Matemática Elementar

Roteiro da Primeira Aula (Virtual)

Prof. Dr. Sérgio de Albuquerque Souza

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

16 de maio de 2023

Questão 1

Assinale com (**V**) VERDADEIRO ou (**F**) FALSO, **justificando cada resposta dada**, as alternativas abaixo considerando os conjuntos:

$$\boxed{\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}}, \quad \boxed{\mathcal{B} = \{a,e,i\}} \text{ e } \boxed{\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})}$$

- a ( ) $n(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = 12$
- b ( ) $n(\mathcal{P}(\mathcal{B})) = 9$
- c ( ) $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$
- d ( ) $\{e\} \subset \mathcal{D}$
- e ( ) $a \notin \mathcal{D}$
- f ( ) $\{2,\mathcal{B}\} \subset \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})$

Resposta da Questão 1.a

a. $(F)\ n(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = 12$

Falso, pois $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ é o conjunto formado por 15 elementos, como indicado abaixo:

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \left\{ \begin{array}{c} (0,a),(0,e),(0,i),(1,a),(1,e), \\ (1,i),(2,a),(2,e),(2,i),(3,a), \\ (3,e),(3,i),(4,a),(4,e),(4,i) \end{array} \right\}$$

Com $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{B} = \{a,e,i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Resposta da Questão 1.b

- b) $(F)\ n(\mathcal{P}(\mathcal{B})) = 9$

Falso, pois o número de elementos do conjunto das partes[1] de $\mathcal{B}$ é $2^3 = 8$, ou seja:

$$\boxed{\mathcal{P}(\mathcal{B}) = \{\emptyset, \{a\}, \{e\}, \{i\}, \{a,e\}, \{a,i\}, \{e,i\}, \{a,e,i\}\}}$$

Com $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{B} = \{a,e,i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$.

[1] Pelo teorema 3.4.2

Resposta da Questão 1.c

- c $(V)\ \mathcal{A} \subseteq \mathcal{D}$

Verdadeiro, pois todos os elementos de $\mathcal{A}$ estão no conjunto $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$, ou seja:

$$\boxed{\mathcal{A} \subset \mathcal{D} = \left\{\begin{array}{l} 0,1,2,3,4,\emptyset,\{a\},\{e\},\{i\}, \\ \{a,e\},\{a,i\},\{e,i\},\{a,e,i\} \end{array}\right\}}$$

Com $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{B} = \{a,e,i\}$ e $\mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})$.

Resposta da Questão 1.d

- d $(F)\ \{e\} \subset \mathcal{D}$

Falso, pois $\{e\}$ é um elemento de $\mathcal{P}(\mathcal{B}) \subset \mathcal{D}$ e não um subconjunto de $\mathcal{D}$.

Note que $\{e\} \in \mathcal{D}$

Com $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{B} = \{a,e,i\}$ e $\mathcal{D} = \left\{\begin{array}{l} 0,1,2,3,4,\emptyset,\{a\},\{e\},\{i\}, \\ \{a,e\},\{a,i\},\{e,i\},\{a,e,i\} \end{array}\right\}$.

Resposta da Questão 1.e

- e $(\color{red}{V})\ a \notin \mathcal{D}$

Verdadeiro, pois $\boxed{a \notin \mathcal{A}}$ e $\boxed{a \notin \mathcal{P}(\mathcal{B})}$, portanto

$$\boxed{a \notin \mathcal{D} = \mathcal{A} \cup \mathcal{P}(\mathcal{B})}$$

Note que $\{a\} \in \mathcal{D}$

Com $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{B} = \{a,e,i\}$ e $\mathcal{D} = \left\{\begin{matrix} 0,1,2,3,4,\emptyset,\{a\},\{e\},\{i\}, \\ \{a,e\},\{a,i\},\{e,i\},\{a,e,i\} \end{matrix}\right\}$.

Resposta da Questão 1.f

- f $(\textcolor{red}{F})\ \{2,\mathcal{B}\} \subset \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})$

Falso, apesar do elemento $\boxed{2 \in \mathcal{A}}$ o elemento $\boxed{\mathcal{B} \notin \mathcal{A}}$ e $\boxed{\mathcal{B} \notin (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})}$ logo

$$\boxed{\mathcal{B} \notin \mathcal{A} \cup (\mathcal{B} \cap \mathcal{D})}$$

Note que $\mathcal{B} \cap \mathcal{D} = \emptyset$.

Com $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}$, $\mathcal{B} = \{a,e,i\}$ e $\mathcal{D} = \left\{\begin{matrix} 0,1,2,3,4,\emptyset,\{a\},\{e\},\{i\}, \\ \{a,e\},\{a,i\},\{e,i\},\{a,e,i\} \end{matrix}\right\}$.

Questão 2

Considerando a família de intervalos fechados I_n como:

$$\boxed{I_n = \left[-\frac{1}{n}\,,\ 1+\frac{1}{n}\right]}$$

com $n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Determine os conjuntos:

a) $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$

b) $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n$

Resposta da Questão 2

Construindo alguns intervalos desta família:

$$I_1 = \left[-\frac{1}{1}\,,\ 1+\frac{1}{1}\right] = [-1\ ,\ 2]$$

$$I_2 = \left[-\frac{1}{2}\,,\ 1+\frac{1}{2}\right] = \left[-\frac{1}{2}\,,\frac{3}{2}\right] = [-0.5\ ,\ 1.5]$$

$$I_3 = \left[-\frac{1}{3}\,,\ 1+\frac{1}{3}\right] = \left[-\frac{1}{3}\,,\ \frac{4}{3}\right] = [-0.333\ldots\ ,\ 1.333\ldots]$$

$$\vdots$$

$$I_{10} = \left[-\frac{1}{10}\,,\ 1+\frac{1}{10}\right] = \left[-\frac{1}{10}\,,\ \frac{11}{10}\right] = [-0.1\ ,\ 1.1]$$

Resposta da Questão 2

Observe que:

$$\underbrace{[-1\ ,\ 2]}_{I_1} \supset \underbrace{[-0.5\ ,\ 1.5]}_{I_2} \supset \underbrace{[-0.333\ ,\ 1.333]}_{I_3} \supset \cdots \supset \underbrace{[-0.1\ ,\ 1.1]}_{I_{10}} \supset \cdots$$

ou seja:

$$I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_{10} \supset \cdots$$

Resposta da Questão 2

- a) Como $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_{10} \supset \cdots$ temos:

$$\boxed{\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n = [-1\;,\;2] = I_1}$$

- b) Como para todo $n \in \mathbb{N}$, temos: $\boxed{-\frac{1}{n} < 0}$, $\boxed{1 < 1 + \frac{1}{n}}$ e

$$\boxed{\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = [0, 1]} \subset \left[-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}\right]$$

Questão 3

Considere $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4\}$ e $\sim$ a relação definida por:

$$\boxed{a \sim b \iff a - b \text{ é múltiplo de } 3}$$

a. A relação $\sim$ é uma relação de equivalência?
b. Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim$?
c. $\mathcal{A}/\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

Resposta da Questão 3.a

- A relação $\sim$ é uma relação de equivalência?

Definição: Relação de Equivalência

Uma relação binária $\sim : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é chamada de **relação de equivalência** em $\mathcal{A}$ se satisfaz às propriedades:

RE1: **Reflexiva:** $\boxed{\text{Se } x \sim x \text{ para todo } x \in \mathcal{A}}$

RE2: **Simétrica:** $\boxed{\text{Se } x \sim y \text{ então } y \sim x}$

RE3: **Transitiva:** $\boxed{\text{Se } x \sim y \text{ e } y \sim z \text{ então } x \sim z}$

Resposta da Questão 3.a

- A relação $\sim$ é **reflexiva** pois para todo $a \in \mathcal{A}$ temos que:

$$\begin{aligned} a - a &= 0 \\ &= 3 \times 0 \end{aligned}$$

ou seja, a diferença $a - a$ é múltiplo de 3, logo:

$$\boxed{a \sim a}$$

Resposta da Questão 3.a

- A relação $\sim$ é **simétrica** pois:
  Se $\boxed{a \sim b}$, então por definição, $a - b = 3n$ é múltiplo de 3, logo

$$b - a = -(a - b) = -(3n) = 3(-n)$$

ou seja, a diferença $b - a$ é múltiplo de 3, logo $\boxed{b \sim a}$.

$$\boxed{\boxed{a \sim b} \iff a - b = 3n \iff b - a = 3(-n) \iff \boxed{b \sim a}}$$

Resposta da Questão 3.a

- A relação $\sim$ é **transitiva**, pois:
  Se $\boxed{a \sim b}$ e $\boxed{b \sim c}$, então por definição que $a - b = 3n$ e $b - c = 3m$ são múltiplos de 3, logo
  $$(a-b)+(b-c)=(3n)+(3m) \Longrightarrow a-c=3(n+m)$$
  ou seja, a diferença $a - c$ é múltiplo de 3, logo $\boxed{a \sim c}$.

$$\boxed{\left\{\begin{array}{c} \boxed{a \sim b} \\ \text{e} \\ \boxed{b \sim c} \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{c} a-b=3n \\ \text{e} \\ b-c=3m \end{array}\right\} \Longrightarrow a-c=3(n+m) \Longrightarrow \boxed{a \sim c}}$$

Resposta da Questão 3.b

- b Quantos e quais são os elementos do conjunto quociente

$$\boxed{\mathcal{A}/\sim\, = \{\bar{x} \mid x \in \mathcal{A}\}}?$$

- Os elementos $\bar{x}$ do conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim$ são definidos como:

$$\boxed{\bar{x} = \{a \in \mathcal{A} \mid x \sim a\}}$$

ou seja, $\bar{x}$ é o conjunto formado por todos os elementos do conjunto $a \in \mathcal{A}$, tais que a diferença $x - a$ é múltiplo de 3.

Resposta da Questão 3.b

- Elementos equivalentes do conjunto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$\bar{0}$: Equivalentes ao elemento $\boxed{0}$ são o 0 e o 3, pois

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{0} - 0 = 3 \times 0 \\ \\ \boxed{0} - 3 = 3 \times (-1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Logo: } \bar{0} = \bar{3} = \{0, 3\}$$

Resposta da Questão 3.b

- Elementos equivalentes do conjunto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$\overline{1}$: Equivalentes ao elemento $\boxed{1}$ são o 1 e o 4, pois

$$\left.\begin{array}{l} \boxed{1} - 1 = 3 \times 0 \\ \\ \boxed{1} - 4 = 3 \times (-1) \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{Logo: } \overline{1} = \overline{4} = \{1, 4\}$$

Resposta da Questão 3.b

- Elementos equivalentes do conjunto $\mathcal{A} = \{0, 1, 2, 3, 4\}$:

$\bar{2}$: Equivalentes ao elemento $\boxed{2}$ é apenas o 2, pois

$$\left.\boxed{2} - 2 = 3 \times 0 \right\} \Longrightarrow \text{Logo: } \bar{2} = \{2\}$$

Resposta da Questão 3.b

- Conjunto quociente de $\mathcal{A}/\!\sim$:

$$\boxed{\mathcal{A}/\!\sim\, = \{\, \{0,3\}\, ,\ \{1,4\}\, ,\ \{2\}\,\}}$$

ou

$$\boxed{\mathcal{A}/\!\sim\, = \{\overline{0},\overline{1},\overline{2}\}}$$

e portanto possui apenas 3 elementos.

Resposta da Questão 3.c

- $\mathcal{A}/\!\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

Definição

Seja $\mathcal{A}$ um conjunto não vazio. Um subconjunto $\boxed{\mathbb{P}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ é uma **partição** do conjunto $\mathcal{A}$ se satisfaz as seguintes condições:

P1: $X \neq \emptyset$ para todo $X \in \mathbb{P}$,

P2: Quaisquer que sejam $X, Y \in \mathbb{P}$, se $X \neq Y$ então $X \cap Y = \emptyset$,

P3: $\displaystyle\bigcup_{X \in \mathbb{P}} = \mathcal{A}$.

Resposta da Questão 3.c

- c $\mathcal{A}/\!\sim$ é uma partição de $\mathcal{A}$?

Observe que $\boxed{\mathcal{A}/\!\sim\, = \{\{0,3\}\,,\,\{1,4\}\,,\,\{2\}\}} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ é uma partição de $\mathcal{A}$, pois satisfaz:

P1: Os subconjuntos $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;

P2: Quaisquer interseções entre $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ são vazios;

P3: A união dos subconjuntos $\displaystyle\bigcup_{\bar{x}\in\mathcal{A}/\sim} = \overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2} = \mathcal{A}$;

Questão 4

Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por

$$\boxed{f(x) = |x| - 1}$$

e $\sim$ uma relação de equivalência induzida por f em $\mathbb{R}$ dada por:

$$\boxed{x \sim y \Leftrightarrow f(x) = f(y)}$$

Determine as classes de equivalência $\overline{0}$, $\overline{1}$ e $\overline{2}$.

Resposta da Questão 4

$\bar{0}$: Os elementos $x \in \mathbb{R}$ equivalentes à $\boxed{0}$ satisfazem:

$$x \sim 0 \Leftrightarrow f(x) = f(0)$$

como $f(0) = |0| - 1 = -1$ e resolvendo a equação

$$f(x) = f(0)$$
$$|x| - 1 = -1$$
$$|x| = 0 \Longrightarrow \boxed{x = 0}$$

Logo $\boxed{\bar{0} = \{0\}}$

Resposta da Questão 4

$\overline{1}$: Os elementos $x \in \mathbb{R}$ equivalentes à $\boxed{1}$ satisfazem:

$$x \sim 1 \Leftrightarrow f(x) = f(1)$$

como $f(1) = |1| - 1 = 0$ e resolvendo a equação

$$f(x) = f(1)$$
$$|x| - 1 = 0$$
$$|x| = 1 \Longrightarrow \boxed{x = -1} \text{ ou } \boxed{x = 1}$$

Logo $\boxed{\overline{1} = \{-1, 1\} = \overline{-1}}$

Resposta da Questão 4

$\bar{2}$: Os elementos $x \in \mathbb{R}$ equivalentes à $\boxed{2}$ satisfazem:

$$x \sim 2 \Leftrightarrow f(x) = f(2)$$

como $f(2) = |2| - 1 = 1$ e resolvendo a equação

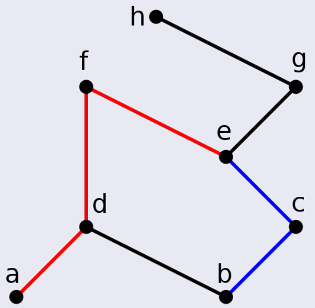
$$f(x) = f(2)$$
$$|x| - 1 = 1$$
$$|x| = 2 \Longrightarrow \boxed{x = -2} \text{ ou } \boxed{x = 2}$$

Logo $\boxed{\bar{2} = \{-2, 2\} = \overline{-2}}$

Questão 5

No conjunto $\mathcal{H} = \{a,b,c,d,e,f,g,h\}$ considere a relação de ordem parcial $\preceq$ induzida pelo diagrama de Hasse abaixo, nos subconjuntos $\mathcal{R} = \{a,d,e,f\}$ e $\mathcal{S} = \{b,c,e\}$ e determine:

a. Os menores e maiores elementos;
b. Os elementos minimal e maximal;
c. As cotas inferiores e superiores;
d. O ínfimo e supremo;
e. Os conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são totalmente ordenado.
f. Os conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são bem ordenados.



Questão 5

Definição

Dado um conjunto não vazio $\mathcal{A}$, uma **ordem parcial** em $\mathcal{A}$ é uma relação binária $\preceq$ que satisfaz as propriedades:

OP_1 **Reflexiva:** $\boxed{x \preceq x, \forall x \in \mathcal{A}}$

OP_2 **Antissimétrica:** $\boxed{\text{Se } x \preceq y \text{ e } y \preceq x \text{ então } x = y}$

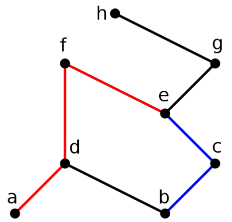
OP_3 **Transitiva:** $\boxed{\text{Se } x \preceq y \text{ e } y \preceq z \text{ então } x \preceq z}$

O conjunto $\mathcal{A}$, munido de uma ordem $\preceq$, é denotado por $\boxed{(\mathcal{A}, \preceq)}$ e é dito **parcialmente ordenado**.

Resposta da Questão 5.a

- Os menores e maiores elementos:

	Menor	Maior
$\mathcal{H}$	$\{\}$	$\{\}$
$\mathcal{R}$	$\{\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e\}$



Definição

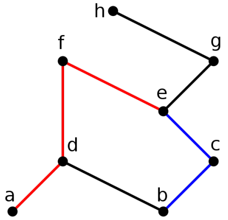
Sejam $(\mathcal{A}, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ não-vazio, $b \in \mathcal{B}$ é um:

- **menor elemento** (elemento mínimo ou primeiro elemento) de $\mathcal{B}$ se $b \preceq x$ para todo $x \in \mathcal{B}$
- **maior elemento** (elemento máximo ou último elemento) de $\mathcal{B}$ se $x \preceq b$ para todo $x \in \mathcal{B}$.

Resposta da Questão 5.b

- Os elementos minimal e maximal:

	Minimal	Maximal
$\mathcal{H}$	$\{a,b\}$	$\{f,h\}$
$\mathcal{R}$	$\{a,e\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e\}$



Definição

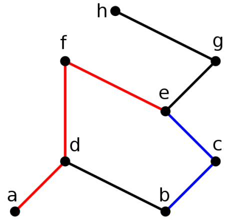
Sejam $(\mathcal{A}, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ não-vazio, $b \in \mathcal{B}$ é um:

- **elemento minimal** de $\mathcal{B}$ se não existir $x \in B$, tal que $x \preceq b$
- **elemento maximal** de $\mathcal{B}$ se não existir $x \in B$, tal que $b \preceq x$.

Resposta da Questão 5.c

- As cotas inferiores e superiores, ínfimo e supremo:

Cotas	Inferiores	Superiores
$\mathcal{H}$	$\{\}$	$\{\}$
$\mathcal{R}$	$\{\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e,f,g,h\}$



Definição

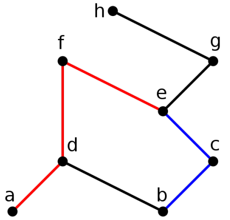
Sejam $(\mathcal{A},\preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{A}$, $a\in\mathcal{A}$ é uma:

- **cota Inferior** ou um **minorante** de $\mathcal{B}$ se $a\preceq x$, para todo $x\in\mathcal{B}$.
- **cota superior** ou um **majorante** de $\mathcal{B}$ se $x\preceq a$, para todo $x\in\mathcal{B}$.

Resposta da Questão 5.d

- d) O ínfimo e o supremo:

	Ínfimo	Supremo
$\mathcal{H}$	$\{\}$	$\{\}$
$\mathcal{R}$	$\{\}$	$\{f\}$
$\mathcal{S}$	$\{b\}$	$\{e\}$



Definição

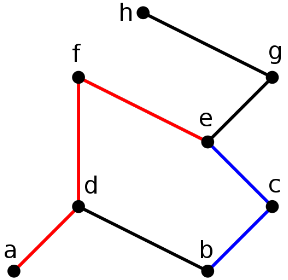
Sejam $(\mathcal{A}, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado e $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$, $a \in \mathcal{A}$ é o:

- **ínfimo** de B se ele for o maior elemento do conjunto das cotas inferiores de B
- **supremo** de B se ele for o menor elemento do conjunto das cotas superiores de B.

Resposta da Questão 5.e

- e) Os conjuntos $\mathcal{H}$, $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são **totalmente ordenados**?

  - $\mathcal{H}$ não é, pois f e h não são comparáveis;
  - $\mathcal{R}$ não é, pois d e e não são comparáveis;
  - $\mathcal{S}$ é pois $b \preceq c \preceq e$.



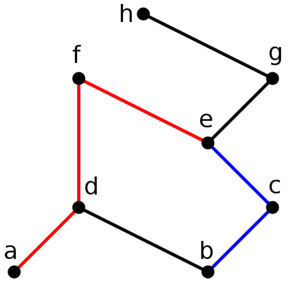
Definição

Uma relação de ordem parcial $\preceq$ em um conjunto não vazio $\mathcal{A}$ é chamada de **total** se, e somente se, dados $a, b \in \mathcal{A}$, ocorre $a \preceq b$ ou $b \preceq a$, isto é, dois elementos quaisquer sempre são comparáveis. Um conjunto $\mathcal{A}$ com ordem total é chamado de **totalmente ordenado**.

Resposta da Questão 5.f

f. Os conjuntos $\mathcal{H}$ $\mathcal{R}$ e $\mathcal{S}$ são **bem ordenados**?

- $\mathcal{H}$ não é, pois o subconjunto $\{f, h\}$ não possui um menor elemento;
- $\mathcal{R}$ não é, pois o subconjunto $\{d, e\}$ não possui um menor elemento;
- $\mathcal{S}$ é pois, qualquer subconjunto de $\mathcal{S}$ possui um menor elemento.



Definição

Um conjunto não vazio $\mathcal{A}$ é dito **bem ordenado** se, e somente se, todo subconjunto não vazio de $\mathcal{A}$ possui um menor elemento.

Dúvidas!!!

Prof. Sérgio

e-mails:

sergio.souza@academico.ufpb.br

sergio@mat.ufpb.br

Página do Professor:

mat.ufpb.br/sergio

Apresentação utilizando o Beamer/LaTeX