UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: Data: *09/Set/2003* Turno: *Noite*
Curso: Nome:

Período: *03.1* Turma(s): Matrícula:

1ª Questão Escreva a equação do plano π que contém o eixo Ox e um vetor na direção da bissetriz do ângulo entre os vetores $\vec{i}$ e $\vec{k}$.

2ª Questão Encontre a equação normal do plano β que passa pelo ponto $A = (2, -1, -2)$ e é paralelo às retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2s \\ z = s \end{cases}$$

3ª Questão Determine as equações simétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (-1, 3, 2)$ e é perpendicular às retas r_1 e r_2 dadas na questão anterior.

4ª Questão Determine o valor de m para que a reta s determinada pelos pontos $A = (1, 1, -1)$ e $B = (m, -1, 2)$ seja paralela ao plano $\gamma : \begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = 1 + 2p + q \\ z = 3 - p + 3q \end{cases}$.

5ª Questão Determine a posição relativa entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \text{ e } r_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{-y-1}{2} = \frac{z}{-3}$$

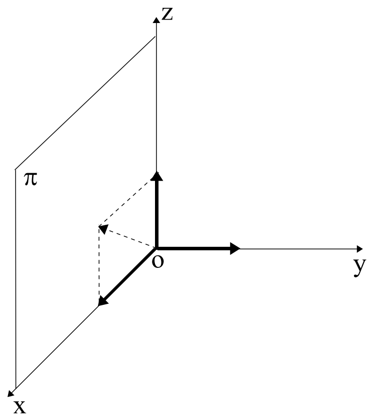
Calcule a distância e o ângulo entre as retas dadas.

Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Eixo Ox
- Vetores $\vec{i}$ e $\vec{k}$



Para determinar a bissetriz entre os vetores $\vec{i}$ e $\vec{k}$, basta calcular a soma dos dois, pois como ambos são vetores unitários, a bissetriz será exatamente a diagonal do paralelogramo formado pelos dois vetores, ou seja, o vetor $\overrightarrow{u} = \vec{i} + \vec{k} = (1,0,1)$.

O vetor $\overrightarrow{v} = \vec{i} = (1,0,0)$ é paralelo ao eixo Ox, logo o plano π fica determinado pela origem $O = (0,0,0)$ e pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Para determinar a equação normal do plano π, vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ são LD (volume =0), logo

$$Volume = |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]| = 0$$

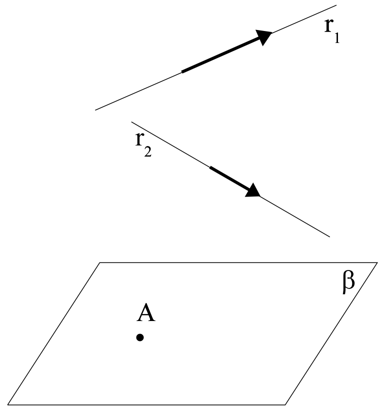
$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -y = 0$$

$$\boxed{\pi : y = 0}$$

2ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (2,-1,-2)$
- Retas $r_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2s \\ z = s \end{cases}$



Considere $\overrightarrow{u} = (1,3,-2)$ e $\overrightarrow{v} = (1,-2,1)$ os vetores diretores das retas r_1 e r_2. Logo o plano β terá como vetor normal o vetor

$$\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\beta} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

Para determinar a equação do plano β vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{n_\beta}$ são perpendiculares, ou seja, $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_\beta} = 0$

$$(x-2, y+1, z+2).(-1,-3,-5) = 0$$

Logo

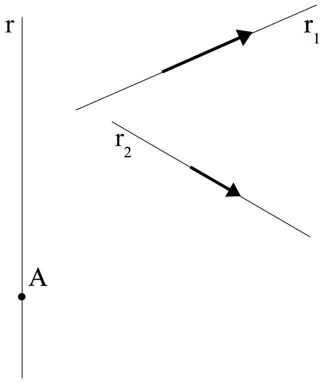
$$\boxed{\beta : -x - 3y - 5z - 11 = 0}$$

ou

$$\boxed{\beta : x + 3y + 5z + 11 = 0}$$

3ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (-1,3,2)$
- Retas $r_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2s \\ z = s \end{cases}$



Considere $\overrightarrow{u} = (1,3,-2)$ e $\overrightarrow{v} = (1,-2,1)$ os vetores diretores das retas r_1 e r_2. Logo a reta r terá como vetor diretor o vetor

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_r} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

Logo a reta r é dada pelas equações paramétricas abaixo:

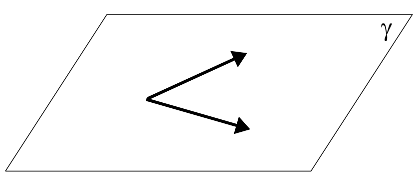
$$r : \begin{cases} x = -1 - s \\ y = 3 - 3s \\ z = 2 - 5s \end{cases}$$

e com equações simétricas:

$$\boxed{r : \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{-5}}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Pontos $A = (1,1,-1)$ e $B = (m,-1,2)$
- Plano γ : $\begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = 1 + 2p + q \\ z = 3 - p + 3q \end{cases}$



Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (m-1,-2,3)$ um vetor diretor da reta s, que para ser paralela ao plano γ deve ser uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1} = (1,2,-1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,1,3)$ paralelos ao plano, ou seja, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_1}$ são LD (volume =0), logo

$$Volume = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}]| = 0$$

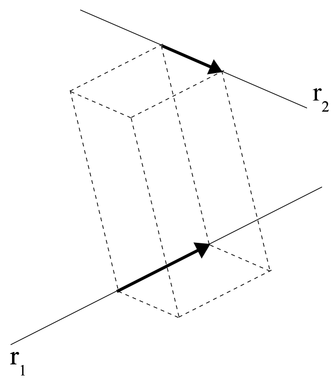
$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}] = \begin{vmatrix} m-1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}] = 7m - 2 = 0$$

$$\boxed{m = \frac{2}{7}}$$

5ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta r_1 : $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$
- Reta r_2 : $\dfrac{x+1}{1} = \dfrac{-y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$



Como os vetores diretores $\overrightarrow{v_1} = (1,-1,-3)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,-2,-3)$ das retas r_1 e r_2, respectivamente, são claramente LI, temos duas possibilidades para a posição relativa entre as retas, ou seja, reversas ou concorrentes.

Para diferenciar retas reversas das concorrentes, basta calcular o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AB} = (0,-3,-2)$ onde $A = (-1,2,2)$ e $B = (-1,1,0)$ são pontos das retas r_1 e r_2, se o volume for positivo, as retas são reversas, se igual a zero, são concorrentes.

$$Volume = |[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}]|$$

$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Logo as retas são $\boxed{\text{reversas}}$.

• A distância entre as retas será obtida através de: $Volume = A_{base} \times h$, onde $A_{base} = ||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}||$ e $h = d(r_1, r_2)$.

Como

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{k}$$

$$A_{base} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

logo,

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}}$$

• O ângulo formado pelas retas, será calculado, como sendo o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, ou seja,

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}}{||\overrightarrow{v_1}||||\overrightarrow{v_2}||}$$

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \arccos\left(\frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{14}}\right)}$$