Provas de Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Período 2003.1

Sérgio de Albuquerque Souza

8 de janeiro de 2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analática

Prof.:	Data: *29/Mai/2003*	Turno: *Manhã*
Curso:	Nome:	
Período: *03.1*	Turma(s):	Matrícula:

1ª Questão Em um paralelogramo $ABCD$ qualquer, sejam M e N os pontos médios dos lados AB e AD, respectivamente. Mostre que:

$$\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}$$

2ª Questão Dados os pontos $A = (1, 0, 1)$, $B = (3, 0, 1)$ e $C = (1, 0, 3)$.

a) Verifique se A, B e C so vrtices de um tringulo.

b) Esse tringulo retngulo?

c) Determine a rea desse tringulo.

3ª Questão Considere os vetores $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\overrightarrow{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ uma base para o $\mathbb{R}^3$? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA. Se verdadeiro, esta base ortogonal?

b) Escreva o vetor $\overrightarrow{d} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ como combinao linear dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$

4ª Questão Sabendo que $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{3}$, $||\overrightarrow{v}|| = 1$ e que 30^o medida do ngulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, determine o ngulo entre $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$.

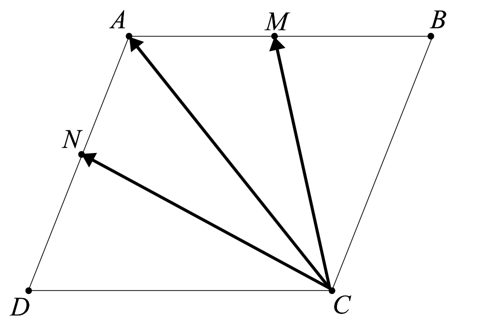
Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- $ABCD$ é um paralelogramo,
- M é ponto médio do lado AB e
- N é ponto médio do lado AD.

Na figura abaixo, considere:



$\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM}$ e $\overrightarrow{CN} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}$ e observe que

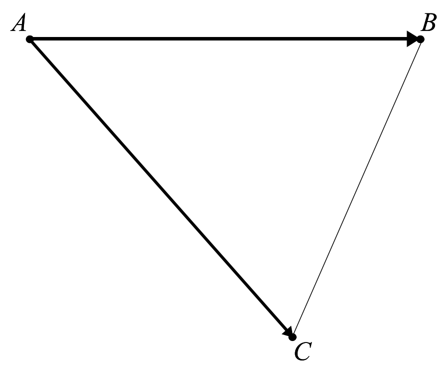
$$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = -2\overrightarrow{AN} - 2\overrightarrow{AM}$$
$$\overrightarrow{CA} = -2(\overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AN})$$

logo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM} + \overrightarrow{CN} &= \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AN}\\ &= 2\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN}\\ &= 2\overrightarrow{CA} - \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA}\end{aligned}$$

2ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (1,0,1)$,
- Ponto $B = (3,0,1)$ e
- Ponto $C = (1,0,3)$.



Considere os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (2,0,0)$ e $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (0,0,2)$.

a) Existem 3 maneiras de verificar se os pontos são vértices de um triângulo:

1. Verificando que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são LI.

   De fato, os vetores são LI, pois é impossível que $\overrightarrow{u} = x\overrightarrow{v}$ com $x \in \mathbb{R}$.

2. Calculando o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

   Note que nesse caso, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ são perpendiculares, pois $\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = 2.0 + 0.0 + 0.2 = 0$, logo são perpendiculares.

3. Verificando que os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ formam um paralelogramo, para tanto, verificaremos que a área é diferente de zero, ou seja, que o produto vetorial é não nulo.

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -4\vec{j} \neq \overrightarrow{0}$$

b) Esse triângulo é retângulo, veja letra a) ítem 2.

c) A área desse triângulo é igual a:

$$A_{\triangleleft} = \frac{||\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}||}{2} = \frac{\sqrt{(-4)^2}}{2} = \frac{4}{2} = 2ua$$

3ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Vetor $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$,
- Vetor $\overrightarrow{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$,
- Vetor $\overrightarrow{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e
- Vetor $\overrightarrow{d} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$, pois

- São 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ e
- São LI.

De fato, pelo teorema $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $x = y = z = 0$ for a solução única, ou seja, que o sistema abaixo só possua a solução trivial.

$$\begin{cases} 2x & + & 0y & + & 1z & = & 0 \\ -1x & + & 1y & + & 2z & = & 0 \\ 0x & + & 2y & - & 1z & = & 0 \end{cases}$$

e para tanto o determinante da matriz dos coeficientes, deve ser diferente de zero, ou seja:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

• Esta base não é ortogonal, pois $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = -1 \neq 0$ ou seja $\overrightarrow{a}$ não é ortogonal a $\overrightarrow{b}$.

b) Para que o vetor $\overrightarrow{d} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ seja uma combinação dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ é preciso encontrar os valores x, y e $z \in \mathbb{R}$, tal que, $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}$, ou seja, basta resolver o seguinte sistema:

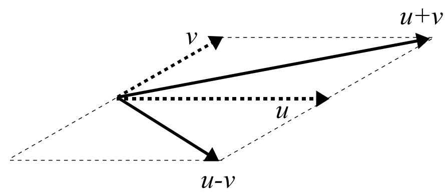
$$\begin{cases} 2x & + & 0y & + & 1z & = & 4 \\ -1x & + & 1y & + & 2z & = & 2 \\ 0x & + & 2y & - & 1z & = & -4 \end{cases}$$

tendo como solução $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$, ou seja:

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- $||\overrightarrow{u}|| = \sqrt{3}$,
- $||\overrightarrow{v}|| = 1$ e
- $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = 30^o$



Considere $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{b} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

Para calcular o ângulo entre $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$, usaremos os seguinte fatos:

• Os vetores $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são não nulos, pois

$$||\overrightarrow{a}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 + 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$

$$||\overrightarrow{a}||^2 = (\sqrt{3})^2 + 2.\frac{3}{2} + 1^2 = 3 + 3 + 1 = 7$$

e

$$||\overrightarrow{b}||^2 = ||\overrightarrow{u}||^2 - 2\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} + ||\overrightarrow{v}||^2$$

$$||\overrightarrow{b}||^2 = (\sqrt{3})^2 - 2.\frac{3}{2} + 1^2 = 3 - 3 + 1 = 1$$

onde

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = ||\overrightarrow{u}||.||\overrightarrow{v}||.\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

$$\overrightarrow{u}.\overrightarrow{v} = \sqrt{3}.1.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}$$

Como $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = (\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}).(\overrightarrow{u} - \overrightarrow{v})$

$$\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = ||\overrightarrow{u}||^2 - ||\overrightarrow{v}||^2 = 3 - 1 = 2$$

temos $\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \dfrac{\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b}}{||\overrightarrow{a}||.||\overrightarrow{b}||}$

$$\cos(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \frac{2}{\sqrt{7}.\sqrt{1}} = \frac{2\sqrt{7}}{7}$$

Ou seja

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}) = \arccos(\frac{2\sqrt{7}}{7})$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova	Cálculo Vetorial e Geometria Analítica	
Prof.:	Data: *29/Mai/2003*	Turno: *Tarde*
Curso:	Nome:	
Período: *03.1*	Turma(s):	Matrícula:

1ª Questão Num triângulo ABC qualquer, sejam M, N e P os pontos médios dos lados AB, BC e CA, respectivamente. Se Q é um ponto qualquer do interior do triângulo, mostre que:

$$\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}$$

2ª Questão Encontre o valor $m \in \mathbb{R}$ de modo que os pontos $A = (0, m, 1)$, $B = (1, 1, 1)$ e $C = (-1, 0, -1)$ determinem um paralelogramo de área igual a 3.

3ª Questão Considere os vetores $\overrightarrow{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$, $\overrightarrow{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$ e $\overrightarrow{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA. Se verdadeiro, esta base é ortogonal?

b) Escreva o vetor $\overrightarrow{d} = -6\vec{i} + \vec{j}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$

4ª Questão Sejam M, N e P pontos quaisquer no espaço. Seja A o ponto médio de NP. Mostre que:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} = ||\overrightarrow{AM}||^2 - ||\overrightarrow{AN}||^2$$

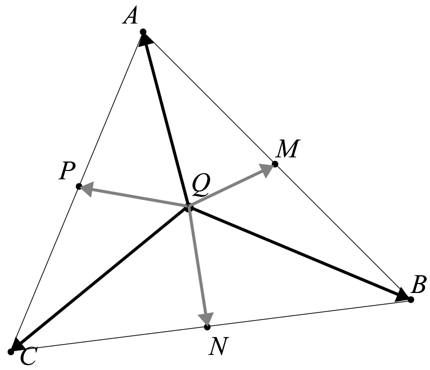
Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- ABC é um triângulo,
- M é ponto médio do lado AB,
- N é ponto médio do lado BC,
- P é ponto médio do lado CA e
- Q um ponto no interior do triângulo.

Na figura abaixo, considere:



$\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM}$, $\overrightarrow{QN} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BN}$ e $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP}$ e observe que

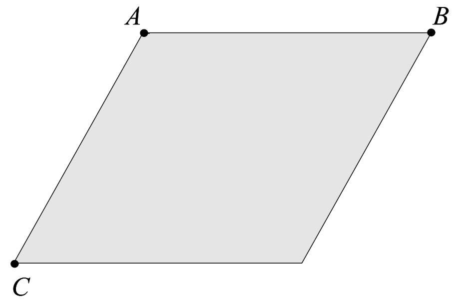
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) \\ &= \overrightarrow{0}\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{QB} + \\ &\quad + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC} + \\ &\quad + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BN} + \overrightarrow{CP} \\ &= \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{QC}\end{aligned}$$

2ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (0, m, 1)$, com $m \in \mathbb{R}$,
- Ponto $B = (1, 1, 1)$ e
- Ponto $C = (-1, 0, -1)$).



Considere os vetores $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (1, 1 - m, 0)$, $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, -m, -2)$.

Para que os 3 pontos determinem um paralelogramo de área igual a 3, os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$ devem satisfazer:

1. O vetor $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}$ deve ser não nulo.

   De fato, $\forall m \in \mathbb{R}$ temos:

   $$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1-m & 0 \\ -1 & -m & -2 \end{vmatrix}$$

   $$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = (2m-2)\vec{i} + 2\vec{j} + (-2m+1)\vec{k} \neq \overrightarrow{0}$$

2. A norma $||\overrightarrow{w}||$ deve ser igual a 3, logo

   $$\sqrt{(2m-2)^2 + 2^2 + (-2m+1)^2} = 3$$

   $$(2m-2)^2 + 2^2 + (-2m+1)^2 = 9$$

   $$8m^2 - 12m + 9 = 9 \Longrightarrow m = 0 \text{ ou } m = \frac{3}{2}$$

3ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Vetor $\overrightarrow{a} = -\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$,
- Vetor $\overrightarrow{b} = 2\vec{i} + \vec{j}$,
- Vetor $\overrightarrow{c} = -\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e
- Vetor $\overrightarrow{d} = -6\vec{i} + \vec{j}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$, pois

- São 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ e
- São LI.

De fato, pelo teorema $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $x = y = z = 0$ for a solução única, ou seja, que o sistema abaixo só possua a solução trivial.

$$\begin{cases} -1x & + & 2y & - & 1z & = & 0 \\ 1x & + & 1y & + & 2z & = & 0 \\ 1x & + & 0y & - & 1z & = & 0 \end{cases}$$

e para tanto o determinante da matriz dos coeficientes, deve ser diferente de zero, ou seja:

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 8 \neq 0$$

- Esta base não é ortogonal, pois $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = -1 \neq 0$ ou seja $\overrightarrow{a}$ não é ortogonal a $\overrightarrow{b}$.

b) Para que o vetor $\overrightarrow{d} = -6\vec{i} + 1\vec{j}$ seja uma combinação dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ é preciso encontrar os valores x, y e $z \in \mathbb{R}$, tal que, $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}$, ou seja, basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} -1x & + & 2y & - & 1z & = & -6 \\ 1x & + & 1y & + & 2z & = & 1 \\ 1x & + & 0y & - & 1z & = & 0 \end{cases}$$

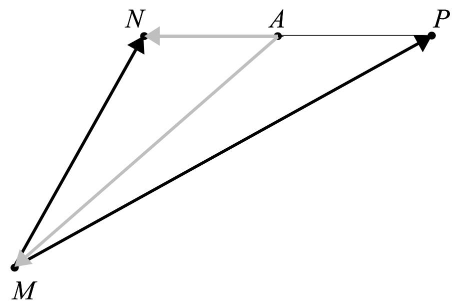
tendo como solução $x = 1$, $y = -2$ e $z = 1$, ou seja:

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - 2\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- M, N e P pontos quaisquer e
- A o ponto médio de NP

Na figura abaixo, considere:



Considere $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$ e $\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}$

Calculando o produto interno e considerando que $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AN}$, temos:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{MP} &= (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}).(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AP}) \\ &= \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AP} + \\ &\quad + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AP} \\ &= ||\overrightarrow{MA}||^2 + \overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AP} - \\ &\quad - \overrightarrow{AP}.\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{AN}.\overrightarrow{AN} \\ &= ||\overrightarrow{MA}||^2 + 0 - ||\overrightarrow{AN}||^2 \\ &= ||\overrightarrow{MA}||^2 - ||\overrightarrow{AN}||^2 \end{aligned}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

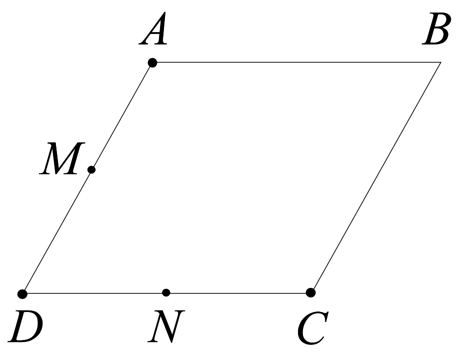
CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

1ª Prova	Cálculo Vetorial e Geometria Analítica	
Prof.:	Data: *29/Mai/2003*	Turno: *Noite*
Curso:	Nome:	
Período: *03.1*	Turma(s):	Matrícula:

1ª Questão Seja $ABCD$ o paralelogramo abaixo. Sejam M e N os pontos médios de AD e DC, respectivamente. Mostre que:

$$\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$$



2ª Questão Os pontos $A = (1, 1, 1)$, $B = (-2, -1, 0)$, $C = (0, 2, -2)$ e $D = (-1, 0, 2)$ são vértices de um paralelepípedo? Em caso afirmativo, determine o volume desse paralelepípedo.

3ª Questão Considere os vetores $\overrightarrow{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$, $\overrightarrow{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$ e $\overrightarrow{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$.

a) $\{\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}, \overrightarrow{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$? JUSTIFIQUE SUA RESPOSTA. Se verdadeiro, esta base é ortogonal?

b) Escreva o vetor $\overrightarrow{v} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ como combinação linear dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$

4ª Questão Sejam $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{v_2} = \alpha\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$ vetores, onde $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são vetores LI, com $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$. Determine o valor de α de modo que $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ sejam LD.

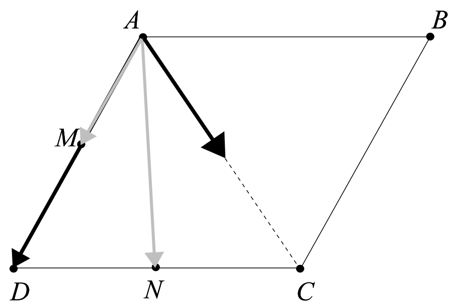
Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- $ABCD$ é um paralelogramo,
- M é ponto médio do lado AD e
- N é ponto médio do lado DC.

Na figura abaixo, considere:



$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ e observe que

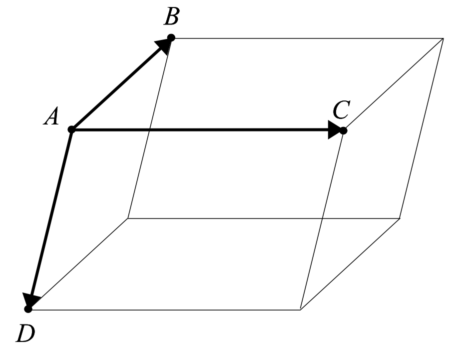
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} &= \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}\\ &= 2\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{DN}\\ &= 2(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{DN})\end{aligned}$$

logo

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} &= \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}\\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}\\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC})\\ &= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\end{aligned}$$

2ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (1, 1, 1)$,
- Ponto $B = (-2, -1, 0)$,
- Ponto $C = (0, 2, -2)$ e
- Ponto $D = (-1, 0, 2)$.



Considere os vetores:

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB} = (-3, -2, -1)$$
$$\vec{v} = \overrightarrow{AC} = (-1, 1, -3)$$
$$\vec{w} = \overrightarrow{AD} = (-2, -1, 1)$$

Existem 2 maneiras de verificar se os pontos são vértices de um paralelepípedo:

1. Verificando que os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ são LI.

   De fato, os vetores são LI, pois no calculo do volume abaixo, se verifica esse fato.

2. Calculando o possível volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$.

   Note que o volume é dado por $V = |[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$, ou seja:

   $$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \begin{vmatrix} -3 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & -3 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -11$$

   Logo o volume $V = |-11| = 11$ e portanto os vetores são LI.

3ª Questão [3,0] Dados da questão:

- Vetor $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j}$,
- Vetor $\vec{b} = \vec{j} + 2\vec{k}$,
- Vetor $\vec{c} = \vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$ e
- Vetor $\vec{d} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$.

a) $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ é uma base para o $\mathbb{R}^3$, pois

- São 3 vetores em $\mathbb{R}^3$ e

- São LI.

  De fato, pelo teorema $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{0}$ se, e somente se, $x = y = z = 0$ for a solução única, ou seja, que o sistema abaixo só possua a solução trivial.

  $$\begin{cases} 2x & + & 0y & + & 1z & = & 0 \\ -1x & + & 1y & + & 2z & = & 0 \\ 0x & + & 2y & - & 1z & = & 0 \end{cases}$$

  e para tanto o determinante da matriz dos coeficientes, deve ser diferente de zero, ou seja:

  $$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -12 \neq 0$$

- Esta base não é ortogonal, pois $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = -1 \neq 0$ ou seja $\overrightarrow{a}$ não é ortogonal a $\overrightarrow{b}$.

b) Para que o vetor $\overrightarrow{d} = 4\vec{i} + 2\vec{j} - 4\vec{k}$ seja uma combinação dos vetores $\overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{b}$ e $\overrightarrow{c}$ é preciso encontrar os valores x, y e $z \in \mathbb{R}$, tal que, $x\overrightarrow{a} + y\overrightarrow{b} + z\overrightarrow{c} = \overrightarrow{d}$, ou seja, basta resolver o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 2x & + & 0y & + & 1z & = & 4 \\ -1x & + & 1y & + & 2z & = & 2 \\ 0x & + & 2y & - & 1z & = & -4 \end{cases}$$

tendo como solução $x = 1$, $y = -1$ e $z = 2$, ou seja:

$$\overrightarrow{d} = \overrightarrow{a} - \overrightarrow{b} + 2\overrightarrow{c}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- $\overrightarrow{v_1} = 2\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}$,
- $\overrightarrow{v_2} = \alpha\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d}$,
- $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ são vetores LI,
- $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a}$ e
- $\overrightarrow{d} = 2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}$.

Note que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_2} &= \alpha\overrightarrow{c} - \overrightarrow{d} \\ &= \alpha\overrightarrow{a} - (2\overrightarrow{a} - 4\overrightarrow{b}) \\ &= (\alpha - 2)\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

Para que os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ sejam LD, temos que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{v_1} &= x\overrightarrow{v_2} \\ 2\overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b} &= x(\alpha - 2)\overrightarrow{a} + 4x\overrightarrow{b} \end{aligned}$$

ou seja:

$$\begin{cases} 2 = x(\alpha - 2) \\ 4 = 4x \end{cases}$$

Logo: $x = 1$ e $2 = \alpha - 2$, portanto $\alpha = 4$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: Data: *08/Jul/2003* Turno: *Manhã*

Curso: Nome:

Período: *03.1* Turma(s): Matrícula:

1ª Questão Determinar a equação cartesiana no plano π que passa pelo ponto $A = (1, -1, 2)$ e é paralelo ao plano γ cujas equações paramétricas são $\gamma : \begin{cases} x = 2 - 3p + 2q \\ y = 1 - 3p + q \\ z = 3 + p + 3q \end{cases}$

2ª Questão Determine a equação normal do plano α que contém as retas $r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$ e $r_2 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{-y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$

3ª Questão Determine o valor de m para que a reta determinada pelos pontos $A = (1, 5, 0)$ e $B = (m, -1, 2)$ seja paralela ao plano $\gamma : \begin{cases} x = 1 + 3p \\ y = 1 + 2p + q \\ z = 3 + 3q \end{cases}$

4ª Questão Sejam r_1 uma reta que passa pelo ponto $A = (1, 1, 1)$ e é perpendicular à reta $y = 2x - 3$, $z = -x$ e r_2 a reta que passa pelos pontos $B = (1, 0, -1)$ e $C = (2, 1, -2)$. Determine a posição relativa entre r_1 e $r2$.

5ª Questão Calcule a distância e o ângulo entre as retas $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = -4 - t \end{cases}$ e $r_2 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{-y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$

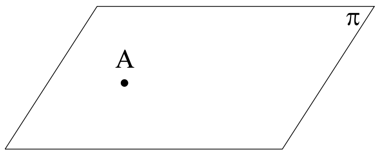
Boa Sorte

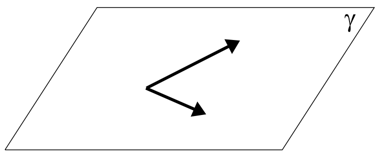
R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (1, -1, 2)$

- Plano $\gamma : \begin{cases} x = 2 & - & 3p & + & 2q \\ y = 1 & - & 3p & + & q \\ z = 3 & + & p & + & 3q \end{cases}$





Para determinar o vetor normal do plano π, vamos utilizar dois vetores paralelos ao plano γ, ou seja $\overrightarrow{v_1} = (-3, -3, 1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (2, 1, 3)$, logo

$$\overrightarrow{n_\pi} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\pi} = -10\vec{i} - 11\vec{j} + 3\vec{k}$$

Para determinar a equação do plano π vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{n_\pi}$ são perpendiculares, ou seja, $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_\pi} = 0$

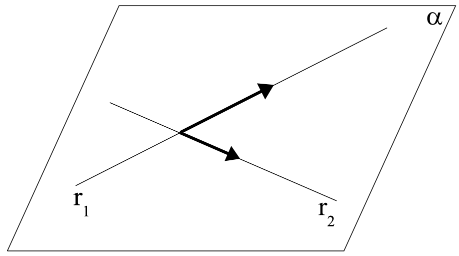
$$(x - 1, y + 1, z - 2).(-10, -11, 3) = 0$$

$$\boxed{\pi : -10x + 11y + 3z + 15 = 0}$$

2ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r_1 : \begin{cases} x & = & -1 & + & t \\ y & = & 2 & - & t \\ z & = & 2 & - & 3t \end{cases}$ e

- Reta $r_2 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{-y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$.



Considere $\overrightarrow{u} = (1, -1, -3)$ e $\overrightarrow{v} = (1, -2, -3)$ os vetores diretores das retas r_1 e r_2 e o ponto $A = (-1, 2, 2)$ da reta r_1, logo o plano α procurado é definido pelo ponto A e pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Para determinar o vetor normal do plano α, vamos utilizar os vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$, logo

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\alpha} = -3\vec{i} - \vec{k}$$

Para determinar a equação do plano π vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{n_\pi}$ são perpendiculares, ou seja, $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0$

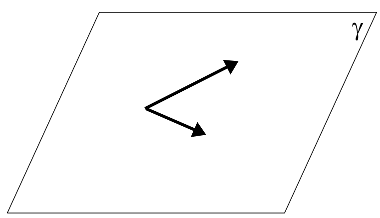
$$(x + 1, y - 2, z - 2).(-3, 0, -1) = 0$$

$$\boxed{\alpha : -3x - z - 1 = 0}$$

3ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Pontos $A = (1, 5, 0)$ e $B = (m, -1, 2)$

- Plano $\gamma : \begin{cases} x = 1 & + & 3p & & \\ y = 1 & + & 2p & + & q \\ z = 3 & & & + & 3q \end{cases}$



Para determinar a reta definida pelos ponto A e B paralela ao plano γ, o vetor diretor $\overrightarrow{AB} = (m-1, -6, 2)$ deve ser perpendicular ao vetor $\overrightarrow{n_\gamma}$.

Para determinar o vetor normal do plano γ, vamos utilizar dois vetores paralelos ao plano, ou seja $\overrightarrow{v_1} = (3,2,0)$ e $\overrightarrow{v_2} = (0,1,3)$, logo

$$\overrightarrow{n_\gamma} = \overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\gamma} = 6\vec{i} - 9\vec{j} + 3\vec{k}$$

Como $\overrightarrow{n_\gamma} \perp \overrightarrow{AB}$, temos $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{n_\gamma} = 0$

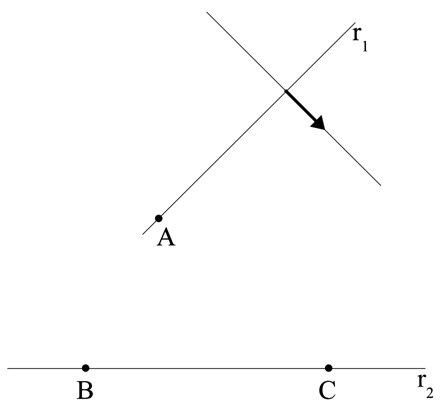
$$(m-1, -6, 2).(6, -9, 3) = 0$$

$$6m - 6 + 54 + 6 = 0$$

$$\boxed{m = -\frac{54}{6} = -9}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Pontos $A = (1,1,1)$, $B = (1,0,-1)$ e $C = (2,1,-2)$
- Reta $y = 2x - 3$, $z = -x$



A reta r_1 é definida pelo ponto A e pela escolha do vetor $\overrightarrow{v_1} = (1,0,1)$, onde $\overrightarrow{v_1}$ é perpendicular ao vetor $\vec{v} = (1,2,-1)$ da reta dada, pois $\vec{v}.\overrightarrow{v_1} = 0$.

Logo a reta é definida como:

$$r_1 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 \\ z = 1 + t \end{cases}$$

A reta r_2 é definida pelo ponto B e pelo vetor $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{BC} = (1,1,-1)$, ou seja,

$$r_2 : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = + t \\ z = -1 - t \end{cases}$$

Como os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$ são claramente LI, temos duas possibilidades para a posição relativa entre as retas, ou seja, reversas ou concorrentes.

Para diferenciar retas reversas das concorrentes, basta calcular o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AB} = (0,-1,-2)$, se o volume for positivo, as retas são reversas, se igual a zero, são concorrentes.

$$Volume = |[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}]| = 0$$

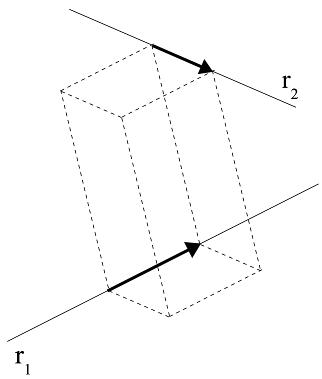
$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4$$

$$Volume = |-4| = 4 \neq 0$$

Logo as retas são $\boxed{\text{reversas}}$.

5ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r_1 : \begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = -3 - t \\ z = -4 - t \end{cases}$ e
- Reta $r_2 : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{-y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$



Como os vetores diretores $\overrightarrow{v_1} = (-2,-1,-1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,-2,-3)$ das retas r_1 e r_2, respectivamente, são claramente LI, temos duas possibilidades para a posição relativa entre as retas, ou seja, reversas ou concorrentes.

Para diferenciar retas reversas das concorrentes, basta calcular o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AB} = (-2,2,4)$, se o volume for positivo, as retas são reversas, se igual a zero, são concorrentes.

$$Volume = |[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}]| = 0$$

$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \\ -2 & 2 & 4 \end{vmatrix} = |4| = 4$$

logo são reversas.

• A distância entre as retas será obtida através de: $Volume = A_{base} \times h$, onde $A_{base} = ||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}||$ e $h = d(r_1, r_2)$.

Como

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} - 7\vec{j} + 5\vec{k}$$

$$A_{base} = \sqrt{1^2 + (-7)^2 + 5^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$$

logo,

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \frac{4}{5\sqrt{3}} = \frac{4}{15}\sqrt{3}}$$

• O ângulo formado pelas retas, será calculado, como sendo o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, ou seja,

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{\overrightarrow{v_1} . \overrightarrow{v_2}}{||\overrightarrow{v_1}|| ||\overrightarrow{v_2}||}$$

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{14}}\right)}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.:	Data: *09/Set/2003*	Turno: *Tarde*
Curso:	Nome:	
Período: *03.1*	Turma(s):	Matrícula:

1ª Questão Encontre a equação normal do plano α que passa pelo ponto $A = (2, 1, -2)$ e é perpendicular aos planos $\gamma : x - 2y + 3z = 4$ e $\sigma : -x + y - z = 1$

2ª Questão Encontre a equação cartesiana do plano β que contém a reta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{2-z}{3}$ e é perpendicular ao plano $\theta : -2x + 3y - z = 5$.

3ª Questão Determine a equação da reta r que passa pelo ponto $A = (2, 1, 1)$ cujo vetor diretor é a bissetriz entre os vetores $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{i} - \vec{k}$.

4ª Questão Determine as equações simétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (3, -1, 2)$ e é paralela aos planos $\tau : 2y + z - 1 = 0$ e $\psi : x - 2y + 3z = 4$.

5ª Questão Determine o(s) valor(es) de k de modo que as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -2 + kt \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} x = 1 + ks \\ y = -2s \\ z = 5s \end{cases} \text{ sejam reversas.}$$

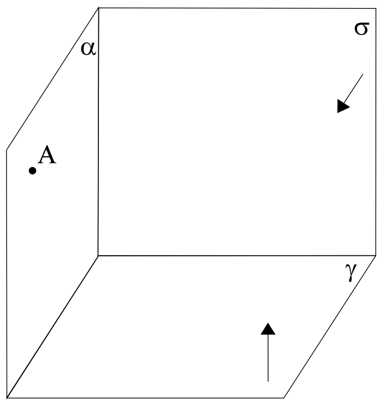
Escolha um valor de k e calcule a distância e o ângulo entre as retas.

Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (2, 1, -2)$
- Planos $\gamma : x - 2y + 3z = 4$ e $\sigma : -x + y - z = 1$



Para determinar o vetor normal do plano α, vamos utilizar os dois vetores paralelos ao plano, ou seja, $\overrightarrow{n_\gamma} = (1, -2, 3)$ e $\overrightarrow{n_\sigma} = (-1, 1, -1)$, logo

$$\overrightarrow{n_\alpha} = \overrightarrow{n_\gamma} \times \overrightarrow{n_\sigma} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\alpha} = -\vec{i} - 2\vec{j} - \vec{k}$$

Para determinar a equação do plano α vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{n_\alpha}$ são perpendiculares, ou seja, $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_\alpha} = 0$

$$(x - 2, y - 1, z + 2).(-1, -2, -1) = 0$$

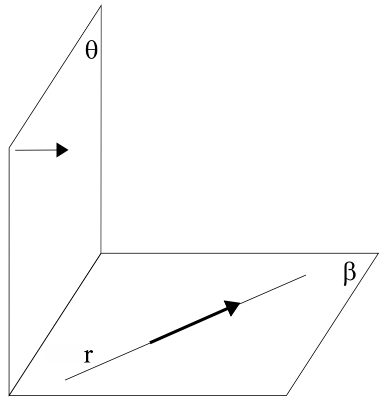
$$\boxed{\alpha : -x - 2y - z + 2 = 0}$$

ou

$$\boxed{\alpha : x + 2y + z - 2 = 0}$$

2ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r : \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{y-1}{2} = \dfrac{2-z}{3}$
- Plano $\theta : -2x + 3y - z = 5$



Considere $\vec{u} = (1, 2, -3)$ o vetor diretor e o ponto $A = (-1, 1, 2)$ da reta r e seja $\overrightarrow{n_\theta} = (-2, 3, -1)$ o vetor normal do plano θ, logo o plano β procurado é definido pelo ponto A e pelos vetores $\vec{u}$ e $\overrightarrow{n_\theta}$.

Para determinar a equação normal do plano α, vamos utilizar o fato que os vetores $\vec{u}$, $\overrightarrow{n_\theta}$ e $\overrightarrow{AP}$ são LD (volume =0), logo

$$Volume = |[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \overrightarrow{n_\theta}]| = 0$$

$$[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \overrightarrow{n_\theta}] = \begin{vmatrix} x+1 & y-1 & z-2 \\ 1 & 2 & -3 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

$$[\overrightarrow{AP}, \vec{u}, \overrightarrow{n_\theta}] = 7x + 7y + 7z - 14 = 0$$

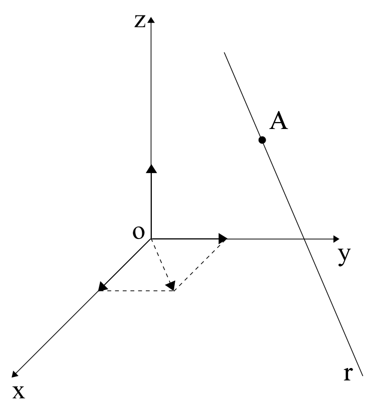
$$\boxed{\beta : 7x + 7y + 7z - 14 = 0}$$

ou

$$\boxed{\beta : x + y + z - 2 = 0}$$

3ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (2, 1, 1)$
- Vetores $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{i} - \vec{k}$



Para determinar a bissetriz entre os vetores $\vec{i} + \vec{j}$ e $\vec{i} - \vec{k}$, basta calcular a soma dos dois, pois como ambos tem norma igual a $\sqrt{2}$, a bissetriz será exatamente a diagonal do paralelogramo formado pelos dois vetores, ou seja,

$$\overrightarrow{v} = (\vec{i}+\vec{j}) + (\vec{i}-\vec{k}) = 2\vec{i}+\vec{j}-\vec{k}$$

é o vetor diretor da reta r procurada, logo a reta r é dada pelas equações paramétricas abaixo:

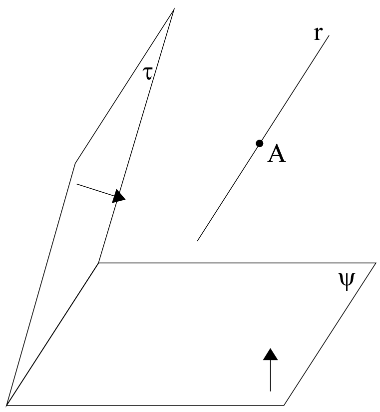
$$\boxed{r : \left\{ \begin{array}{lclcl} x & = & 2 & + & 2s \\ y & = & 1 & + & s \\ z & = & 1 & - & s \end{array} \right.}$$

ou, pelas equações simétricas:

$$\boxed{r : \frac{x-2}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-1}{-1}}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (3, -1, 2)$
- Planos $\tau : 2y + z - 1 = 0$ e $\psi : x - 2y + 3z = 4$



Como a reta r é paralela ao planos ψ e τ, o vetor diretor $\overrightarrow{u}$ é perpendicular aos vetores normais $\overrightarrow{n_\tau} = (0, 2, 1)$ e $\overrightarrow{n_\psi} = (1, -2, 3)$ dos planos τ e ψ, logo

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{n_\tau} \times \overrightarrow{n_\psi} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{u} = 8\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$$

Portanto pelo ponto A e com a direção do vetor $\overrightarrow{u}$ a reta r é dada pelas equações paramétricas abaixo:

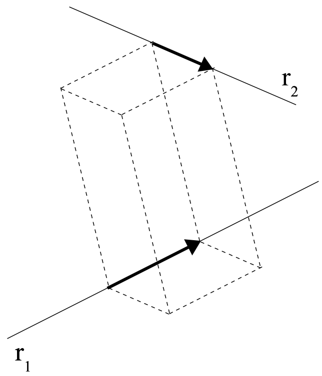
$$r : \left\{ \begin{array}{lclcl} x & = & 3 & + & 8t \\ y & = & -1 & + & t \\ z & = & 2 & - & 2t \end{array} \right.$$

logo, as equações simétricas são:

$$\boxed{r : \frac{x-3}{8} = \frac{y+1}{1} = \frac{z-2}{-2}}$$

5ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r_1 : \left\{ \begin{array}{lclcl} x & = & -2 & + & kt \\ y & = & 1 & + & 3t \\ z & = & 1 & - & 2t \end{array} \right.$
- Reta $r_2 : \left\{ \begin{array}{lclcl} x & = & 1 & + & ks \\ y & = & & - & 2s \\ z & = & & & 5s \end{array} \right.$



Observando os vetores diretores $\overrightarrow{v_1} = (k, 3, -2)$ e $\overrightarrow{v_2} = (k, -2, 5)$ e os pontos $A = (-2, 1, 1)$ e $B = (1, 0, 0)$ das retas r_1 e r_2 respectivamente, a única possibilidade para que essas retas sejam reversas é que o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AB} = (3, -1, -1)$ seja diferente de zero (são LI), logo

$$Volume = |[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}]| = \begin{vmatrix} k & 3 & -2 \\ k & -2 & 5 \\ 3 & -1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$Volume = 12k + 33 \neq 0$$

$$\boxed{k \neq -\frac{33}{12} = -\frac{11}{4}}$$

Fazendo a escolha para $k = 0$, por exemplo, temos:

- A distância entre as retas será obtida através de: $Volume = A_{base} \times h$, onde $A_{base} = ||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}||$ e $h = d(r_1, r_2)$.

Como

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 11\vec{i}$$

$$A_{base} = ||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}|| = 11$$

O volume será $Volume = 12k + 33 = 33$, portanto,

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \frac{33}{11} = 3}$$

• O ângulo formado pelas retas, será calculado, como sendo o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, ou seja,

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}}{||\overrightarrow{v_1}||||\overrightarrow{v_2}||}$$

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{-16}{\sqrt{13}\sqrt{29}}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \arccos\left(\frac{-16}{\sqrt{13}\sqrt{29}}\right)}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

2ª Prova	Cálculo Vetorial e Geometria Analítica	
Prof.:	Data: *09/Set/2003*	Turno: *Noite*
Curso:	Nome:	
Período: *03.1*	Turma(s):	Matrícula:

1ª Questão Escreva a equação do plano π que contém o eixo Ox e um vetor na direção da bissetriz do ângulo entre os vetores $\vec{i}$ e $\vec{k}$.

2ª Questão Encontre a equação normal do plano β que passa pelo ponto $A = (2, -1, -2)$ e é paralelo às retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases} \text{ e } r_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2s \\ z = s \end{cases}$$

3ª Questão Determine as equações simétricas da reta r que passa pelo ponto $A = (-1, 3, 2)$ e é perpendicular às retas r_1 e r_2 dadas na questão anterior.

4ª Questão Determine o valor de m para que a reta s determinada pelos pontos $A = (1, 1, -1)$ e $B = (m, -1, 2)$ seja paralela ao plano $\gamma : \begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = 1 + 2p + q \\ z = 3 - p + 3q \end{cases}$.

5ª Questão Determine a posição relativa entre as retas

$$r_1 : \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases} \text{ e } r_2 : \frac{x+1}{1} = \frac{-y-1}{2} = \frac{z}{-3}$$

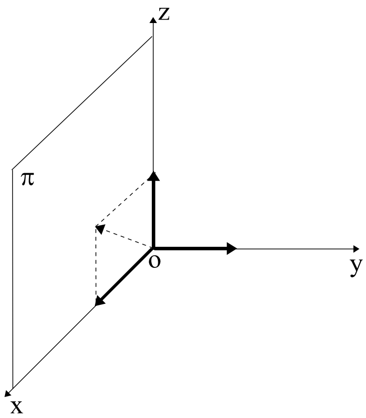
Calcule a distância e o ângulo entre as retas dadas.

Boa Sorte

R E S P O S T A S

1ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Eixo Ox
- Vetores $\vec{i}$ e $\vec{k}$



Para determinar a bissetriz entre os vetores $\vec{i}$ e $\vec{k}$, basta calcular a soma dos dois, pois como ambos são vetores unitários, a bissetriz será exatamente a diagonal do paralelogramo formado pelos dois vetores, ou seja, o vetor $\overrightarrow{u} = \vec{i} + \vec{k} = (1, 0, 1)$.

O vetor $\overrightarrow{v} = \vec{i} = (1, 0, 0)$ é paralelo ao eixo Ox, logo o plano π fica determinado pela origem $O = (0, 0, 0)$ e pelos vetores $\overrightarrow{u}$ e $\overrightarrow{v}$.

Para determinar a equação normal do plano π, vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ e $\overrightarrow{AP}$ são LD (volume =0), logo

$$Volume = |[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}]| = 0$$

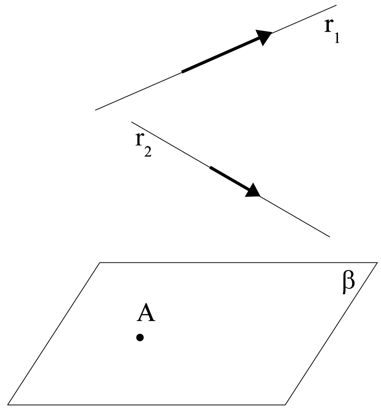
$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$[\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}] = -y = 0$$

$$\boxed{\pi : y = 0}$$

2ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (2, -1, -2)$
- Retas $r_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2s \\ z = s \end{cases}$



Considere $\overrightarrow{u} = (1, 3, -2)$ e $\overrightarrow{v} = (1, -2, 1)$ os vetores diretores das retas r_1 e r_2. Logo o plano β terá como vetor normal o vetor

$$\overrightarrow{n_\beta} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{n_\beta} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

Para determinar a equação do plano β vamos utilizar o fato que os vetores $\overrightarrow{AP}$ e $\overrightarrow{n_\beta}$ são perpendiculares, ou seja, $\overrightarrow{AP}.\overrightarrow{n_\beta} = 0$

$$(x - 2, y + 1, z + 2).(-1, -3, -5) = 0$$

Logo

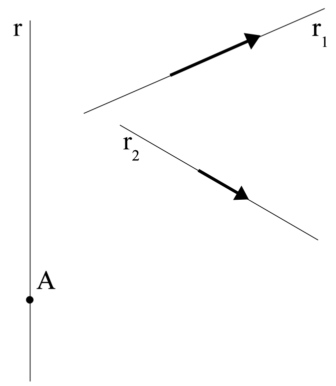
$$\boxed{\beta : -x - 3y - 5z - 11 = 0}$$

ou

$$\boxed{\beta : x + 3y + 5z + 11 = 0}$$

3ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Ponto $A = (-1, 3, 2)$
- Retas $r_1 : \begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + 3t \\ z = 1 - 2t \end{cases}$ e $r_2 : \begin{cases} x = 1 + s \\ y = -2s \\ z = s \end{cases}$



Considere $\overrightarrow{u} = (1,3,-2)$ e $\overrightarrow{v} = (1,-2,1)$ os vetores diretores das retas r_1 e r_2. Logo a reta r terá como vetor diretor o vetor

$$\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\overrightarrow{v_r} = -\vec{i} - 3\vec{j} - 5\vec{k}$$

Logo a reta r é dada pelas equações paramétricas abaixo:

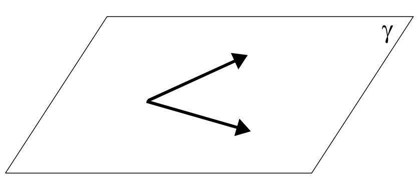
$$r: \begin{cases} x = -1 - s \\ y = 3 - 3s \\ z = 2 - 5s \end{cases}$$

e com equações simétricas:

$$\boxed{r: \frac{x+1}{-1} = \frac{y-3}{-3} = \frac{z-2}{-5}}$$

4ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Pontos $A = (1,1,-1)$ e $B = (m,-1,2)$
- Plano $\gamma: \begin{cases} x = 1 + p + q \\ y = 1 + 2p + q \\ z = 3 - p + 3q \end{cases}$



Seja $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AB} = (m-1,-2,3)$ um vetor diretor da reta s, que para ser paralela ao plano γ deve ser uma combinação linear dos vetores $\overrightarrow{v_1} = (1,2,-1)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,1,3)$ paralelos ao plano, ou seja, $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_1}$ são LD (volume =0), logo

$$Volume = |[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}]| = 0$$

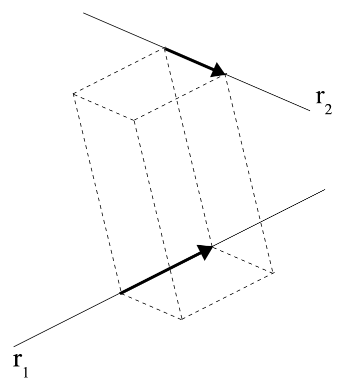
$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}] = \begin{vmatrix} m-1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$[\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}] = 7m - 2 = 0$$

$$\boxed{m = \frac{2}{7}}$$

5ª Questão [2,0] Dados da questão:

- Reta $r_1: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2 - 3t \end{cases}$
- Reta $r_2: \dfrac{x+1}{1} = \dfrac{-y-1}{2} = \dfrac{z}{-3}$



Como os vetores diretores $\overrightarrow{v_1} = (1,-1,-3)$ e $\overrightarrow{v_2} = (1,-2,-3)$ das retas r_1 e r_2, respectivamente, são claramente LI, temos duas possibilidades para a posição relativa entre as retas, ou seja, reversas ou concorrentes.

Para diferenciar retas reversas das concorrentes, basta calcular o volume do paralelepípedo gerado pelos vetores $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ e $\overrightarrow{AB} = (0,-3,-2)$ onde $A = (-1,2,2)$ e $B = (-1,1,0)$ são pontos das retas r_1 e r_2, se o volume for positivo, as retas são reversas, se igual a zero, são concorrentes.

$$Volume = |[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}]|$$

$$[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{AB}] = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 0 & -3 & -2 \end{vmatrix} = 2$$

Logo as retas são $\boxed{\text{reversas}}$.

• A distância entre as retas será obtida através de: $Volume = A_{base} \times h$, onde $A_{base} = ||\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2}||$ e $h = d(r_1, r_2)$.

Como

$$\overrightarrow{v_1} \times \overrightarrow{v_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = -3\vec{i} - \vec{k}$$

$$A_{base} = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$$

logo,

$$\boxed{d(r_1, r_2) = \frac{2}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{5}}$$

• O ângulo formado pelas retas, será calculado, como sendo o ângulo entre os vetores $\overrightarrow{v_1}$ e $\overrightarrow{v_2}$, ou seja,

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{\overrightarrow{v_1}.\overrightarrow{v_2}}{||\overrightarrow{v_1}||||\overrightarrow{v_2}||}$$

$$\cos(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{14}}$$

$$\boxed{(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}) = \arccos\left(\frac{12}{\sqrt{11}\sqrt{14}}\right)}$$

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

3ª Prova	Cálculo Vetorial e Geometria Analítica	
Prof.: *Sérgio*	Data: *07/Out/2003*	Turno: *Manhã*
Curso:	Nome:	
Período: *03.1*	Turma(s):	Matrícula:

1ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$S_1 : \frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + \frac{(y+5-\mathcal{K})^{\left[\frac{3-(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1-(-1)^{\mathcal{K}}]}} + [(-1)^{\mathcal{K}}]\frac{z^{\left[\frac{3+(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1+(-1)^{\mathcal{K}}]}} = 1$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

2ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$S_2 : [(-1)^{\mathcal{K}}]9x^2 - [(-1)^{\mathcal{K}}]9y^2 + 16z^2 - 32\mathcal{K}z = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

Boa Sorte

Observações:

a) Substitua a constante $\mathcal{K}$, em todas as questões, pelo último número da sua matrícula;

b) Preencher as duas tabelas anteriores, conforme indicado.

R E S P O S T A S

Como a resolução depende do valor de $\mathcal{K}$, a resposta será dada em dois casos.

Caso: $\mathcal{K}$ é par

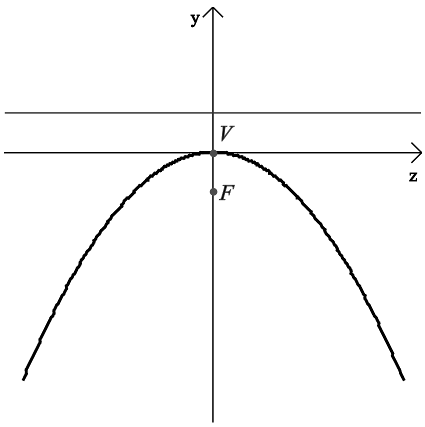
1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : \frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + (y+5-\mathcal{K}) + \frac{z^2}{64} = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : x = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$(y+5-\mathcal{K}) + \frac{z^2}{64} = 1$$

$$(z-0)^2 = -64(y+5-\mathcal{K}-1)$$

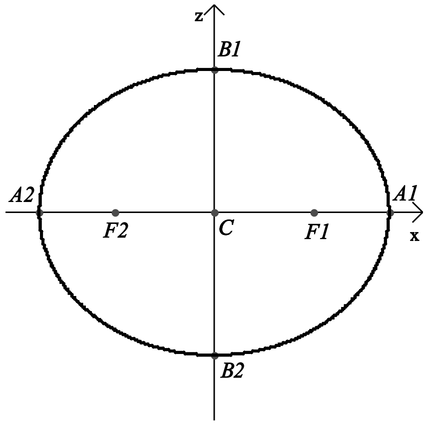


Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, \mathcal{K}-4, 0)$
- $c = 16$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, \mathcal{K}-20, 0)$
- Reta diretriz: $y = \mathcal{K}+12$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : y = \mathcal{K}-5}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + \frac{z^2}{64} = 1$$



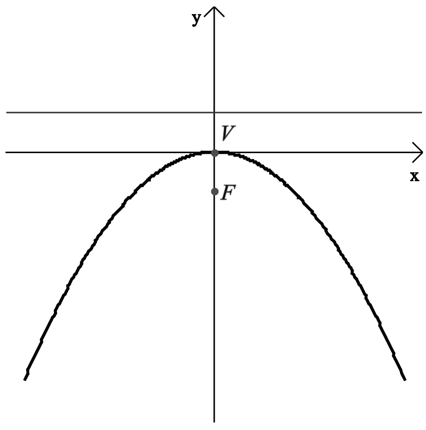
Donde:

- Centro: $C = (-\mathcal{K}, \mathcal{K}-5, 0)$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100-64} = 6$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (-\mathcal{K}-10, \mathcal{K}-4, 0)$ e $A_2 = (-\mathcal{K}+10, \mathcal{K}-5, 0)$
- Focos: $F_1 = (-\mathcal{K}-6, \mathcal{K}-4, 0)$ e $F_2 = (-\mathcal{K}+6, \mathcal{K}-5, 0)$
- Eixo menor: $B_1 = (-\mathcal{K}, \mathcal{K}-5, -8)$ e $B_2 = (-\mathcal{K}, \mathcal{K}-5, 8)$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : z = 0}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + (y+5-\mathcal{K}) = 1$$

$$(x+\mathcal{K})^2 = -100(y+5-\mathcal{K}-1)$$

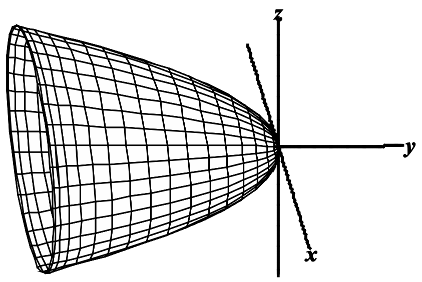


Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, \mathcal{K}-4, 0)$

- $c = 16$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 20, 0)$
- Reta diretriz: $y = \mathcal{K} + 12$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$S_2 : 9x^2 - 9y^2 + 16z^2 - 32\mathcal{K}z = 144 - 16\mathcal{K}^2$

Completando quadrados na equação acima temos:

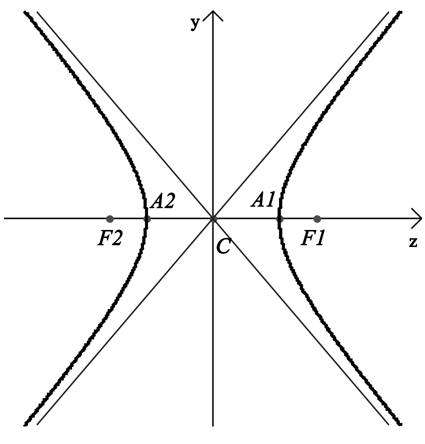
$9x^2 - 9y^2 + 16[(z - 2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] = 144 - 16\mathcal{K}^2$

$9x^2 - 9y^2 + 16(z - 2\mathcal{K})^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$

$$S_2 : \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.
Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : x = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$-\frac{y^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

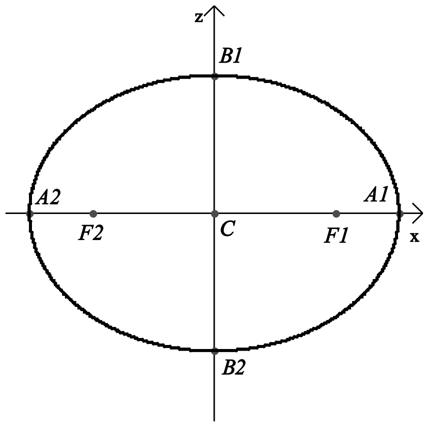


Donde:

- Centro: $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{9 + 16} = 5$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 3)$ e $A_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 3)$
- Focos: $F_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 5)$ e $F_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 5)$
- Assíntotas: $y = \pm\frac{4}{3}z$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : y = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

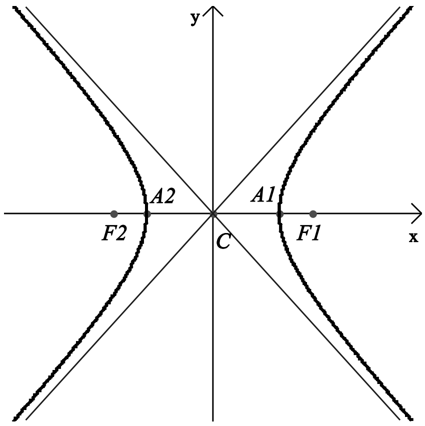


Donde:

- Centro: $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (4, 0, 2\mathcal{K})$ e $A_2 = (-4, 0, 2\mathcal{K})$
- Focos: $F_1 = (\sqrt{7}, 0, 2\mathcal{K})$ e $F_2 = (-\sqrt{7}, 0, 2\mathcal{K})$
- Eixo menor: $B_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 3)$ e $B_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 3)$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : z = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

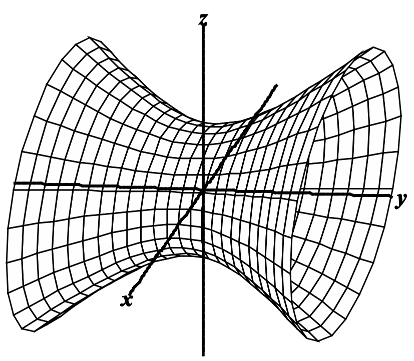
$$\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (4, 0, 2\mathcal{K})$ e $A_2 = (-4, 0, 2\mathcal{K})$
- Focos: $F_1 = (4\sqrt{2}, 0, 2\mathcal{K})$ e $F_2 = (-4\sqrt{2}, 0, 2\mathcal{K})$
- Assíntotas: $y = \pm x$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha

Caso: $\mathcal{K}$ é ímpar

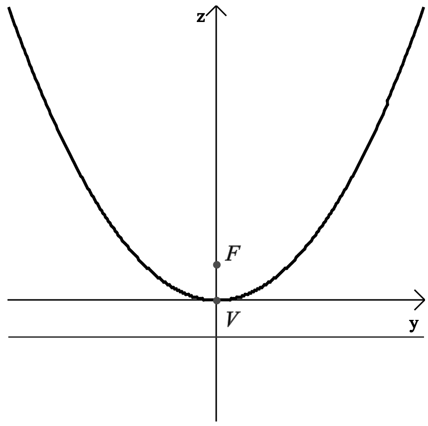
1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : \frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} + \frac{(y + 5 - \mathcal{K})^2}{64} - z = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : x = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{(y + 5 - \mathcal{K})^2}{64} - z = 1$$

$$(y + 5 - \mathcal{K})^2 = 64(z + 1)$$



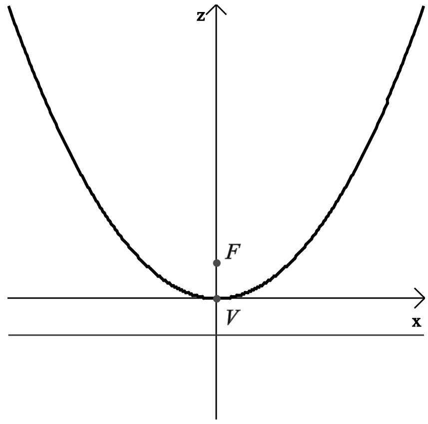
Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, -1)$
- $c = 16$
- Eixo focal: z
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, 15)$
- Reta diretriz: $z = -17$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : y = \mathcal{K} - 5}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} - z = 1$$

$$(x + \mathcal{K})^2 = 100(z + 1)$$



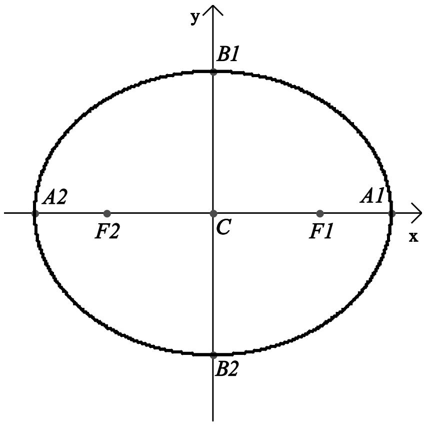
Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, -1)$

- $c = 25$
- Eixo focal: z
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, 24)$
- Reta diretriz: $z = -26$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : z = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

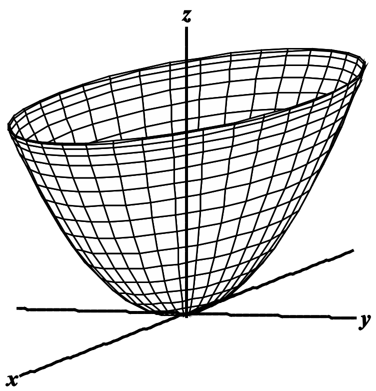
$$\frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + \frac{(y+5-\mathcal{K})^2}{64} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 5, 0)$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100 - 64} = 6$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (-\mathcal{K} - 10, \mathcal{K} - 5, 0)$ e $A_2 = (-\mathcal{K} + 10, \mathcal{K} - 5, 0)$
- Focos: $F_1 = (-\mathcal{K} - 6, \mathcal{K} - 5, 0)$ e $F_2 = (-\mathcal{K} + 6, \mathcal{K} - 5, 0)$
- Eixo menor: $B_1 = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} + 3, 0)$ e $B_2 = (-\mathcal{K}, \mathcal{K} - 13, 0)$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_2 : -9x^2 + 9y^2 + 16z^2 - 32\mathcal{K}z = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Completando quadrados na equação acima temos:

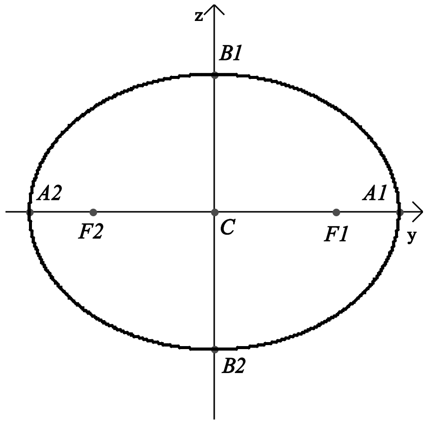
$$-9x^2 + 9y^2 + 16[(z-2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

$$-9x^2 + 9y^2 + 16(z-2\mathcal{K})^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$$

$$S_2 : -\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} + \frac{(z-2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.
Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : x = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{y^2}{16} + \frac{(z-2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

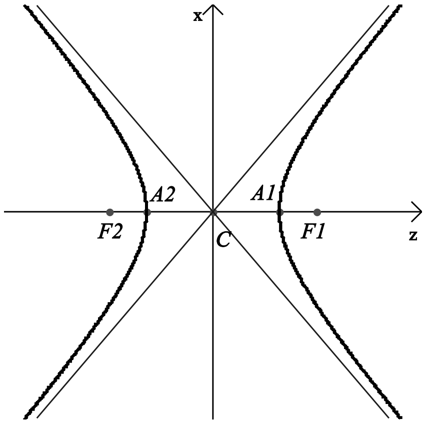


Donde:

- Centro: $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (0, 4, 2\mathcal{K})$ e $A_2 = (0, -4, 2\mathcal{K})$
- Focos: $F_1 = (0, \sqrt{7}, 2\mathcal{K})$ e $F_2 = (0, -\sqrt{7}, 2\mathcal{K})$
- Eixo menor: $B_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 3)$ e $B_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 3)$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : y = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{(z - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$

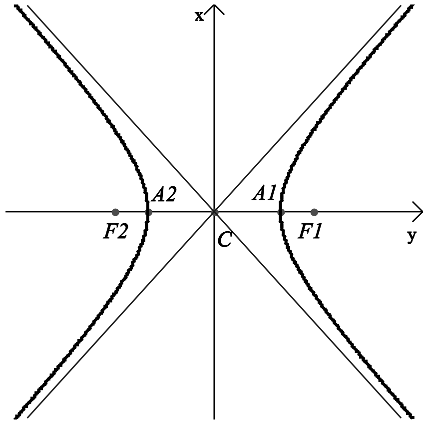


Donde:

- Centro: $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 9} = 5$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 3)$ e $A_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 3)$
- Focos: $F_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 5)$ e $F_2 = (0, 0, 2\mathcal{K} + 5)$
- Assíntotas: $y = \pm\frac{4}{3}z$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : z = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

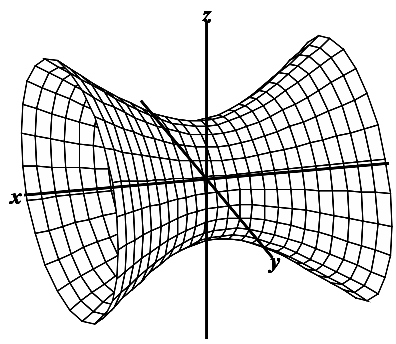
$$-\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{16} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (0, 0, 2\mathcal{K})$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (0, 4, 2\mathcal{K})$ e $A_2 = (0, -4, 2\mathcal{K})$
- Focos: $F_1 = (0, 4\sqrt{2}, 2\mathcal{K})$ e $F_2 = (0, -4\sqrt{2}, 2\mathcal{K})$
- Assíntotas: $x = \pm y$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

3ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: *Sérgio* Data: *07/Out/2003* Turno: *Tarde*
Curso: Nome:

Período: *03.1* Turma(s): Matrícula:

1ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$s_1 : [(-1)^{\mathcal{K}}]\frac{x^{\left[\frac{3+(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1+(-1)^{\mathcal{K}}]}} + \frac{(y+5-\mathcal{K})^{\left[\frac{3-(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1-(-1)^{\mathcal{K}}]}} + \frac{(z+\mathcal{K})^2}{100} = 1$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

2ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$S_2 : 16x^2 - 32\mathcal{K}x - [(-1)^{\mathcal{K}}]9y^2 + [(-1)^{\mathcal{K}}]9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

Boa Sorte

Observações:

a) Substitua a constante $\mathcal{K}$, em todas as questões, pelo último número da sua matrícula;

b) Preencher as duas tabelas anteriores, conforme indicado.

R E S P O S T A S

Como a resolução depende do valor de $\mathcal{K}$, a resposta será dada em dois casos.

Caso: $\mathcal{K}$ é par

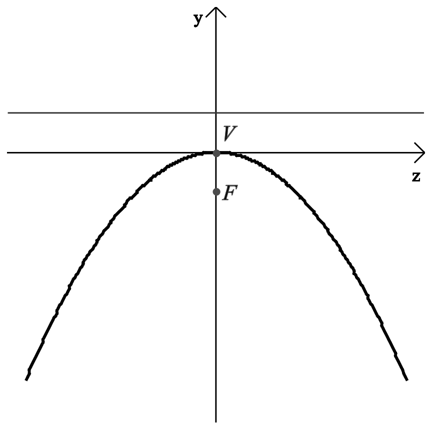
1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : \frac{x^2}{64} + (y + 5 - \mathcal{K}) + \frac{(z + \mathcal{K})^2}{100} = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : x = 0}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$(y + 5 - \mathcal{K}) + \frac{(z + \mathcal{K})^2}{100} = 1$$

$$(z + \mathcal{K})^2 = -100(y + 5 - \mathcal{K} - 1)$$

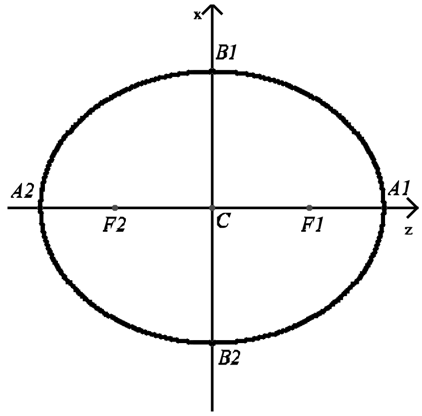


Donde:

- Vértice: $V = (0, \mathcal{K} - 4, -\mathcal{K})$
- $c = 16$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (0, \mathcal{K} - 20, \mathcal{K})$
- Reta diretriz: $y = \mathcal{K} + 12$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : y = \mathcal{K} - 5}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{x^2}{64} + \frac{(z + \mathcal{K})^2}{100} = 1$$



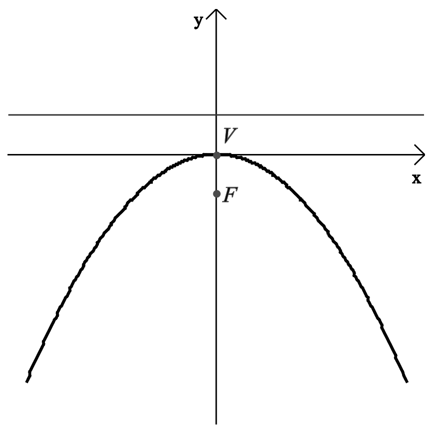
Donde:

- Centro: $C = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100 - 64} = 6$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, \mathcal{K} - 4, -\mathcal{K} - 10)$ e $A_2 = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K} + 10)$
- Focos: $F_1 = (0, \mathcal{K} - 4, -\mathcal{K} - 6)$ e $F_2 = (0, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K} + 6)$
- Eixo menor: $B_1 = (-8, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$ e $B_2 = (8, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : z = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$(y + 5 - \mathcal{K}) + \frac{x^2}{64} = 1$$

$$(x - 0)^2 = -64(y + 5 - \mathcal{K} - 1)$$

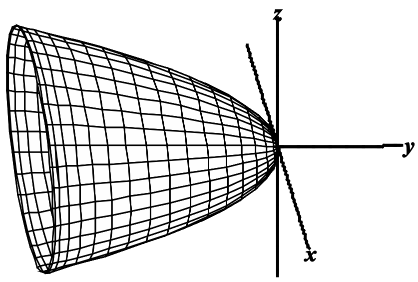


Donde:

- Vértice: $V = (0, \mathcal{K} - 4, -\mathcal{K})$

- $c = 16$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (0, \mathcal{K} - 20, -\mathcal{K})$
- Reta diretriz: $y = \mathcal{K} + 12$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$S_2 : 16x^2 - 32\mathcal{K}x - 9y^2 + 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$

Completando quadrados na equação acima temos:

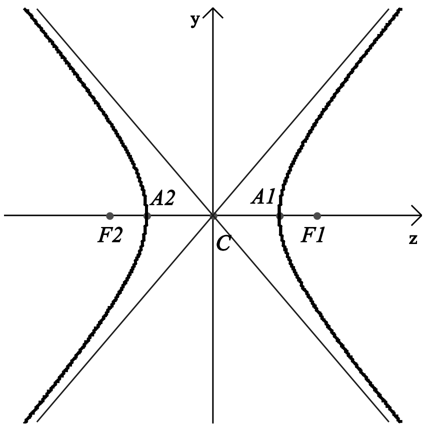
$16[(x - 2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] - 9y^2 + 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$

$16(x - 2\mathcal{K})^2 - 9y^2 + 9z^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$

$$S_2 : \frac{(x - 2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.
Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : x = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{z^2}{16} - \frac{y^2}{16} = 1$$

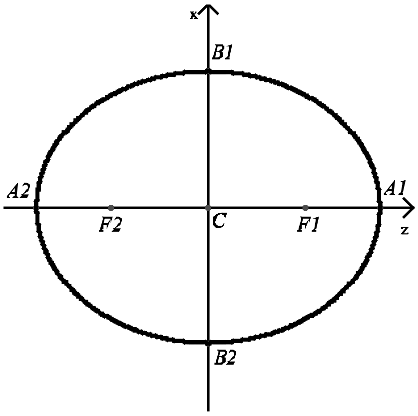


Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}, 0, 4)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}, 0, -4)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}, 0, 4\sqrt{2})$ e $F_2 = (2\mathcal{K}, 0, -4\sqrt{2})$
- Assíntotas: $y = \pm z$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : y = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(x - 2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

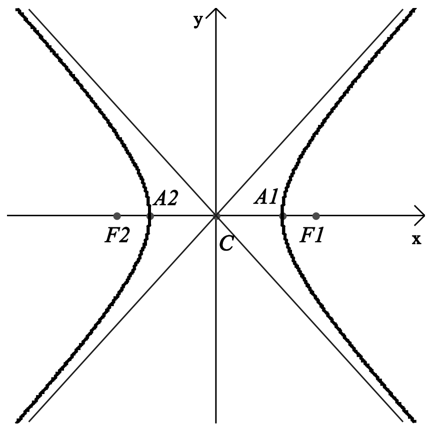


Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}, 0, 4)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}, 0, -4)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}, 0, \sqrt{7})$ e $F_2 = (2\mathcal{K}, 0, -\sqrt{7})$
- Eixo menor: $B_1 = (2\mathcal{K} + 3, 0, 0)$ e $B_2 = (2\mathcal{K} - 3, 0, 0)$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : z = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

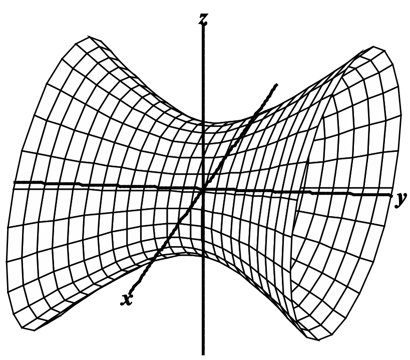
$$\frac{(x-2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{9+16} = 5$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}-3, 0, 0)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}+3, 0, 0)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}-5, 0, 0)$ e $F_2 = (2\mathcal{K}+5, 0, 0)$
- Assíntotas: $y = \pm\frac{4}{3}x$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha

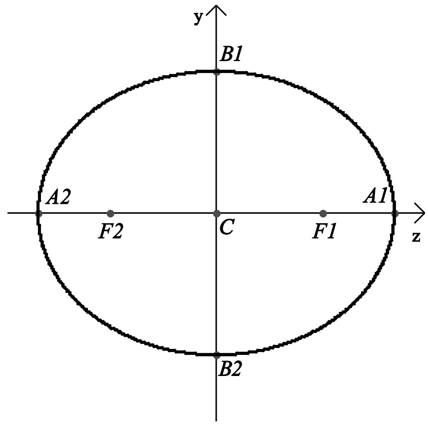
Caso: $\mathcal{K}$ é ímpar

1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : -x + \frac{(y+5-\mathcal{K})^2}{64} + \frac{(z+\mathcal{K})^2}{100} = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : x = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(y+5-\mathcal{K})^2}{64} + \frac{(z+\mathcal{K})^2}{100} = 1$$



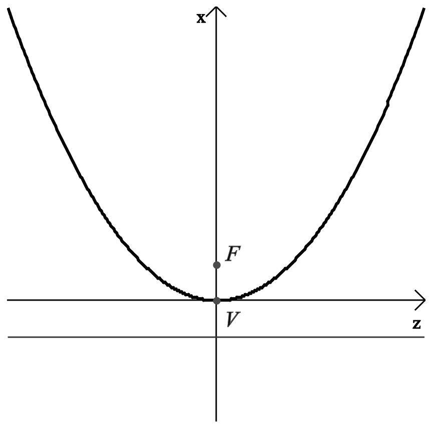
Donde:

- Centro: $C = (0, \mathcal{K}-5, -\mathcal{K})$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100-64} = 6$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, \mathcal{K}-5, -\mathcal{K}-10)$ e $A_2 = (0, \mathcal{K}-5, -\mathcal{K}+10)$
- Focos: $F_1 = (0, \mathcal{K}-5, -\mathcal{K}-6)$ e $F_2 = (0, \mathcal{K}-5, -\mathcal{K}+6)$
- Eixo menor: $B_1 = (0, \mathcal{K}+3, -\mathcal{K})$ e $B_2 = (0, \mathcal{K}-13, -\mathcal{K})$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : y = \mathcal{K}-5}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$-x + \frac{(z+\mathcal{K})^2}{100} = 1$$

$$(z+\mathcal{K})^2 = 100(x+1)$$



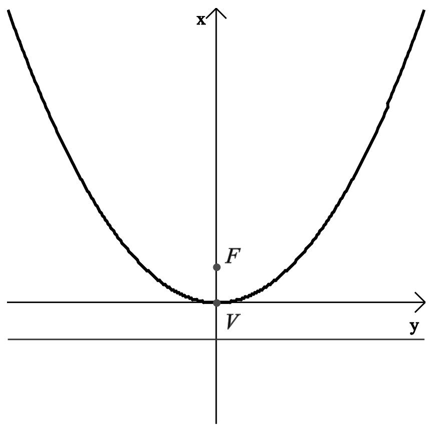
Donde:

- Vértice: $V = (-1, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- $c = 25$
- Eixo focal: x
- Foco: $F = (24, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- Reta diretriz: $x = -26$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : z = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$-x + \frac{(y + 5 - \mathcal{K})^2}{64} = 1$$

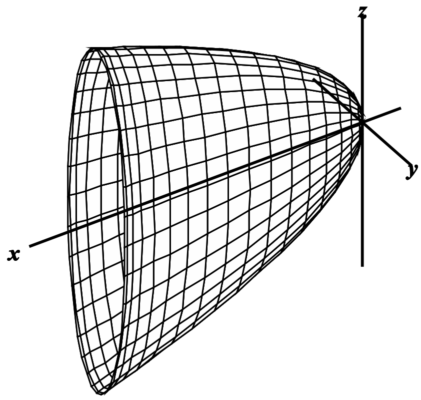
$$(y + 5 - \mathcal{K})^2 = 64(x + 1)$$



Donde:

- Vértice: $V = (-1, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- $c = 16$
- Eixo focal: x
- Foco: $F = (15, \mathcal{K} - 5, -\mathcal{K})$
- Reta diretriz: $x = -17$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_2 : 16x^2 - 32\mathcal{K}x + 9y^2 - 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Completando quadrados na equação acima temos:

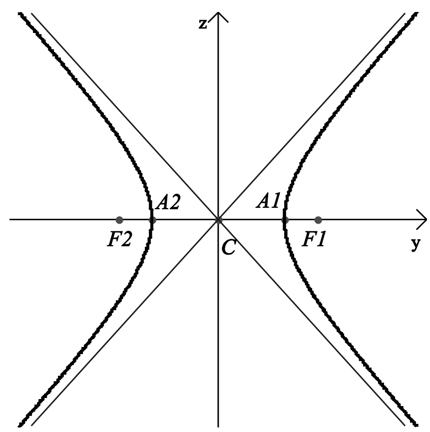
$$16[(x - 2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] + 9y^2 - 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

$$16(x - 2\mathcal{K})^2 + 9y^2 - 9z^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$$

$$S_2 : \frac{(x - 2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.
Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : x = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{y^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$$



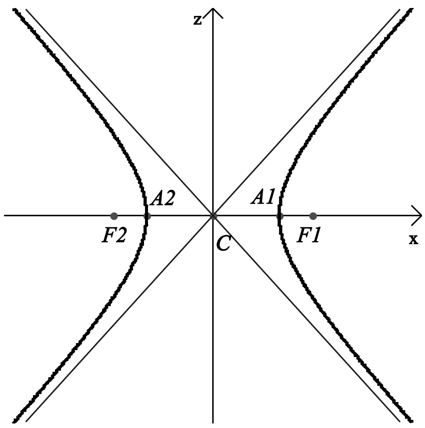
Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$

- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}, 4, 0)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}, -4, 0)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}, 4\sqrt{2}, 0)$ e $F_2 = (2\mathcal{K}, -4\sqrt{2}, 0)$
- Assíntotas: $z = \pm y$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : y = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{(x-2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

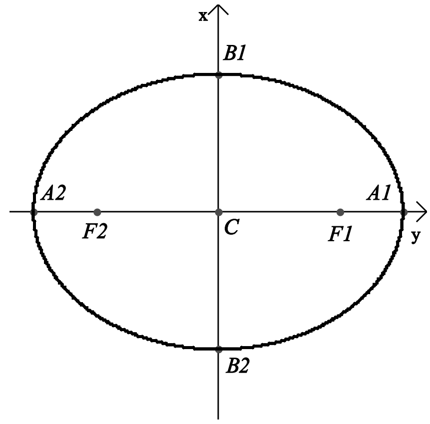


Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16+9} = 5$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}+3, 0, 0)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}-3, 0, 0)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}-5, 0, 0)$ e $F_2 = (2\mathcal{K}+5, 0, 0)$
- Assíntotas: $y = \pm\dfrac{4}{3}x$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : z = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

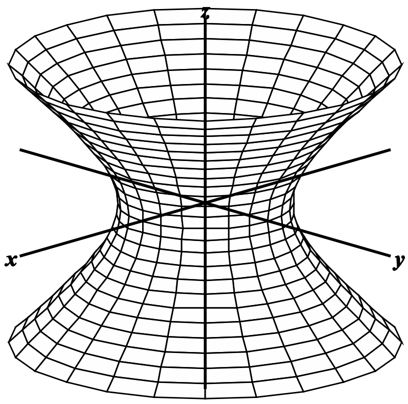
$$\frac{(x-2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (2\mathcal{K}, 0, 0)$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16-9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (2\mathcal{K}, 4, 0)$ e $A_2 = (2\mathcal{K}, -4, 0)$
- Focos: $F_1 = (2\mathcal{K}, \sqrt{7}, 0)$ e $F_2 = (2\mathcal{K}, -\sqrt{7}, 0)$
- Eixo menor: $B_1 = (2\mathcal{K}+3, 0, 0)$ e $B_2 = (2\mathcal{K}-3, 0, 0)$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

3ª Prova — Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: *Sérgio* Data: *07/Out/2003* Turno: *Noite*

Curso: Nome:

Período: *03.1* Turma(s): ☐☐ Matrícula: ☐☐☐☐☐☐☐◯

1ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$s_1 : \frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + [(-1)^{\mathcal{K}}]\frac{y^{\left[\frac{3+(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1+(-1)^{\mathcal{K}}]}} + \frac{(z+5-\mathcal{K})^{\left[\frac{3-(-1)^{\mathcal{K}}}{2}\right]}}{8^{[1-(-1)^{\mathcal{K}}]}} = 1$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

2ª Questão Considere a superfície dada pela equação

$$S_2 : [(-1)^{\mathcal{K}}]9x^2 + 16y^2 - 32\mathcal{K}y - [(-1)^{\mathcal{K}}]9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Classifique-a, esboce-a e preencha a tabela abaixo, de acordo com as interseções com os planos paralelos aos planos coordenados.

$\mathcal{K} =$	Plano $\alpha : x =$	Plano $\beta : y =$	Plano $\gamma : z =$
Cônica:			
Equação:			
Eixo Focal:			
Centro	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$	$C = (\quad , \quad , \quad)$
Raio	$r =$	$r =$	$r =$
a	$a =$	$a =$	$a =$
b	$b =$	$b =$	$b =$
c	$c =$	$c =$	$c =$
Foco(s)	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$F_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $F_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértice(s)	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$A_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $A_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Vértices	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$	$B_1 = (\quad , \quad , \quad)$ $B_2 = (\quad , \quad , \quad)$
Assíntotas			
Diretriz			

Boa Sorte

Observações:

a) Substitua a constante $\mathcal{K}$, em todas as questões, pelo último número da sua matrícula;

b) Preencher as duas tabelas anteriores, conforme indicado.

R E S P O S T A S

Como a resolução depende do valor de $\mathcal{K}$, a resposta será dada em dois casos.

Caso: $\mathcal{K}$ é par

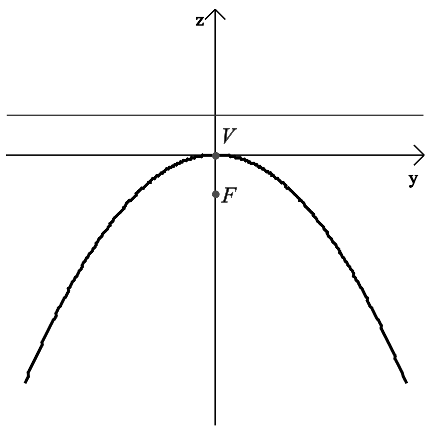
1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : \frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + \frac{y^2}{64} + (z+5-\mathcal{K}) = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : x = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{y^2}{64} + (z+5-\mathcal{K}) = 1$$

$$(y-0)^2 = -64(z+5-\mathcal{K}-1)$$



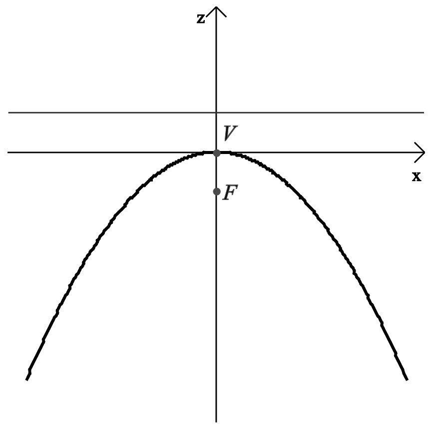
Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-4)$
- $c = 16$
- Eixo focal: z
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-20)$
- Reta diretriz: $z = \mathcal{K}+12$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : y = 0}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + (z+5-\mathcal{K}) = 1$$

$$(x+\mathcal{K})^2 = -100(z+5-\mathcal{K}-1)$$

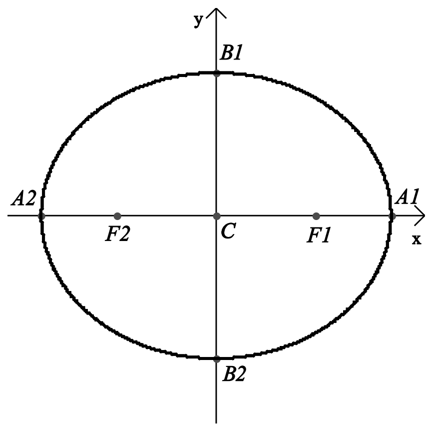


Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-4)$
- $c = 16$
- Eixo focal: z
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-20)$
- Reta diretriz: $z = \mathcal{K}+12$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : z = \mathcal{K}-5}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(x+\mathcal{K})^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$$

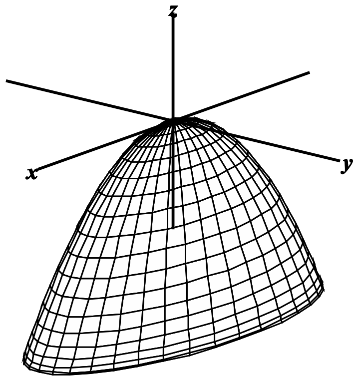


Donde:

- Centro: $C = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K}-5)$
- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100-64} = 6$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (-\mathcal{K}-10, 0, \mathcal{K}-4)$ e $A_2 = (-\mathcal{K}+10, 0, \mathcal{K}-5)$

- Focos: $F_1 = (-\mathcal{K} - 6, 0, \mathcal{K} - 4)$ e $F_2 = (-\mathcal{K} + 6, 0, \mathcal{K} - 5)$
- Eixo menor: $B_1 = (-\mathcal{K}, -8, \mathcal{K} - 5)$ e $B_2 = (-\mathcal{K}, 8, \mathcal{K} - 5)$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$S_2 : 9x^2 + 16y^2 - 32\mathcal{K}y - 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$

Completando quadrados na equação acima temos:

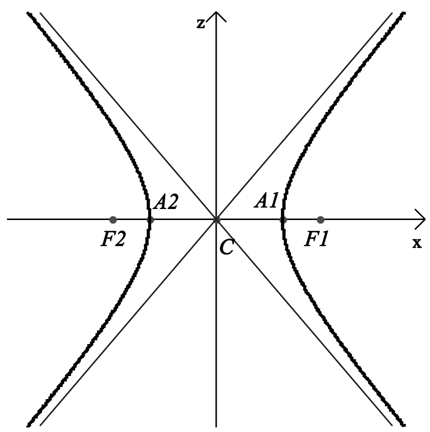
$9x^2 + 16[(y - 2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] - 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$

$9x^2 + 16(y - 2\mathcal{K})^2 - 9z^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$

$$S_2 : \frac{x^2}{16} + \frac{(y - 2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.
Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : x = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{(y - 2\mathcal{K})^2}{9} - \frac{z^2}{16} = 1$$

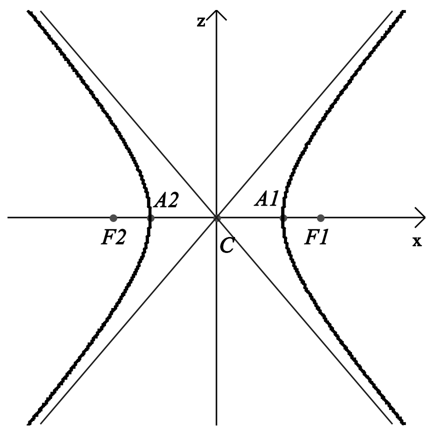


Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{9 + 16} = 5$
- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (0, 2\mathcal{K} - 3, 0)$ e $A_2 = (0, 2\mathcal{K} + 3, 0)$
- Focos: $F_1 = (0, 0, 2\mathcal{K} - 5)$ e $F_2 = (0, 2\mathcal{K} + 5, 0)$
- Assíntotas: $z = \pm\frac{4}{3}y$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : y = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$\frac{x^2}{16} - \frac{z^2}{16} = 1$$

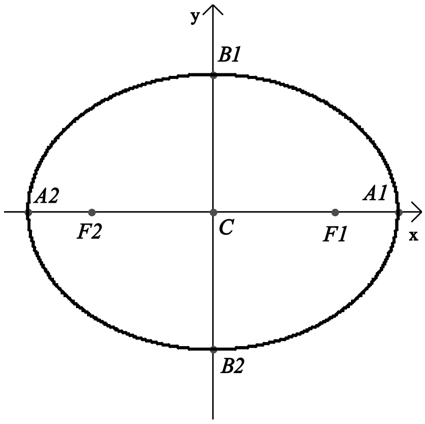


Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (4, 2\mathcal{K}, 0)$ e $A_2 = (-4, 2\mathcal{K}, 0)$
- Focos: $F_1 = (4\sqrt{2}, 2\mathcal{K}, 0)$ e $F_2 = (-4\sqrt{2}, 2\mathcal{K}, 0)$
- Assíntotas: $z = \pm x$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : z = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

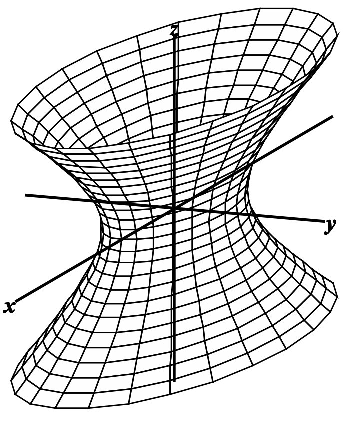
$$\frac{x^2}{16} + \frac{(y - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (4, 2\mathcal{K}, 0)$ e $A_2 = (-4, 2\mathcal{K}, 0)$
- Focos: $F_1 = (\sqrt{7}, 2\mathcal{K}, 0)$ e $F_2 = (-\sqrt{7}, 2\mathcal{K}, 0)$
- Eixo menor: $B_1 = (0, 2\mathcal{K} + 3, 0)$ e $B_2 = (0, 2\mathcal{K} - 3, 0)$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha

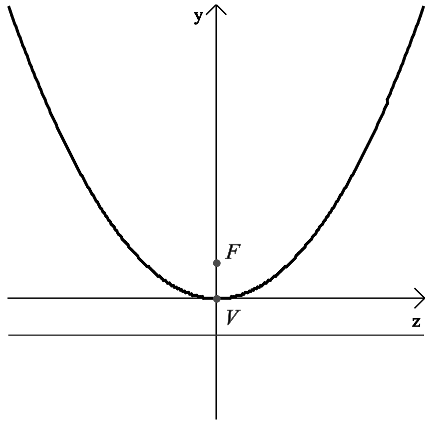
Caso: $\mathcal{K}$ é ímpar

1ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_1 : \frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} - y + \frac{(z + 5 - \mathcal{K})^2}{64} = 1$$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\alpha : x = -\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$-y + \frac{(z + 5 - \mathcal{K})^2}{64} = 1$$
$$(z + 5 - \mathcal{K})^2 = 64(y + 1)$$

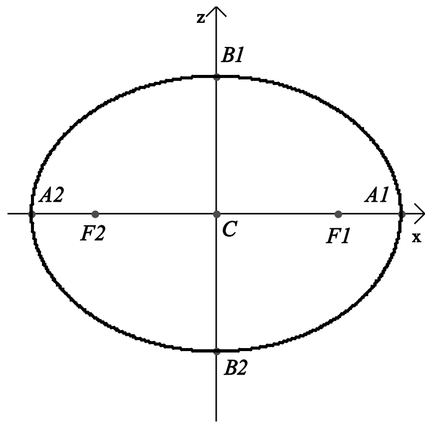


Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, -1, \mathcal{K} - 5)$
- $c = 16$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, 15, \mathcal{K} - 5)$
- Reta diretriz: $y = -17$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\gamma : y = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} + \frac{(z + 5 - \mathcal{K})^2}{64} = 1$$



Donde:

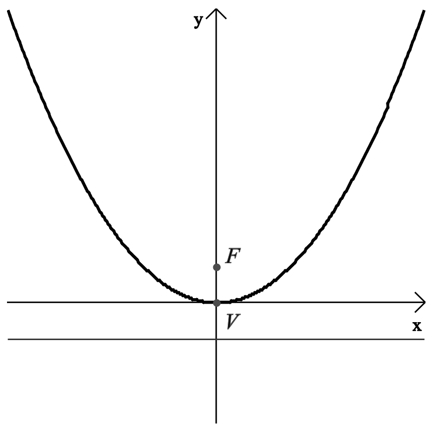
- Centro: $C = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K} - 5)$

- $a = 10$
- $b = 8$
- $c = \sqrt{100 - 64} = 6$
- Eixo focal: x
- Vértices: $A_1 = (-\mathcal{K} - 10, 0, \mathcal{K} - 5)$ e $A_2 = (-\mathcal{K} + 10, 0, \mathcal{K} - 5)$
- Focos: $F_1 = (-\mathcal{K} - 6, 0, \mathcal{K} - 5)$ e $F_2 = (-\mathcal{K} + 6, 0, \mathcal{K} - 5)$
- Eixo menor: $B_1 = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K} + 3)$ e $B_2 = (-\mathcal{K}, 0, \mathcal{K} - 13)$

Na interseção da superfície S_1 com o plano $\boxed{\beta : z = \mathcal{K} - 5}$, temos a seguinte equação da **parábola**:

$$\frac{(x + \mathcal{K})^2}{100} - y = 1$$

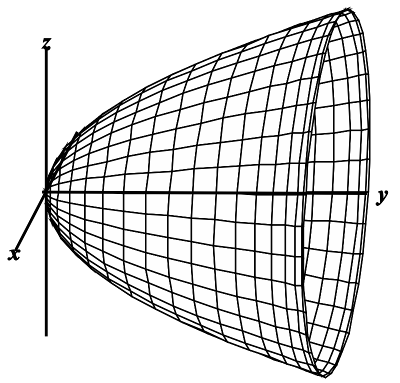
$$(x + \mathcal{K})^2 = 100(y + 1)$$



Donde:

- Vértice: $V = (-\mathcal{K}, -1, \mathcal{K} - 5)$
- $c = 25$
- Eixo focal: y
- Foco: $F = (-\mathcal{K}, 24, \mathcal{K} - 5)$
- Reta diretriz: $y = -26$

Portanto a superfície S_1 é uma



Parabolóide Elíptica

2ª Questão [5,0] Dados da questão:

$$S_2 : -9x^2 + 16y^2 - 32\mathcal{K}y + 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

Completando quadrados na equação acima temos:

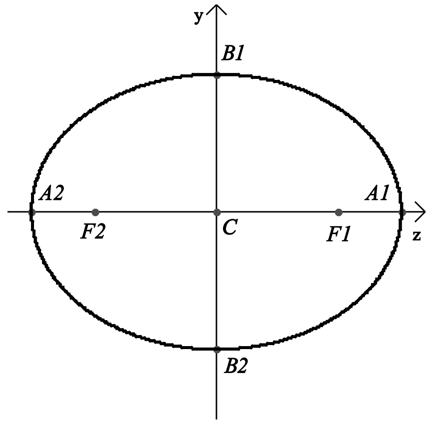
$$-9x^2 + 16[(y - 2\mathcal{K})^2 - \mathcal{K}^2] + 9z^2 = 144 - 16\mathcal{K}^2$$

$$-9x^2 + 16(y - 2\mathcal{K})^2 + 9z^2 = 144 \quad \div (9 \times 16)$$

$$S_2 : -\frac{x^2}{16} + \frac{(y - 2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

Estando a equação da superfície mais "agradável", começaremos a classificá-la.
Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\alpha : x = 0}$, temos a seguinte equação da **elípse**:

$$\frac{(y - 2\mathcal{K})^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$$

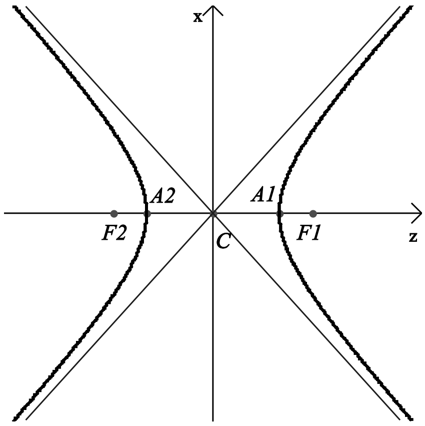


Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 4$
- $b = 3$
- $c = \sqrt{16 - 9} = \sqrt{7}$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, 2\mathcal{K}, 4)$ e $A_2 = (0, -4, 2\mathcal{K})$
- Focos: $F_1 = (0, 2\mathcal{K}, \sqrt{7})$ e $F_2 = (0, 2\mathcal{K}, -\sqrt{7})$
- Eixo menor: $B_1 = (0, 2\mathcal{K} + 3, 0)$ e $B_2 = (0, 2\mathcal{K} - 3, 0)$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\gamma : y = 2\mathcal{K}}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

$$-\frac{x^2}{16} + \frac{z^2}{16} = 1$$

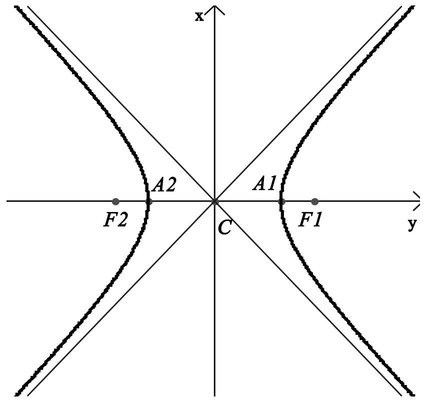


Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 4$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 16} = 4\sqrt{2}$
- Eixo focal: z
- Vértices: $A_1 = (0, 2\mathcal{K}, 4)$ e $A_2 = (0, 2\mathcal{K}, -4)$
- Focos: $F_1 = (0, 2\mathcal{K}, 4\sqrt{2})$ e $F_2 = (0, 2\mathcal{K}, -4\sqrt{2})$
- Assíntotas: $x = \pm z$

Na interseção da superfície S_2 com o plano $\boxed{\beta : z = 0}$, temos a seguinte equação da **hipérbole**:

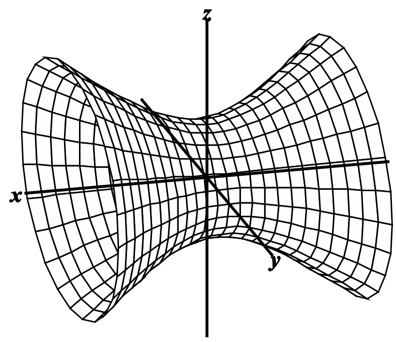
$$-\frac{x^2}{16} + \frac{(y - 2\mathcal{K})^2}{9} = 1$$



Donde:

- Centro: $C = (0, 2\mathcal{K}, 0)$
- $a = 3$
- $b = 4$
- $c = \sqrt{16 + 9} = 5$
- Eixo focal: y
- Vértices: $A_1 = (0, 2\mathcal{K} + 3, 0)$ e $A_2 = (0, 2\mathcal{K} - 3, 0)$
- Focos: $F_1 = (0, 2\mathcal{K} - 5, 0)$ e $F_2 = (0, 2\mathcal{K} + 5, 0)$
- Assíntotas: $z = \pm\frac{4}{3}y$

Portanto a superfície S_2 é uma



Hiperbolóide Elíptica de uma folha

UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

http://www.mat.ufpb.br/sergio

Final

Cálculo Vetorial e Geometria Analítica

Prof.: Data: *21/Out/2003* Turno: *M+T+N*

Curso: Nome:

Período: *03.1* Turma(s): Matrícula:

1ª Questão Seja ABC um triângulo equilátero. Se E, F e G são os pontos médios dos lados AB, AC e BC, respectivamente. Mostre que EFG é também um triângulo equilátero.

2ª Questão Sejam $\overrightarrow{a}$ e $\overrightarrow{b}$ vetores tais que $\overrightarrow{a}.\overrightarrow{b} = 12$, $||\overrightarrow{b}|| = 3\sqrt{2}$ e $(\overrightarrow{a}, \overrightarrow{b}) = \pi/4$. Calcule $||\overrightarrow{a}||$ e $||\overrightarrow{a} - \overrightarrow{b}||$.

3ª Questão Determine a equação do plano π que passa pelos pontos $A = (1, -1, 1)$, $B = (3, -3, 1)$ e $C = (-1, 2, 1)$.

4ª Questão Determine as equações paramétricas da reta r que passa pelo ponto $Q = (3, -2, 1)$ e é perpendicular ao plano $\beta : 3x - 2y + 5z - 10 = 0$.

5ª Questão Encontre o ponto de interseção do plano $\gamma : 3x - 2y + z = 44$ com a reta de equações paramétricas $r : \begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 1 - 3t \\ z = 5 + 4t \end{cases}$

6ª Questão Identifique a curva cônica de equação $4x^2 + 9y^2 - 8x - 54y + 49 = 0$. Determine o centro, focos, vértice dessa curva esboce seu gráfico.

7ª Questão Determine a equação da superfície de revolução obtida pela rotação da curva $z = 4x^2$, $y = 0$, em torno do eixo Oz. Identifique a superfície.

8ª Questão Identifique as superfícies e esboce seu gráficos:

a) $x^2 + y^2 - 6x = 0$

b) $2x^2 + y^2 - z^2 = 0$

Boa Sorte