Roteiro da primeira aula presencial - ME

Matemática Elementar

Departamento de Matemática
Universidade Federal da Paraíba

28 de março de 2015

UFPBVIRTUAL

Questão 1

Assinale as alternativas abaixo, com (**V**) VERDADEIRO ou (**F**) FALSO, **justificando cada resposta dada**, Considerando os conjuntos $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$

a. ( ) $n(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = 12$
b. ( ) O número de elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = 9$
c. ( ) $\mathcal{A}$ é subconjunto de $\mathcal{D}$
d. ( ) $\{e\} \subset \mathcal{D}$
e. ( ) $a \notin \mathcal{D}$
f. ( ) $\{2, \mathcal{B}\} \subset \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 1.a

- a (F) $n(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = 12$

Falso, pois $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ possui 15 elementos, como pode ser visto na tabela abaixo:

$\mathcal{A} \times \mathcal{B}$	a	e	i
0	(0,a)	(0,e)	(0,i)
1	(1,a)	(1,e)	(1,i)
2	(2,a)	(2,e)	(2,i)
3	(3,a)	(3,e)	(3,i)
4	(4,a)	(4,e)	(4,i)

Onde $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$

Resposta da questão 1.b

b. (F) O número de elementos de $\mathcal{P}(\mathcal{B}) = 9$

Falso, pois o número de elementos do conjunto das partes[1] de $\mathcal{B}$ é $2^3 = 8$, ou seja:

$$\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$$

Onde $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$

[1] Pelo teorema 3.4.2

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 1.c

- (V) $\mathcal{A}$ é subconjunto de $\mathcal{D}$

Verdadeiro, pois todos os elementos de $\mathcal{A}$ estão em $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$, ou seja:

$$\mathcal{A} \subset \mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, \emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$$

Onde $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$

Resposta da questão 1.d

d. $(F)\ \{e\} \subset \mathcal{D}$

Falso, pois $\{e\}$ é um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$ e não um subconjunto de $\mathcal{D}$.

Note que $\{e\} \in \mathcal{D}$

Onde $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$ e
$\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, \emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 1.e

- e $(V)\ a \notin \mathcal{D}$

Verdadeiro, pois $a \notin \mathcal{A}$ e $a \notin \mathcal{P}(\mathcal{B})$, logo $a \notin \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B}) = \mathcal{D}$.

Note que $\{a\} \in \mathcal{D}$

Onde $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$ e
$\mathcal{D} = \{0, 1, 2, 3, 4, \emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a, e\}, \{a, i\}, \{e, i\}, \{a, e, i\}\}$

Resposta da questão 1.f

f. $(F)\ \{2, \mathcal{B}\} \subset \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})$

Falso, apesar de $2 \in \mathcal{A}$, $\mathcal{B} \notin \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})$, pois $\mathcal{B} \notin \mathcal{A}$ e $\mathcal{B} \notin (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})$ $(\mathcal{B} \cap \mathcal{D} = \emptyset)$.

Onde $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$, $\mathcal{B} = \{a, e, i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$

UFPBVIRTUAL

Questão 2

Considere a família $I_n = \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ de intervalos fechados, onde $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Determine os conjuntos $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$ e $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$.

Resposta da questão 2

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[-\frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1}\right] = [-1, 2]$
- $I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] = [-0.5, 1.5]$
- $I_3 = \left[-\frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] = [-0.333\ldots, 1.333\ldots]$

$\vdots$

- $I_{10} = \left[-\frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right] = \left[-\frac{1}{10}, \frac{11}{10}\right] = [-0.1, 1.1]$
- Observe que: I_1 contém todos os outros intervalos da família, ou seja, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_{10} \supset I_i \supset \cdots$

Resposta da questão 2

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[-\frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1}\right] = [-1, 2]$
- $I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] = [-0.5, 1.5]$
- $I_3 = \left[-\frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] = [-0.333\ldots, 1.333\ldots]$

$\vdots$

- $I_{10} = \left[-\frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right] = \left[-\frac{1}{10}, \frac{11}{10}\right] = [-0.1, 1.1]$
- Observe que: I_1 contém todos os outros intervalos da família, ou seja, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_{10} \supset I_i \supset \cdots$

Resposta da questão 2

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[-\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{1}\right] = [-1, 2]$
- $I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] = [-0.5, 1.5]$
- $I_3 = \left[-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] = [-0.333\ldots, 1.333\ldots]$

$\vdots$

- $I_{10} = \left[-\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}\right] = \left[-\frac{1}{10}, \frac{11}{10}\right] = [-0.1, 1.1]$
- Observe que: I_1 contém todos os outros intervalos da família, ou seja, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_{10} \supset I_i \supset \cdots$

Resposta da questão 2

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[-\frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1}\right] = [-1, 2]$
- $I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] = [-0.5, 1.5]$
- $I_3 = \left[-\frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] = [-0.333\ldots, 1.333\ldots]$

$\vdots$

- $I_{10} = \left[-\frac{1}{10}, 1 + \frac{1}{10}\right] = \left[-\frac{1}{10}, \frac{11}{10}\right] = [-0.1, 1.1]$
- Observe que: I_1 contém todos os outros intervalos da família, ou seja, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_{10} \supset I_i \supset \cdots$

Resposta da questão 2

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[-\frac{1}{1}, 1+\frac{1}{1}\right] = [-1, 2]$
- $I_2 = \left[-\frac{1}{2}, 1+\frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right] = [-0.5, 1.5]$
- $I_3 = \left[-\frac{1}{3}, 1+\frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right] = [-0.333\ldots, 1.333\ldots]$

  $\vdots$
- $I_{10} = \left[-\frac{1}{10}, 1+\frac{1}{10}\right] = \left[-\frac{1}{10}, \frac{11}{10}\right] = [-0.1, 1.1]$
- Observe que: I_1 contém todos os outros intervalos da família, ou seja, $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_{10} \supset I_i \supset \cdots$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 2

- $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0,1]$, pois $-\frac{1}{n} < 0$ e $1 < 1 + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que nos leva a concluir que $[0,1] \subset \left[-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [-1,2] = I_1$, pois I_1 contém todos os outros intervalos da família, como observado anteriormente.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 2

- $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n = [0,1]$, pois $-\frac{1}{n} < 0$ e $1 < 1 + \frac{1}{n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ o que nos leva a concluir que $[0,1] \subset \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$ $\forall n \in \mathbb{N}$
- $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n = [-1,2] = I_1$, pois I_1 contém todos os outros intervalos da família, como observado anteriormente.

Questão 3

Considere $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $\sim$ a relação definida por:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ é múltiplo de } 3$$

a. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência?
b. Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\!\sim = \{\overline{x} / x \in \mathcal{A}\}$ onde cada $\overline{x} = \{y \in \mathcal{A} / x \sim y\}$?
c. $\mathcal{A}/\!\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

Resposta da questão 3.a

ⓐ A relação $\sim$ é uma relação de equivalência?

- $\sim$ é **reflexiva**
  Pois temos que $a - a = 0 = 3 \times 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, logo $a \sim a$.

- $\sim$ é **simétrica**
  Pois temos que se $a - b = 3n$ então $b - a = 3(-m)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, logo $b \sim a$ se, e somente se $a \sim b$

- $\sim$ é **transitiva**
  Pois se $a \sim b$ e $b \sim c$, então temos que $a - b = 3n$ e $b - c = 3m$ logo $a - b + (b - c) = 3n + 3m$ e portanto $a - c = 3(n + m)$ ou seja $a \sim c$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 3.a

ⓐ A relação $\sim$ é uma relação de equivalência?

- $\sim$ é **reflexiva**
  Pois temos que $a - a = 0 = 3 \times 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, logo $a \sim a$.

- $\sim$ é **simétrica**
  Pois temos que se $a - b = 3n$ então $b - a = 3(-m)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, logo $b \sim a$ se, e somente se $a \sim b$

- $\sim$ é **transitiva**
  Pois se $a \sim b$ e $b \sim c$, então temos que $a - b = 3n$ e $b - c = 3m$ logo $a - b + (b - c) = 3n + 3m$ e portanto $a - c = 3(n + m)$ ou seja $a \sim c$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 3.a

ⓐ A relação $\sim$ é uma relação de equivalência?

- $\sim$ é **reflexiva**
  Pois temos que $a - a = 0 = 3 \times 0$ para todo $a \in \mathcal{A}$, logo $a \sim a$.

- $\sim$ é **simétrica**
  Pois temos que se $a - b = 3n$ então $b - a = 3(-m)$ para todo $a, b \in \mathcal{A}$, logo $b \sim a$ se, e somente se $a \sim b$

- $\sim$ é **transitiva**
  Pois se $a \sim b$ e $b \sim c$, então temos que $a - b = 3n$ e $b - c = 3m$ logo $a - b + (b - c) = 3n + 3m$ e portanto $a - c = 3(n + m)$ ou seja $a \sim c$

Resposta da questão 3.b

ⓑ Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim = \{\overline{x}/x \in \mathcal{A}\}$?

- Elementos equivalentes a 0 são: 0 e 3
  Pois $0 - 0 = 0 = 3 \times 0$ e $0 - 3 = -3 = 3 \times (-1)$
  Logo $\overline{0} = \overline{3} = \{0, 3\}$
- Elementos equivalentes a 1 são: 1 e 4
  Pois $1 - 1 = 0 = 3 \times 0$ e $1 - 4 = -3 = 3 \times (-1)$
  Logo $\overline{1} = \overline{4} = \{1, 4\}$
- Elementos equivalentes a 2: apenas o 2
  Pois $2 - 2 = 0 = 3 \times 0$
  Logo $\overline{2} = \{2\}$
- Portanto o conjunto quociente é
  $A/\sim = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2\}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ e possui 3 elementos.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 3.b

ⓑ Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim = \{\overline{x}/x \in \mathcal{A}\}$?

- Elementos equivalentes a 0 são: 0 e 3
  Pois $0 - 0 = 0 = 3 \times 0$ e $0 - 3 = -3 = 3 \times (-1)$
  Logo $\overline{0} = \overline{3} = \{0, 3\}$
- Elementos equivalentes a 1 são: 1 e 4
  Pois $1 - 1 = 0 = 3 \times 0$ e $1 - 4 = -3 = 3 \times (-1)$
  Logo $\overline{1} = \overline{4} = \{1, 4\}$
- Elementos equivalentes a 2: apenas o 2
  Pois $2 - 2 = 0 = 3 \times 0$
  Logo $\overline{2} = \{2\}$
- Portanto o conjunto quociente é
  $A/\sim = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2\}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ e possui 3 elementos.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 3.b

ⓑ Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim = \{\overline{x}/x \in \mathcal{A}\}$?

- Elementos equivalentes a 0 são: 0 e 3
  Pois $0-0=0=3\times 0$ e $0-3=-3=3\times(-1)$
  Logo $\overline{0}=\overline{3}=\{0,3\}$
- Elementos equivalentes a 1 são: 1 e 4
  Pois $1-1=0=3\times 0$ e $1-4=-3=3\times(-1)$
  Logo $\overline{1}=\overline{4}=\{1,4\}$
- Elementos equivalentes a 2: apenas o 2
  Pois $2-2=0=3\times 0$
  Logo $\overline{2}=\{2\}$
- Portanto o conjunto quociente é
  $A/\sim = \{\{0,3\},\{1,4\},\{2\}\} = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}$ e possui 3 elementos.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 3.b

(b) Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim = \{\overline{x}/x \in \mathcal{A}\}$?

- Elementos equivalentes a 0 são: 0 e 3
  Pois $0 - 0 = 0 = 3 \times 0$ e $0 - 3 = -3 = 3 \times (-1)$
  Logo $\overline{0} = \overline{3} = \{0, 3\}$
- Elementos equivalentes a 1 são: 1 e 4
  Pois $1 - 1 = 0 = 3 \times 0$ e $1 - 4 = -3 = 3 \times (-1)$
  Logo $\overline{1} = \overline{4} = \{1, 4\}$
- Elementos equivalentes a 2: apenas o 2
  Pois $2 - 2 = 0 = 3 \times 0$
  Logo $\overline{2} = \{2\}$
- Portanto o conjunto quociente é
  $A/\sim = \{\{0, 3\}, \{1, 4\}, \{2\}\} = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ e possui 3 elementos.

Resposta da questão 3.c

ⓒ $\mathcal{A}/\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

- Observe que
$$A/\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$
é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathcal{A}$;
- Os subconjuntos $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;
- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;
- A união dos subconjuntos $\overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} = \mathcal{A}$;
- Logo é uma partição.

Resposta da questão 3.c

(c) $\mathcal{A}/\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

- Observe que

  $$A/\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$

  é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathcal{A}$;

- Os subconjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;

- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;

- A união dos subconjuntos $\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2} = \mathcal{A}$;

- Logo é uma partição.

Resposta da questão 3.c

ⓒ $\mathcal{A}/\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

- Observe que

$$A/\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$

é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathcal{A}$;

- Os subconjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;
- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;
- A união dos subconjuntos $\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}=\mathcal{A}$;
- Logo é uma partição.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 3.c

ⓒ $\mathcal{A}/\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

- Observe que

  $$A/\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$

  é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathcal{A}$;

- Os subconjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;

- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;

- A união dos subconjuntos $\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}=\mathcal{A}$;

- Logo é uma partição.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 3.c

ⓒ $\mathcal{A}/\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

- Observe que

$$A/\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$

  é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathcal{A}$;

- Os subconjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;

- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;

- A união dos subconjuntos $\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}=\mathcal{A}$;

- Logo é uma partição.

UFPBVIRTUAL

Questão 4

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $f(x) = |x| - 1$ e $\sim$ uma relação de equivalência em $\mathbb{R}$ definida por:

$$x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$$

Determine as classes de equivalência $\overline{0}$, $\overline{1}$ e $\overline{2}$.

Resposta da questão 4

a. Elementos equivalentes ao 0: é apenas o 0
Pois, como $f(0) = |0| - 1 = -1$ e resolvendo a equação
$$|x| - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$$
Logo $\overline{0} = \{0\}$

b. Elementos equivalentes ao 1: são 1 e -1
Pois como $f(1) = |1| - 1 = 0$ e resolvendo a equação
$$|x| - 1 = 0 \Rightarrow x \pm 1$$
Temos $f(1) = f(-1) = 0$, logo $\overline{1} = \overline{-1} = \{-1, 1\}$

c. Elementos equivalentes ao 2: são 2 e -2
Pois $f(2) = |2| - 1 = 1$ e resolvendo a equação
$$|x| - 1 = 1 \Rightarrow x \pm 2$$
Temos $f(2) = f(-2) = 1$, logo $\overline{2} = \overline{-2} = \{-2, 2\}$

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 4

a. Elementos equivalentes ao 0: é apenas o 0
   Pois, como $f(0) = |0| - 1 = -1$ e resolvendo a equação
   $$|x| - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$$
   Logo $\overline{0} = \{0\}$
b. Elementos equivalentes ao 1: são 1 e -1
   Pois como $f(1) = |1| - 1 = 0$ e resolvendo a equação
   $$|x| - 1 = 0 \Rightarrow x \pm 1$$
   Temos $f(1) = f(-1) = 0$, logo $\overline{1} = \overline{-1} = \{-1, 1\}$
c. Elementos equivalentes ao 2: são 2 e -2
   Pois $f(2) = |2| - 1 = 1$ e resolvendo a equação
   $$|x| - 1 = 1 \Rightarrow x \pm 2$$
   Temos $f(2) = f(-2) = 1$, logo $\overline{2} = \overline{-2} = \{-2, 2\}$

Resposta da questão 4

a. Elementos equivalentes ao 0: é apenas o 0
Pois, como $f(0) = |0| - 1 = -1$ e resolvendo a equação
$$|x| - 1 = -1 \Rightarrow x = 0$$
Logo $\overline{0} = \{0\}$

b. Elementos equivalentes ao 1: são 1 e -1
Pois como $f(1) = |1| - 1 = 0$ e resolvendo a equação
$$|x| - 1 = 0 \Rightarrow x \pm 1$$
Temos $f(1) = f(-1) = 0$, logo $\overline{1} = \overline{-1} = \{-1, 1\}$

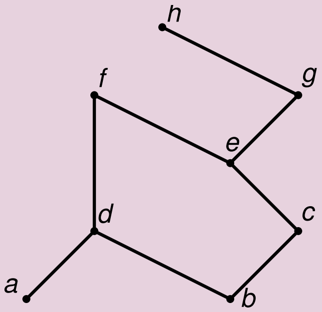
c. Elementos equivalentes ao 2: são 2 e -2
Pois $f(2) = |2| - 1 = 1$ e resolvendo a equação
$$|x| - 1 = 1 \Rightarrow x \pm 2$$
Temos $f(2) = f(-2) = 1$, logo $\overline{2} = \overline{-2} = \{-2, 2\}$

UFPBVIRTUAL

Questão 5

No conjunto $\mathcal{H} = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$ considere a relação de ordem parcial $\preceq$ induzida pelo diagrama de Hasse abaixo. Nos subconjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{R} = \{a, d, e, f\}$ e $\mathcal{S} = \{b, c, e\}$, determine:

a. Os menores e maiores elementos;
b. Os elementos minimal e maximal;
c. As cotas inferiores e superiores;
d. O ínfimo e supremo;
e. Os conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são totalmente ordenado.
f. Os conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são bem ordenados.



Resposta da questão 5

(a) Os menores e maiores elementos:

	Menor	Maior
$\mathcal{H}$	$\{\}$	$\{\}$
$\mathcal{R}$	$\{\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e\}$

Definição

Sejam $(\mathcal{A}, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ um subconjunto não-vazio, $b \in \mathcal{B}$ é:

- **menor elemento** (ou **elemento mínimo** ou **primeiro elemento**) de $\mathcal{B}$ se $b \preceq x$ para todo $x \in \mathcal{B}$
- **maior elemento** (ou **elemento máximo** ou **último elemento**) de $\mathcal{C}$ se $x \preceq b$ para todo $x \in \mathcal{C}$.

Resposta da questão 5

(b) Os elementos minimal e maximal:

	Minimal	Maximal
$\mathcal{H}$	$\{a, b\}$	$\{f, g\}$
$\mathcal{R}$	$\{a, e\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e\}$

Definição

Sejam $(\mathcal{A}, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ um subconjunto não-vazio, $b \in \mathcal{B}$ é um:

- **elemento minimal** de $\mathcal{B}$ se não existir $x \in B$, tal que $x \preceq b$
- **elemento maximal** de $\mathcal{B}$ se não existir $x \in B$, tal que $b \preceq x$.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 5

- ⓒ As cotas inferiores e superiores, ínfimo e supremo:

Cotas	Inferiores	Superiores
$\mathcal{H}$	$\{\}$	$\{\}$
$\mathcal{R}$	$\{\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e, f, g, h\}$

Definição

Sejam $(\mathcal{A}, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ um subconjunto não-vazio, $a \in \mathcal{A}$ é uma:

- **cota Inferior** ou um **minorante** de $\mathcal{B}$ se $a \preceq x$, para todo $x \in \mathcal{B}$.
- **cota superior** ou um **majorante** de $\mathcal{B}$ se $x \preceq a$, para todo $x \in \mathcal{B}$.

Resposta da questão 5

d. O ínfimo e o supremo:

	Ínfimo	Supremo
$\mathcal{H}$	$\{\}$	$\{\}$
$\mathcal{R}$	$\{\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e\}$

Definição

Sejam $(\mathcal{A}, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ um subconjunto não-vazio, $a \in \mathcal{A}$ é o:

- **ínfimo** de B se ele for o maior elemento do conjunto das cotas inferiores de B
- **supremo** de B se ele for o menor elemento do conjunto das cotas superiores de B.

UFPBVIRTUAL

Resposta da questão 5

- e) Os conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são **totalmente ordenado**?
  - $\mathcal{H}$ não é, pois f e h não são comparáveis;
  - $\mathcal{R}$ não é, pois d e e não são comparáveis;
  - $\mathcal{S}$ é pois $b \preceq c \preceq e$.

Resposta da questão 5

- Os conjuntos $\mathcal{H}$ $\mathcal{S}$ e $\mathcal{R}$ são **bem ordenados**?
  - $\mathcal{H}$ não é, pois o subconjunto $\{f, h\}$ não possui um menor elemento;
  - $\mathcal{R}$ não é, pois o subconjunto $\{d, e\}$ não possui um menor elemento;
  - $\mathcal{S}$ é pois, qualquer subconjunto de $\mathcal{S}$ possui um menor elemento.

Dúvidas!!!

sergio@mat.ufpb.br

e-mail

mat.ufpb.br/sergio

Página do Prof.

Apresentação utilizando o Beamer/LaTeX