UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: Data: *09/Set/2003* Turno: *Tarde*

Curso: Nome:

Período: *03.1* Turma(s): Matrícula:

1ª Questão Encontre a equação normal do plano α que passa pelo ponto $A = (2, 1, -2)$ e é perpendicular aos planos $\gamma : x - 2y + 3z = 4$ e $\sigma : -x + y - z = 1$

2ª Questão Encontre a equação cartesiana do plano β que contém a reta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{2-z}{3}$ e é perpendicular ao plano $\theta : -2x + 3y - z = 5$.

3ª Questão Determine a equação da reta r que passa pelo ponto $A = (2, 1, 1)$ cujo vetor diretor é a bissetriz entre os vetores $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{i} - \vec{k}$.

4ª Questão Determine as equações simétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (3, -1, 2)$ e é paralela aos planos $\tau : 2y + z - 1 = 0$ e $\psi : x - 2y + 3z = 4$.

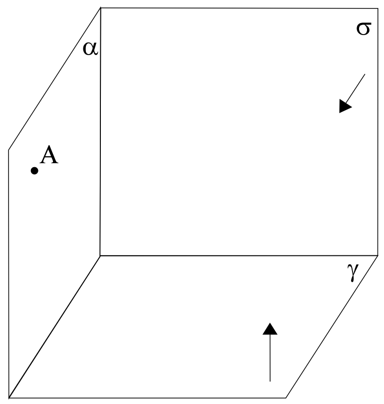
5ª Questão Determine o(s) valor(es) de k de modo que as retas $r_1 : \begin{cases} x = -2 + kt \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 1 + ks \\ y = -2s \\ z = 5s \end{cases}$ sejam reversas. Escolha um valor de k e calcule a distância e o ângulo entre as retas.

Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (2, 1, -2)$
- Planos $\gamma : x - 2y + 3z = 4$ e $\sigma : -x + y - z = 1$



Para determinar o vetor normal do plano α, vamos utilizar os dois vetores paralelos ao plano, ou seja, $\overrightarrow{n_\gamma} = (1, -2, 3)$ e $\overrightarrow{n_\sigma} = (-1, 1, -1)$, logo

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\gamma} \times \overrightarrow{n_\sigma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\alpha} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

Para determinar a equação do plano α vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{n_\alpha}$ são perpendiculares, ou seja, $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0$

$$(x - 2, y - 1, z + 2).(-1, -2, -1) = 0$$

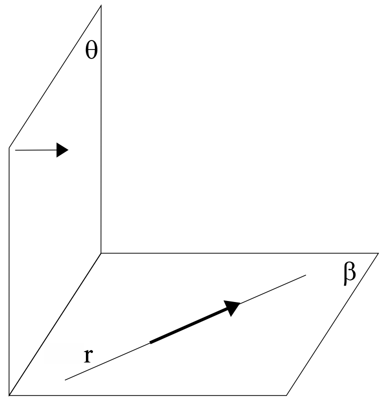
$$\boxed{\alpha : -x - 2y - z + 2 = 0}$$

ou

$$\boxed{\alpha : x + 2y + z - 2 = 0}$$

2ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{2-z}{3}$
- Plano $\theta : -2x + 3y - z = 5$



Considere $\vec{u} = (1, 2, -3)$ o vetor diretor e o ponto $A = (-1, 1, 2)$ da reta r e seja $\overrightarrow{n_\theta} = (-2, 3, -1)$ o vetor normal do plano θ, logo o plano β procurado é definido pelo ponto A e pelos vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{n_\theta}$.

Para determinar a equação normal do plano α, vamos utilizar o fato que os vetores $\vec{u}$, $\overrightarrow{n_\theta}$ e $\overrightarrow{AP}$ são LD (volume =0), logo

$$Volume = |[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \overrightarrow{n_\theta}]| = 0$$

$$[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \overrightarrow{n_\theta}] = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \overrightarrow{n_\theta}] = 7x + 7y + 7z - 14 = 0$$

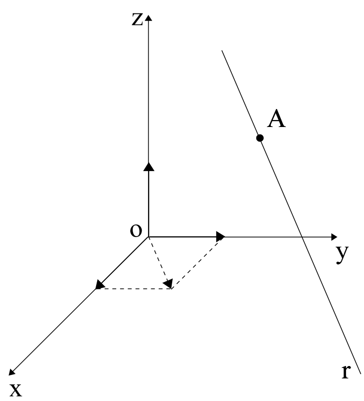
$$\boxed{\beta : 7x + 7y + 7z - 14 = 0}$$

ou

$$\boxed{\beta : x + y + z - 2 = 0}$$

3ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (2, 1, 1)$
- Vetores $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{i} - \vec{k}$



Para determinar a bissetriz entre os vetores $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{i} - \vec{k}$, basta calcular a soma dos dois, pois como ambos tem norma igual a $\sqrt{2}$, a bissetriz será exatamente a diagonal do paralelogramo formado pelos dois vetores, ou seja,

$$\overrightarrow{v} = (\vec{i} + \vec{j}) + (\vec{i} - \vec{k}) = 2\vec{i} + \vec{j} - \vec{k}$$

é o vetor diretor da reta r procurada, logo a reta r é dada pelas equações paramétricas abaixo:

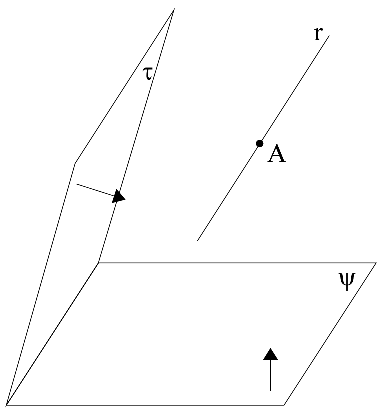
$$\boxed{r : \begin{cases} x = 2 + 2s \\ y = 1 + s \\ z = 1 - s \end{cases}}$$

ou, pelas equações simétricas:

$$\boxed{r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (3, -1, 2)$
- Planos $\tau : 2y + z - 1 = 0$ e $\psi : x - 2y + 3z = 4$



Como a reta r é paralela ao planos ψ e τ, o vetor diretor $\overrightarrow{u}$ é perpendicular aos vetores normais $\overrightarrow{n_\tau} = (0, 2, 1)$ e $\overrightarrow{n_\psi} = (1, -2, 3)$ dos planos τ e ψ, logo

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_\tau} \times \overrightarrow{n_\psi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{u} = 8\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

Portanto pelo ponto A e com a direção do vetor $\overrightarrow{u}$ a reta r é dada pelas equações paramétricas abaixo:

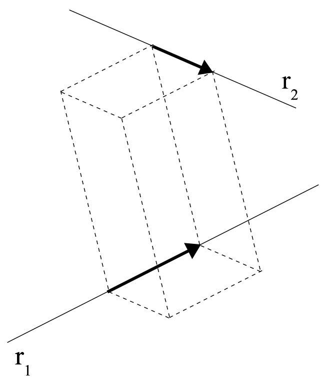
$$r : \begin{cases} x = 3 + 8t \\ y = -1 + t \\ z = 2 - 2t \end{cases}$$

logo, as equações simétricas são:

$$\boxed{r : \frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}}$$

5ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r_1 : \begin{cases} x = -2 + kt \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$
- Reta $r_2 : \begin{cases} x = 1 + ks \\ y = -2s \\ z = 5s \end{cases}$



Observando os vetores diretores $\overrightarrow{v_1} = (k, 3, -2)$ e $\overrightarrow{v_2} = (k, -2, 5)$ e os pontos $A = (-2, 1, 1)$ e $B = (1, 0, 0)$ das retas r_1 e r_2 respectivamente, a única possibilidade para que essas retas sejam reversas é que o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AB} = (3, -1, -1)$ seja diferente de zero (são LI), logo

$$Volume = ||[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}]|| = \begin{vmatrix} k & 3 & -2 \\ k & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$Volume = 12k + 33 \neq 0$$

$$\boxed{k \neq -\frac{33}{12} = -\frac{11}{4}}$$

Fazendo a escolha para $k = 0$, por exemplo, temos:

- A distância entre as retas será obtida através de: $Volume = A_{base} \times h$, onde $A_{base} = ||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}||$ e $h = d(r_1, r_2)$.

Como

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 11\vec{i}$$

$$A_{base} = ||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|| = 11$$

O volume será $Volume = 12k + 33 = 33$, portanto,

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \frac{33}{11} = 3}$$

• O ângulo formado pelas retas, será calculado, como sendo o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, ou seja,

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}}{||\overrightarrow{v_1}||||\overrightarrow{v_2}||}$$

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{-16}{\sqrt{13}\sqrt{29}}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \arccos\left(\frac{-16}{\sqrt{13}\sqrt{29}}\right)}$$