Matemática Elementar

Famílias Indexadas de Conjuntos

(Alguns Exemplos e Definições)

Prof. Dr. Sérgio de Albuquerque Souza

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

16 de maio de 2023

Exemplo 1

Consideremos a família indexada de conjuntos

$$\boxed{C_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq i\}}$$

com $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Vamos determinar as interseções e uniões finitas/infinitas desta família:

1. $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{10} C_j$
2. $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$
3. $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{10} C_j$
4. $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$

Construindo Cada Conjunto da Família C_n

$$C_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 1\} = \{1\}$$

$$C_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 2\} = \{1,2\}$$

$$C_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 3\} = \{1,2,3\}$$

$$C_4 = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 4\} = \{1,2,3,4\}$$

$$\vdots$$

$$C_{10} = \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$$

Observe que: $\boxed{C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \cdots \subset C_{10} \cdots}$

Construindo as Uniões Finitas da Família C_n

$$\bigcup_{j=1}^{2} C_j = C_1 \cup C_2 = \{1\} \cup \{1,2\} = \{1,2\} = C_2$$

$$\bigcup_{j=1}^{3} C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1\} \cup \{1,2\} \cup \{1,2,3\} = \{1,2,3\} = C_3$$

$$\bigcup_{j=1}^{4} C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = \{1,2,3,4\} = C_4$$

$$\vdots$$

$$\bigcup_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{10} = C_{10}$$

Construindo a União Infinita da Família C_n

Observe que a união infinita dos conjuntos desta família é o conjunto:

$$\boxed{\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \cdots = \{1, 2, 3, \ldots\} = \mathbb{N}}$$

Construindo as Interseções Finitas da Família C_n

$$\bigcap_{j=1}^{2} C_j = C_1 \cap C_2 = \{1\} \cap \{1,2\} = \{1\} = C_1$$

$$\bigcap_{j=1}^{3} C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{1\} \cap \{1,2\} \cap \{1,2,3\} = \{1\} = C_1$$

$$\bigcap_{j=1}^{4} C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \{1\} = C_1$$

$$\vdots$$

$$\bigcap_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6 \cap C_7 \cap C_8 \cap C_9 \cap C_{10} = C_1$$

Construindo a Interseção Infinita da Família C_n

Observe que a interseção infinita dos conjuntos desta família é o conjunto:

$$\boxed{\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \cdots = \{1\} = C_1}$$

Exemplo 2

Consideremos a família indexada de conjuntos

$$\boxed{D_i = \{n \in \mathbb{N} \mid n > i\}}$$

com $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Vamos determinar as interseções e uniões finitas/infinitas desta família:

1. $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{10} D_j$
2. $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$
3. $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{10} D_j$
4. $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty} D_j$

Construindo Cada Conjunto da Família D_n

$$D_1 = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 1\} = \{2, 3, 4 \ldots\}$$

$$D_2 = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 2\} = \{3, 4, 5, \ldots\}$$

$$D_3 = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 3\} = \{4, 5, 6, \ldots\}$$

$$D_4 = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 4\} = \{5, 6, 7, \ldots\}$$

$$\vdots$$

$$D_{10} = \{n \in \mathbb{N} \mid n > 10\} = \{11, 12, 13, \ldots\}$$

Observe que: $\boxed{D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset \cdots \supset D_{10} \supset \cdots}$

Construindo as Uniões Finitas da Família D_n

$$\bigcup_{j=1}^{2} D_j = D_1 \cup D_2 = D_1$$

$$\bigcup_{j=1}^{3} D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1$$

$$\bigcup_{j=1}^{4} D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 = D_1$$

$$\vdots$$

$$\bigcup_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8 \cup D_9 \cup D_{10} = D_1$$

Construindo a União Infinita da Família D_n

Observe que a união infinita dos conjuntos desta família D_n é o conjunto:

$$\boxed{\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \cdots = D_1}$$

Construindo as Interseções Finitas da Família D_n

$$\bigcap_{j=1}^{2} D_j = D_1 \cap D_2 = D_2$$

$$\bigcap_{j=1}^{3} D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = D_3$$

$$\bigcap_{j=1}^{2} D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = D_4$$

$$\vdots$$

$$\bigcap_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5 \cap D_6 \cap D_7 \cap D_8 \cap D_9 \cap D_{10} = D_{10}$$

Construindo a Interseção Infinita da Família D_n

Observe que a interseção infinita dos conjuntos desta família D_n é o conjunto:

$$\boxed{\bigcap_{j=1}^{\infty} D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap \cdots = \emptyset}$$

Exemplo 3

Consideremos a família indexada de conjuntos/intervalos

$$I_i = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq \frac{1}{i} \right\} = \left[0, \frac{1}{i} \right]$$

com $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$. Vamos determinar as interseções e uniões finitas/infinitas desta família:

1. $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{10} I_j$
2. $\displaystyle\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$
3. $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{10} I_j$
4. $\displaystyle\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$

Construindo Cada Intervalo da Família I_n

$$I_1 = \left[0, \frac{1}{1}\right] = [0, 1]$$

$$I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] = [0, 0.5]$$

$$I_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right] = [0, 0.333\ldots]$$

$$\vdots$$

$$I_{10} = \left[0, \frac{1}{10}\right] = [0, 0.1]$$

- Observe que: $\boxed{I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \cdots \supset I_{10} \supset \cdots}$

Construindo as Uniões Finitas da Família I_n

$$\bigcup_{j=1}^{2} I_j = I_1 \cup I_2 = I_1$$

$$\bigcup_{j=1}^{3} I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I_1$$

$$\bigcup_{j=1}^{4} I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = I_1$$

$$\vdots$$

$$\bigcup_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_8 \cup I_9 \cup I_{10} = I_1$$

Construindo a União Infinita da Família I_n

Observe que a união infinita dos intervalos desta família I_n é o conjunto:

$$\boxed{\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \cdots = I_1 = [0, 1]}$$

Construindo as Interseções Finitas da Família I_n

$$\bigcap_{j=1}^{2} I_j = I_1 \cap I_2 = I_2$$

$$\bigcap_{j=1}^{3} I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 = I_3$$

$$\bigcap_{j=1}^{4} I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 = I_4$$

$$\vdots$$

$$\bigcap_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap I_5 \cap I_6 \cap I_7 \cap I_8 \cap I_9 \cap I_{10} = I_{10}$$

Construindo a Interseção Infinita da Família I_n

Observe que a interseção infinita dos conjuntos desta família é o conjunto:

$$\boxed{\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \cdots = [0,0] = \{0\}}$$

Dúvidas!!!

Prof. Sérgio

e-mails:

sergio.souza@academico.ufpb.br

sergio@mat.ufpb.br

Página do Professor:

mat.ufpb.br/sergio

Apresentação utilizando o Beamer/LaTeX