Roteiro da segunda aula presencial - ME

Matemática Elementar

Departamento de Matemática
Universidade Federal da Paraíba

29 de outubro de 2014

UFPBVIRTUAL

Questão 1

Use o princípio da indução finita para provar que, para todo número natural n, vale a igualdade:

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Resposta da questão 1

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Usando o Princípio da Indução temos:

- Quando $n=1$, verifica-se que a fórmula acima é válida pois:

$$1=\frac{1(1+1)}{2}=\frac{2}{2}=1$$

Resposta da questão 1

$$1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

- Suponhamos que a fórmula acima seja verdadeira para $n=k$, ou seja, a soma dos k primeiros números seja:

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

Resposta da questão 1

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

- Fazendo $n=(k+1)$, e somando aos dois lados da igualdade acima por $(k+1)$, obtemos:

  $$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

  isto é, a soma dos $k+1$ primeiros é $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.
- Provamos assim, por indução, que a igualdade acima é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$.

Resposta da questão 1

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{k(k+1)}{2}$$

- Fazendo $n=(k+1)$, e somando aos dois lados da igualdade acima por $(k+1)$, obtemos:

$$1+2+\cdots+k+(k+1)=\frac{k(k+1)}{2}+(k+1)=\frac{k(k+1)+2(k+1)}{2}$$

  isto é, a soma dos $k+1$ primeiros é $\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$.
- Provamos assim, por indução, que a igualdade acima é verdadeira para todo $n\in\mathbb{N}$.

UFPBVIRTUAL

Questão 2

Em relação à conjuntos enumeráveis, assinale as alternativas abaixo, com (**V**) VERDADEIRO ou (**F**) FALSO, **justificando/exemplificando cada resposta dada**.

a. ( ) A é dito enumerável quando existir uma bijeção entre A e um subconjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.
b. ( ) Se A e B são conjuntos enumeráveis então a união $A \cup B$ é não enumerável.
c. ( ) Se A é um conjunto não enumerável então todo subconjunto infinito de A é não enumerável.
d. ( ) Se o produto cartesiano $A \times B$ é não enumerável, então A e B são conjuntos enumeráveis.

Resposta da questão 2)

a) ( ) A é dito enumerável quando existir uma bijeção entre A e um subconjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Verdadeiro.

Pois se A é finito basta considerar uma bijeção com um subconjunto finito de $\mathbb{N}$ e se A for infinito basta considerar uma bijeção com o próprio conjunto $\mathbb{N}$.

Resposta da questão 2)

b. ( ) A é dito enumerável quando existir uma bijeção entre A e um subconjunto dos números naturais $\mathbb{N}$.

Falso.

Pois se A e B são conjuntos enumeráveis então existem funções bijeção f_A e f_B de A e B em subconjuntos de $\mathbb{N}$, logo a função definida por

$$F(x) = \begin{cases} 2f_A(x) & se\ x \in A \\ 2f_B(x) + 1 & se\ x \in B \end{cases}$$

é uma bijeção com um subconjunto de $\mathbb{N}$.

Resposta da questão 2)

- c ( ) Se A é um conjunto não enumerável então todo subconjunto infinito de A é não enumerável.

Falso.

Pois considere o conjunto $\mathbb{R}$ não enumerável e o subconjunto infinito $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$ que é enumerável.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 2)

d ( ) Se o produto cartesiano $A \times B$ é não enumerável, então A e B são conjuntos enumeráveis.

Falso.

Pois se o produto cartesiano $A \times B$ é não enumerável, necessariamente A ou B é não enumerável.

Questão 3

Escreva o número $[1234]_5$ na forma decimal (base dez) e o número decimal 1234 na base 5.

Resposta da questão 3)

Para escrever $[1234]_5$ na base decimal, basta observar a construção deste número que é

$$\begin{aligned}
[\mathbf{1234}]_5 &= \mathbf{1}\times 5^3+\mathbf{2}\times 5^2+\mathbf{3}\times 5^1+\mathbf{4}\times 5^0\\
&= 125+50+15+4\\
&= 194
\end{aligned}$$

Resposta da questão 3)

Para escrever 1234 na base 5, usaremos o algoritmo da divisão:

$$\begin{aligned}
1234 \div 5 &= 246 \times 5 + 4 && \textit{resto } \mathbf{4}\\
246 \div 5 &= 49 \times 5 + 1 && \textit{resto } \mathbf{1}\\
49 \div 5 &= 9 \times 5 + 4 && \textit{resto } \mathbf{4}\\
9 \div 5 &= 1 \times 5 + 4 && \textit{resto } \mathbf{4}\\
1 \div 5 &= 0 \times 5 + 4 && \textit{resto } \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Logo $1234 = [\mathbf{14414}]_5$ (observe a ordem dos números)

UFPBVIRTUAL

Questão 4

Dado um número natural n, considere os conjuntos $D(n)$ e $M(n)$ como o conjunto dos divisores e dos múltiplos de n respectivamente:

a. Determine $MDC(22,28)$ pelo Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) e $MDC(22,28,36)$ como o **maior** elemento do conjunto $D(22) \cap D(28) \cap D(36)$.
b. Determine via processo de decomposição simultânea o $MMC(22,28)$ e $MMC(8,12,16)$ como o **menor** elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 4 a)

- Usando o Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) para determinar $MDC(22,28)$ temos:

$$
\begin{aligned}
28 \div 22 &= 1 \times 22 + 6 \quad \textit{resto } 6\\
22 \div 6 &= 3 \times 6 + 4 \quad \textit{resto } 4\\
6 \div 4 &= 1 \times 4 + 2 \quad \textit{resto } \mathbf{2}\\
4 \div \mathbf{2} &= 2 \times 2 + 0 \quad \textit{resto } 0
\end{aligned}
$$

- Logo o resultado é o último divisor, não nulo, deste processo, ou seja, $MDC(22,28) = \mathbf{2}$.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 4 a)

- Usando o Algoritmo de Euclides (divisões sucessivas) para determinar $MDC(22, 28)$ temos:

$$
\begin{array}{rcll}
28 \div 22 & = & 1 \times 22 + 6 & \textit{resto } 6 \\
22 \div 6 & = & 3 \times 6 + 4 & \textit{resto } 4 \\
6 \div 4 & = & 1 \times 4 + 2 & \textit{resto } \mathbf{2} \\
4 \div \mathbf{2} & = & 2 \times 2 + 0 & \textit{resto } 0
\end{array}
$$

- Logo o resultado é o último divisor, não nulo, deste processo, ou seja, $MDC(22, 28) = \mathbf{2}$.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 4 a)

- Para determinar $MDC(22,28,36)$ como o **maior** elemento do conjunto $D(22) \cap D(28) \cap D(36)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$D(22) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 11, 22\}$$
$$D(28) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 4, 7, 14, 28\}$$
$$D(36) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

- Logo $D(22) \cap D(28) \cap D(36) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$
- Portanto concluímos que: $MDC(22,28,36) = 2$

Resposta da questão 4 a)

- Para determinar $MDC(22, 28, 36)$ como o **maior** elemento do conjunto $D(22) \cap D(28) \cap D(36)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$D(22) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 11, 22\}$$
$$D(28) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 4, 7, 14, 28\}$$
$$D(36) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\}$$

- Logo $D(22) \cap D(28) \cap D(36) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$
- Portanto concluímos que: $MDC(22, 28, 36) = 2$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 4 a)

- Para determinar $MDC(22, 28, 36)$ como o **maior** elemento do conjunto $D(22) \cap D(28) \cap D(36)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$\begin{aligned} D(22) &= \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 11, 22\} \\ D(28) &= \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 4, 7, 14, 28\} \\ D(36) &= \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36\} \end{aligned}$$

- Logo $D(22) \cap D(28) \cap D(36) = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}\}$
- Portanto concluímos que: $MDC(22, 28, 36) = 2$

Resposta da questão 4 b)

- Determinando via processo de decomposição simultânea o $MMC(22, 28)$, temos

$$\begin{array}{cc|c} 22 & 28 & \mathbf{2} \\ 11 & 14 & \mathbf{2} \\ 11 & 7 & \mathbf{7} \\ 11 & 1 & \mathbf{11} \\ 1 & 1 & \end{array}$$

- Logo

$$MMC(22, 28) = \mathbf{2}^{\mathbf{2}} \times \mathbf{7} \times \mathbf{11} = \mathbf{308}$$

Resposta da questão 4 b)

- Determinando via processo de decomposição simultânea o $MMC(22, 28)$, temos

$$\begin{array}{cc|c} 22 & 28 & \mathbf{2} \\ 11 & 14 & \mathbf{2} \\ 11 & 7 & \mathbf{7} \\ 11 & 1 & \mathbf{11} \\ 1 & 1 & \end{array}$$

- Logo

$$MMC(22, 28) = \mathbf{2^2} \times \mathbf{7} \times \mathbf{11} = \mathbf{308}$$

Resposta da questão 4 b)

- Para $MMC(8, 12, 16)$ como o **menor** elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$M(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, \mathbf{48}, 56, \dots\}$$
$$M(12) = \{12, 24, 36, \mathbf{48}, 60, 72, \dots\}$$
$$M(16) = \{16, 32, \mathbf{48}, 64, 80, 96, \dots\}$$

- Logo

$$M(8) \cap M(12) \cap M(16) = \{48, 96, \dots\}$$

- Portanto concluímos que: $MMC(8, 12, 16) = 48$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 4 b)

- Para $MMC(8, 12, 16)$ como o **menor** elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$M(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, \mathbf{48}, 56, \dots\}$$
$$M(12) = \{12, 24, 36, \mathbf{48}, 60, 72, \dots\}$$
$$M(16) = \{16, 32, \mathbf{48}, 64, 80, 96, \dots\}$$

- Logo

$$M(8) \cap M(12) \cap M(16) = \{48, 96, \dots\}$$

- Portanto concluímos que: $MMC(8, 12, 16) = 48$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 4 b)

- Para $MMC(8,12,16)$ como o **menor** elemento do conjunto $M(8) \cap M(12) \cap M(16)$, vamos encontrar esses conjuntos:

$$M(8) = \{8, 16, 24, 32, 40, \mathbf{48}, 56, \ldots\}$$
$$M(12) = \{12, 24, 36, \mathbf{48}, 60, 72, \ldots\}$$
$$M(16) = \{16, 32, \mathbf{48}, 64, 80, 96, \ldots\}$$

- Logo

$$M(8) \cap M(12) \cap M(16) = \{48, 96, \ldots\}$$

- Portanto concluímos que: $MMC(8,12,16) = 48$

Resposta da questão 4 b)

- Só para calcular e confirmar o valor do $MMC(8, 12, 16)$ via processo de decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 12 & 16 & \mathbf{2} \\ 4 & 6 & 8 & \mathbf{2} \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 2 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 1 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

- Logo

$$MMC(8, 12, 16) = \mathbf{2}^{\mathbf{4}} \times \mathbf{3} = \mathbf{48}$$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 4 b)

- Só para calcular e confirmar o valor do $MMC(8, 12, 16)$ via processo de decomposição simultânea:

$$\begin{array}{ccc|c} 8 & 12 & 16 & \mathbf{2} \\ 4 & 6 & 8 & \mathbf{2} \\ 2 & 3 & 4 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 2 & \mathbf{2} \\ 1 & 3 & 1 & \mathbf{3} \\ 1 & 1 & 1 & \end{array}$$

- Logo

$$MMC(8, 12, 16) = \mathbf{2^4} \times \mathbf{3} = \mathbf{48}$$

Questão 5

Definição

Dados a e b números inteiros, temos $a \equiv b \mod n$ se, e somente se, a e b possuem o mesmo resto quando divididos por n.

Verifique as equivalências abaixo são verdadeiras:

a. $-2 \equiv 43 \mod 5$
b. $2 \equiv 20 \mod 5$
c. $12 \equiv 17 \mod 5$
d. $-4 \equiv 17 \mod 5$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 5

a. A equivalência:

$$-2 \equiv 43 \mod 5$$

é **verdadeira** pois os restos são iguais a 3:

$$\begin{aligned} -2 &= -1 \times 5 + 3 & \textit{resto } \mathbf{3} \\ 43 &= 8 \times 5 + 3 & \textit{resto } \mathbf{3} \end{aligned}$$

Ou, $-2 - 43 = 45 \equiv 0 \mod 5$

Resposta da questão 5

b) A equivalência:

$$2 \equiv 20 \mod 5$$

é **falsa** pois os restos são diferentes:

$$\begin{array}{rcll} 2 & = & 0 \times 5 + 2 & \textit{resto } \mathbf{2} \\ 20 & = & 4 \times 5 + 0 & \textit{resto } \mathbf{0} \end{array}$$

Ou, $2 - 20 = -18 \not\equiv 0 \mod 5$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 5

- A equivalência:

$$12 \equiv 17 \mod 5$$

é **verdadeira** pois os restos são iguais a 2:

$$\begin{aligned} 12 &= 2 \times 5 + 2 \quad \textit{resto } \mathbf{2} \\ 17 &= 3 \times 5 + 2 \quad \textit{resto } \mathbf{2} \end{aligned}$$

Ou, $12 - 17 = -5 \equiv 0 \mod 5$

Resposta da questão 5

- d) A equivalência:

$$-4 \equiv 17(mod\ 5)$$

é **falsa** pois os restos são diferentes:

$$\begin{array}{rcll} -4 & = & -1 \times 5 + 1 & \textit{resto } \mathbf{1} \\ 17 & = & 3 \times 5 + 2 & \textit{resto } \mathbf{2} \end{array}$$

Ou, $-4 - 17 = -21 \not\equiv 0 \mod 5$

Questão 6

Dados $\overline{a}$ e $\overline{b}$ em $\mathbb{Z}_n = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \cdots, \overline{n-1}\}$, definimos o produto $\overline{a}.\overline{b}$ como sendo a classe de equivalência módulo n do produto (usual) $a.b$ e que $\overline{a}$ é divisível por $\overline{b}$ se existe $\overline{c} \in \mathbb{Z}_n$ tal que $\overline{a} = \overline{b}.\overline{c}$.

Em $\mathbb{Z}_7 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}, \overline{6}\}$ determine:

- a) $\overline{12} - \overline{2} + \overline{3} + \overline{4}$
- b) $\overline{5} \times \overline{3}$
- c) $\overline{8^{12}}$
- d) a da divisão de $\overline{3}$ por $\overline{4}$
- e) o inverso multiplicativo de $\overline{3}$
- f) uma solução para a equação $\overline{x}^2 - \overline{1} = \overline{3}$

Resposta da questão 6

a) $\overline{12} - \overline{2} + \overline{3} + \overline{4} = \overline{12 - 2 + 3 + 4} = \overline{17} = \overline{3}$

Pois $17 \equiv 3 \mod 7$.

Resposta da questão 6

b) $\overline{5} \times \overline{3} = \overline{5 \times 3} = \overline{15} = \overline{1}$

Pois $15 \equiv 1 \mod 7$.

Resposta da questão 6

- c) $\overline{8^{12}} = \overline{8}^{12} = \overline{1}^{8} = \overline{1}$

Pois $8 \equiv 1 \mod 7$.

Resposta da questão 6

d. Da divisão de $\overline{3}$ por $\overline{4}$, o que se pede é um número $\overline{X} \in \mathbb{Z}_7$, tal que $\overline{X} \times \overline{4} = \overline{3}$, ou seja, valores para $x \in \mathbb{Z}$ de forma que $4x \div 7$ tenha resto 3, portanto observe que todos os elementos do conjunto $\overline{6} = \{\ldots, -8, -1, 6, 13, \ldots\}$ satisfazem a condição. Logo a divisão de $\overline{3}$ por $\overline{4}$ é $\overline{6}$

Resposta da questão 6

- **e** O inverso multiplicativo de $\overline{3}$ será um $\overline{X} \in \mathbb{Z}_7$, tal que $\overline{X} \times \overline{3} = \overline{3} \times \overline{X} = \overline{1}$, ou seja, valores para $x \in \mathbb{Z}$ de forma que $3x \div 7$ tenha resto 1, portanto observe que todos os elementos do conjunto $\overline{5} = \{\ldots, -9, -2, 5, 12, \ldots\}$ satisfazem a condição. Logo o inverso multiplicativo de $\overline{3}$ será $\overline{5}$.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 6

6. Uma solução para a equação

$$\overline{x}^2 - \overline{1} = \overline{3}$$

será um $\overline{X} \in \mathbb{Z}_7$, tal que $\overline{X}^2 - \overline{1} = \overline{3}$, ou seja, valores para $x \in \mathbb{Z}$ de forma que $(x^2 - 1) \div 7$ tenha resto 3, portanto observe que todos os elementos dos conjuntos $\overline{2} = \{\dots, -12, -5, 2, 9, \dots\}$ e $\overline{5} = \{\dots, -9, -2, 5, 12, \dots\}$ satisfazem a condição.
Logo as soluções para a equação

$$\overline{x}^2 - \overline{1} = \overline{3}$$

são $\overline{2}$ e $\overline{5}$.

Questão 7

Mostre que $2^{222} + 2$ é divisível por 3.

Resposta da questão 7

- Lembrando que se $a \equiv b \mod c$, então
$$a^n \equiv b^n \mod c \qquad \text{e} \qquad (a+d) \equiv (b+d) \mod c$$
- Além disso, dados a e b inteiros, temos que
$$a \text{ é divisível por } b \text{ se, e somente se, } a \equiv 0 \mod b$$
Por exemplo $6 \equiv 0 \mod 3$.
- Como $2 \equiv -1 \mod 3$, então $2^{222} \equiv 1 \mod 3$.
- Agora basta somar 2 e obtemos $(2^{222}+2) \equiv (1+2) \mod 3 \equiv 0 \mod 3$
- Logo $2^{222}+2$ é divisível por 3

Resposta da questão 7

- Lembrando que se $a \equiv b \mod c$, então

$$a^n \equiv b^n \mod c \qquad \text{e} \qquad (a+d) \equiv (b+d) \mod c$$

- Além disso, dados a e b inteiros, temos que

$$a \text{ é divisível por } b \text{ se, e somente se, } a \equiv 0 \mod b$$

Por exemplo $6 \equiv 0 \mod 3$.

- Como $2 \equiv -1 \mod 3$, então $2^{222} \equiv 1 \mod 3$.
- Agora basta somar 2 e obtemos $(2^{222}+2) \equiv (1+2) \mod 3 \equiv 0 \mod 3$
- Logo $2^{222}+2$ é divisível por 3

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 7

- Lembrando que se $a \equiv b \mod c$, então

$$a^n \equiv b^n \mod c \qquad \text{e} \qquad (a+d) \equiv (b+d) \mod c$$

- Além disso, dados a e b inteiros, temos que

$$a \text{ é divisível por } b \text{ se, e somente se, } a \equiv 0 \mod b$$

  Por exemplo $6 \equiv 0 \mod 3$.
- Como $2 \equiv -1 \mod 3$, então $2^{222} \equiv 1 \mod 3$.
- Agora basta somar 2 e obtemos $(2^{222}+2) \equiv (1+2) \mod 3 \equiv 0 \mod 3$
- Logo $2^{222}+2$ é divisível por 3

Resposta da questão 7

- Lembrando que se $a \equiv b \mod c$, então
  $$a^n \equiv b^n \mod c \qquad \text{e} \qquad (a+d) \equiv (b+d) \mod c$$
- Além disso, dados a e b inteiros, temos que
  $$a \text{ é divisível por } b \text{ se, e somente se, } a \equiv 0 \mod b$$
  Por exemplo $6 \equiv 0 \mod 3$.
- Como $2 \equiv -1 \mod 3$, então $2^{222} \equiv 1 \mod 3$.
- Agora basta somar 2 e obtemos $(2^{222}+2) \equiv (1+2) \mod 3 \equiv 0 \mod 3$
- Logo $2^{222}+2$ é divisível por 3

Resposta da questão 7

- Lembrando que se $a \equiv b \mod c$, então

$$a^n \equiv b^n \mod c \qquad \text{e} \qquad (a+d) \equiv (b+d) \mod c$$

- Além disso, dados a e b inteiros, temos que

$$a \text{ é divisível por } b \text{ se, e somente se, } a \equiv 0 \mod b$$

  Por exemplo $6 \equiv 0 \mod 3$.
- Como $2 \equiv -1 \mod 3$, então $2^{222} \equiv 1 \mod 3$.
- Agora basta somar 2 e obtemos $(2^{222}+2) \equiv (1+2) \mod 3 \equiv 0 \mod 3$
- Logo $2^{222}+2$ é divisível por 3

Dúvidas!!!

Profs. **Sérgio** & **Jarbson**

sergio@mat.ufpb.br & **jarbson@yahoo.com.br**
e-mails

mat.ufpb.br/sergio
Página do Prof.

Apresentação utilizando o Beamer/LaTeX

UFPBVIRTUAL