os pontos de interseção: $(2, 4-2\sqrt{2})$, $(2, 4+2\sqrt{2})$, $(5, 4-\sqrt{5})$ e $(5, 4+\sqrt{5})$. (d) A vertical $x = 2$ intersecta a elipse $\mathcal{C}_1$ em $\left(2, 4+\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$ e $\left(2, 4-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)$, o esboço da região $\mathcal{R}$ é mostrado na figura abaixo.



Exercício 4 (d)



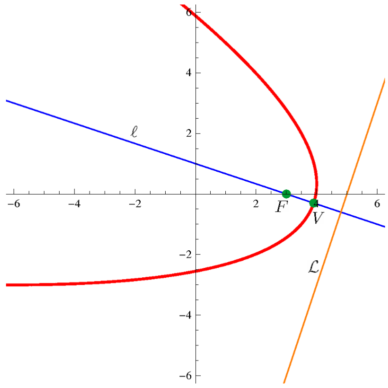
Exercício 5 (b)

5. (a) Vértices: $A_1 = \left(\frac{12}{5}, \frac{9}{5}\right)$ e $A_2 = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}\right)$; Vértices imaginários: $B_1 = \left(-\frac{2}{5}, \frac{11}{5}\right)$ e $B_2 = (2,-1)$; Assíntotas: $\ell_1 : 7x - y = 5$ e $\ell_2 : x + 7y = 5$; Reta-focal: $\ell : 3x - 4y = 0$. (b) Ver figura acima.

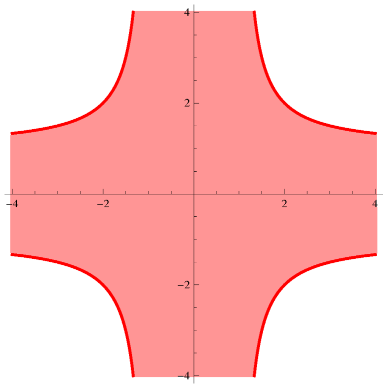
6. (a) $\begin{cases} \frac{4}{x} \le y \le x \\ 2 \le x \le 6 \end{cases}$. (b) $\begin{cases} 1 + y^2 \le x \le \sqrt{y} + 1 \\ 0 \le y \le 1 \end{cases}$. (c) $\begin{cases} \frac{3}{4}|x| - 3 \le y \le 3\sqrt{1 - \frac{x^2}{16}} \\ -4 \le x \le 4 \end{cases}$.

(d) $\begin{cases} x^2 \le y \le x + 2 \\ -1 \le x \le 2 \end{cases}$.

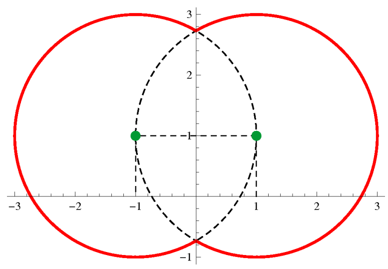
7. (a) $\mathcal{P} : x^2 + 6xy + 9y^2 + 30x - 30y - 135 = 0$; $\mathcal{L} : 3x - y = 15$; $V = \left(\frac{39}{10}, -\frac{3}{10}\right)$. (b) Ver figura abaixo.



8. Ver figuras abaixo.

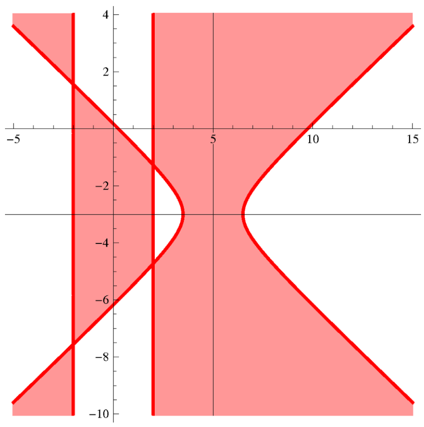


Região - Exercício 8 (a)

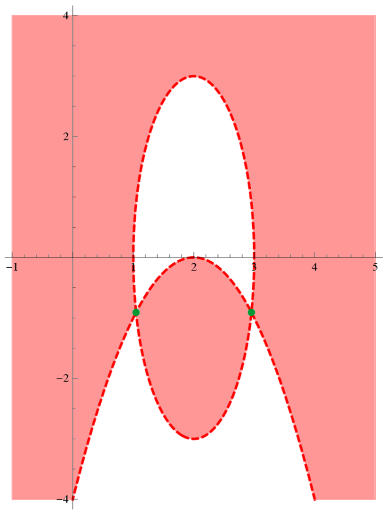


Curva - Exercício 8 (b)

9. Ver figuras abaixo.



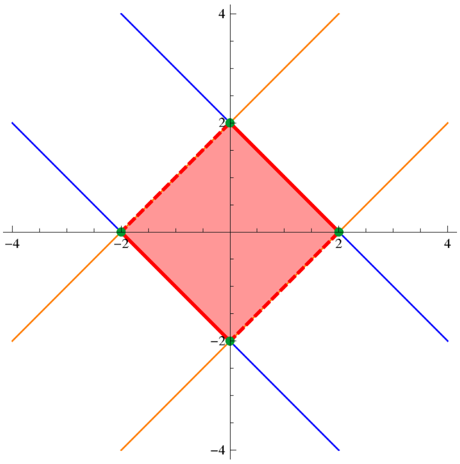
Exercício 9 (a)



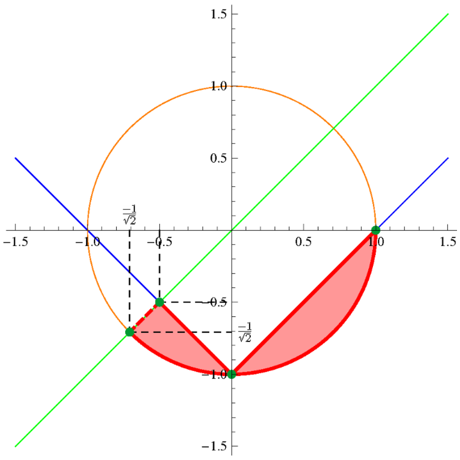
Exercício 9 (b)

10. $a \geq 1$.

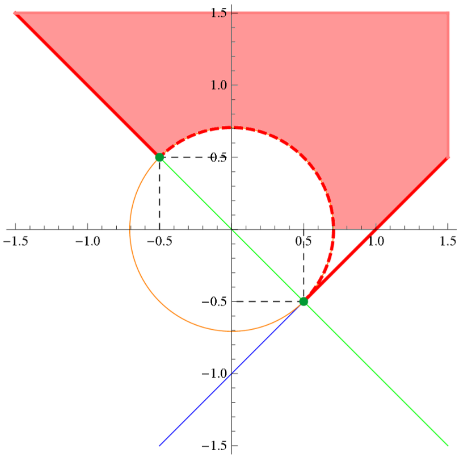
11. Ver figuras abaixo.



Exercício 11 (a)



Exercício 11 (b)



Exercício 11 (c)

F I M

Bibliografía

Textos elementares: Os textos abaixo são de natureza elementar e mais correlatos com a apresentação aqui exposta da Geometria Analítica. Eles são indicados como fonte de consulta e/ou acompanhamento.

1. Charles H. Lehmann, *Geometria Analítica*. Editora Globo. 7ª Edição, 1991.

2. Gelson Iezzi, et al. *Fundamentos de Matemática Elementar*. Vol.7. Editora Atual. São Paulo, 2000.

Textos avançados: Os textos abaixo são um pouco mais elaborados, abordando diversos conceitos através da noção de *vetor* que nós omitimos no presente texto. Eles são indicados como fonte de consulta para expandir o conhecimento adquirido no presente texto através de uma abordagem diferente e como uma iniciação à Álgebra Linear.

1. Alfredo Steinbruch, *Geometria Analitica*. Editora Makron Books, 1987.

2. Elon L. Lima, *Coordenadas no Plano*. CPM, Nº 5, Editora SBM, 5ª Edição, 2002.

3. Elon L. Lima, *Geometria Analítica e Álgebra Linear*. CMU, Nº 10. IMPA, 2ª Edição, 2005.

4. Paulo Boulos - Ivan de Camargo, *Geometria Analítica - um tratamento vetorial*. Editora Makron Books, São Paulo, 2ª Edição, 1987.