Matemática Elementar

Conjunto Quociente e Classe de Equivalência

(Alguns Exemplos e Definições)

Prof. Dr. Sérgio de Albuquerque Souza

Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

16 de maio de 2023

Relação Binária

Definição: Relação Binária

Uma **relação binária** $\mathcal{R}$ entre elementos de um conjunto $\mathcal{A}$ com elementos de um conjunto $\mathcal{B}$, denotado por

$$\boxed{\mathcal{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{B}}$$

é um subconjunto do produto cartesiano $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$, ou seja,

$$\boxed{\mathcal{R} \subseteq \mathcal{A} \times \mathcal{B}}$$

Podemos representar um elemento $(x, y) \in \mathcal{R}$ como $x\,\mathcal{R}\,y$.

Relação de Equivalência

Definição: Relação de Equivalência

Uma relação binária $\mathcal{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ é chamada de **relação de equivalência** em $\mathcal{A}$ se satisfaz às propriedades:

RE1: **Reflexiva:** Se $\boxed{x \mathcal{R} x}$ para todo $x \in \mathcal{A}$

RE2: **Simétrica:** Se $\boxed{x \mathcal{R} y}$ então $\boxed{y \mathcal{R} x}$

RE3: **Transitiva:** Se $\boxed{x \mathcal{R} y}$ e $\boxed{y \mathcal{R} z}$ então $\boxed{x \mathcal{R} z}$

Classe de Equivalência

Definição: Classe de Equivalência

Dada uma relação de equivalência $\mathcal{R}$ em um conjunto $\mathcal{A}$, para cada $x \in \mathcal{A}$, o conjunto

$$\boxed{\bar{x} = [x] = \{a \in \mathcal{A} \mid a\,\mathcal{R}\,x\} \subset \mathcal{A}}$$

chamado de **classe de equivalência** do elemento x.

Conjunto Quociente

Definição: Conjunto Quociente

Dada uma relação de equivalência $\mathcal{R} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, o conjunto formado por todas as classes de equivalência (módulo $\mathcal{R}$) é denominado de **conjunto quociente** de $\mathcal{A}$ pela relação de equivalência $\mathcal{R}$ e denotado por:

$$\boxed{\mathcal{A}/\mathcal{R} = \{\bar{x} \mid x \in \mathcal{A}\}}$$

Obs.: A relação $\mathcal{R}$ dos exemplos 1 e 2 serão representadas pelo símbolo $\sim$.

Partição

Definição: Partição

Seja $\mathcal{A}$ um conjunto não vazio. Um conjunto $\mathbb{P} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{A})$ é uma **partição** do conjunto $\mathcal{A}$ se satisfaz as propriedades:

- P1: $X \neq \emptyset$ para todo $X \in \mathbb{P}$,
- P2: Quaisquer que sejam $X, Y \in \mathbb{P}$, se $X \neq Y$ então $X \cap Y = \emptyset$,
- P3: $\bigcup_{X \in \mathbb{P}} = \mathcal{A}$.

Projeção Canônica

Definição: Projeção Canônica

Seja $\mathcal{R}$ uma relação de equivalência em $\mathcal{A}$, a função

$$\boxed{\begin{array}{rcl} \pi : \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{A}/\mathcal{R} \\ x & \longmapsto & \bar{x} \end{array}}$$

dada por $\pi(a) = \overline{a}$, é chamada de **projeção canônica**.

Relação de Equivalência Induzida

Definição: Relação de Equivalência Induzida

Dada uma função $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, a relação $\mathcal{F}$ definida por:

$$\boxed{x \mathcal{F} y \iff f(x) = f(y)}$$

é chamada de **relação de equivalência induzida** por f e a função $F : \mathcal{A}/\mathcal{F} \to \mathcal{B}$, definida por $F(\bar{x}) = f(x)$ é injetiva.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{A} \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\pi"'] & \mathcal{B} \\
\mathcal{A}/\mathcal{F} \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

Exemplo 1

Vamos considerar o conjunto

$$\boxed{\mathcal{A} = \{\text{Todos os alunos de ME do EAD da UFPB}\}}$$

e que dois alunos $a_1, a_2 \in \mathcal{A}$ estão relacionados se pertencem a um mesmo polo $\mathbb{P}_i$, ou seja,

$$\boxed{a_1 \sim a_2 \Longleftrightarrow a_1, a_2 \in \mathbb{P}_i}$$

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{A}$?

Exemplo 1

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{A}$?

- $\boxed{a \sim a}$ (**reflexiva**?)

  Cada aluno a pertence a um polo $\mathbb{P}_i$.

  Logo a relação $\sim$ é **reflexiva**.

Exemplo 1

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{A}$?

- Se $\boxed{a_1 \sim a_2}$ então $\boxed{a_2 \sim a_1}$ (**simétrica**?)

  Se o aluno a_1 pertence ao mesmo polo $\mathbb{P}_i$ do aluno a_2 **então** o aluno a_2 pertence ao mesmo polo $\mathbb{P}_i$ do aluno a_1.

  Logo a relação $\sim$ é **simétrica**

Exemplo 1

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{A}$?

- Se $\boxed{a_1 \sim a_2}$ e $\boxed{a_2 \sim a_3}$ então $\boxed{a_1 \sim a_3}$ (**transitiva**?)

  Se o aluno a_1 pertence ao mesmo polo $\mathbb{P}_i$ do aluno a_2 **e** o aluno a_2 pertence ao mesmo polo $\mathbb{P}_i$ do aluno a_3 **então** o aluno a_1 pertence ao mesmo polo $\mathbb{P}_i$ do aluno a_3.

  Logo a relação $\sim$ é **transitiva**.

Exemplo 1

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathcal{A}$?

Sim, pois satisfaz as propriedades:

- **Reflexiva:** $\boxed{a \sim a}$
- **Simétrica:** $\boxed{a_1 \sim a_2} \Longrightarrow \boxed{a_2 \sim a_1}$
- **Transitiva:** $\boxed{a_1 \sim a_2}, \boxed{a_2 \sim a_3} \Longrightarrow \boxed{a_1 \sim a_3}$

Exemplo 1

O conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim$ é formado por subconjuntos de alunos de cada polo $\mathbb{P}_i$, ou seja,

$$\boxed{\mathcal{A}/\sim\; = \Big\{ \big\{\text{Alagoa Grande}\big\}, \ldots, \big\{\text{João Pessoa}\big\}, \ldots, \big\{\text{Taperoá}\big\} \Big\}}$$

Ex.: Se *Rafael* e *Beatriz* são do polo de *João Pessoa* $(\mathbb{P}_j)$ então fazem parte da mesma classe de equivalência:

$$\boxed{\overline{Rafael} = \overline{Beatriz} = \overline{aluno\ do\ polo\ \mathbb{P}_j} = \overline{P_j} = \cdots}$$

- Portanto para representar o polo de João Pessoa, qualquer aluno deste polo pode ser escolhido.

Exemplo 1

O conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim$ é uma **partição** de $\mathcal{A}$, pois:

$$\mathcal{A}/\sim \, = \left\{ \underbrace{\{\text{Alagoa Grande}\}}_{\overline{P_a}}, \ldots, \underbrace{\{\text{João Pessoa}\}}_{\overline{P_j}}, \ldots, \underbrace{\{\text{Taperoá}\}}_{\overline{P_t}} \right\}$$

P1: $\overline{P_n} \neq \emptyset$ para todo $\overline{P_n} \in \mathcal{A}/\sim$,

P2: Se $\overline{P_n} \neq \overline{P_i}$ então $\overline{P_n} \cap \overline{P_i} = \emptyset$,

P3: $\displaystyle\bigcup_{\overline{P_i} \in \mathcal{A}/\sim} = \mathcal{A}$.

Exemplo 2

Considere o conjunto dos números inteiros

$$\boxed{\mathcal{A} = \mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}}$$

e que dois números inteiros $a, b \in \mathbb{Z}$ estão relacionados se $a - b$ é múltiplo de 3, ou seja,

$$\boxed{a \sim b \Longleftrightarrow a - b = 3n \text{ (múltiplo de 3)}}$$

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$?

Exemplo 2

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$?

- $\boxed{a \sim a}$ (**reflexiva**?)

Se $a \in \mathcal{A}$ temos $\boxed{a - a = 0 = 3 \times 0}$ (múltiplo de 3)

Logo a relação $\sim$ é **reflexiva**.

Exemplo 2

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$?

- Se $\boxed{a \sim b}$ então $\boxed{b \sim a}$ (**simétrica**?)

  Se $\boxed{a - b = 3n}$ **então** $\boxed{b - a = 3(-n)}$ (múltiplo de 3).

  Logo a relação $\sim$ é **simétrica**.

Exemplo 2

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$?

- Se $\boxed{a \sim b}$ e $\boxed{b \sim c}$ então $\boxed{a \sim c}$ (**transitiva**?)

  Se $\boxed{a - b = 3n}$ **e** $\boxed{b - c = 3m}$ (múltiplos de 3) temos $(a-b)+(b-c) = 3n+3m$, **então** $\boxed{a - c = 3(n+m)}$ (múltiplo de 3).

  Logo a relação $\sim$ é **transitiva**.

Exemplo 2

A relação $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z}$?

Sim, pois satisfaz as propriedades:

- **Reflexiva:** $\boxed{a \sim a}$
- **Simétrica:** $\boxed{a_1 \sim a_2} \Longrightarrow \boxed{a_2 \sim a_1}$
- **Transitiva:** $\boxed{a_1 \sim a_2}, \boxed{a_2 \sim a_3} \Longrightarrow \boxed{a_1 \sim a_3}$

Exemplo 2

Lembre-se que o conjunto quociente $\mathcal{A}/\sim \,\equiv \mathbb{Z}/\sim$ é definido como:

$$\boxed{\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{n} \mid n \in \mathbb{Z}\}}$$

e sua as classes de equivalências como:

$$\boxed{\overline{n} = \{m \in \mathbb{Z} \mid n \sim m\} = \{m \in \mathbb{Z} \mid n - m \text{ múltiplo de } 3\}}$$

para cada inteiro $n \in \mathbb{Z}$.

Exemplo 2

Classes de equivalência para $\mathbb{Z}/\sim$:

$$\overline{0} = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$$

Pois a diferença $\boxed{n - 0 = n}$ é um múltiplo de 3 para qualquer elemento n de $\overline{0}$.

Logo:

$$\boxed{\overline{0} = \overline{3} = \overline{-3} = \cdots}$$

Exemplo 2

Classes de equivalência para $\mathbb{Z}/\sim$:

$$\overline{1} = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$$

Pois a diferença $\boxed{n-1}$ é um múltiplo de 3 para qualquer elemento n de $\overline{1}$.

Logo:

$$\boxed{\overline{1} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots}$$

Exemplo 2

Classes de equivalência para $\mathbb{Z}/\sim$:

$$\overline{2} = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$$

Pois a diferença $\boxed{n - 2}$ é um múltiplo de 3 para qualquer elemento n de $\overline{2}$.

Logo:

$$\boxed{\overline{2} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots}$$

Exemplo 2

Classes de equivalência para $\mathbb{Z}/\sim$:

- Observe que $\boxed{\overline{3} = \overline{0}}$, $\boxed{\overline{4} = \overline{1}}$, $\boxed{\overline{5} = \overline{2}}$, etc.
- Logo o conjunto quociente possui apenas 3 elementos da forma:

$$\boxed{\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}}$$

Exemplo 2

O conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim$ é uma **partição** de $\mathbb{Z}$?

$$\mathbb{Z}/\sim = \left\{ \underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}}, \underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}}, \underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}} \right\}$$

- **Sim**, $\mathbb{Z}/\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$ pois satisfaz as propriedades:

P1: Os subconjuntos $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;

P2: Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;

P3: A união dos subconjuntos $\overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} = \mathbb{Z}$.

Observações

- A relação de equivalência em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$\boxed{a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ é múltiplo de } n}$$

é chamado de **congruência módulo** n e indicada por:

$$\boxed{a \equiv b \, (mod \; n)}$$

(lê-se: a congruente a b módulo n)

Ex.: $22 \equiv 1 \, (mod \; 7)$, pois $22 - 1 = 21$ é múltiplo de 7.

Exemplo 3

Seja $\mathcal{A} = \{0,1,2,3,4,5\}$ e $f : \mathcal{A} \to \{1,2,3\}$ definida por:

$$f(0) = f(1) = 1$$
$$f(3) = f(4) = 2$$
$$f(5) = f(2) = 3$$

a. Determine a relação $\mathcal{F}$ induzida por f.
b. Escreva o conjunto quociente $\mathcal{A}/\mathcal{F}$.
c. Calcule $F(\bar{5})$ com $F : \mathcal{A}/\mathcal{F} \to \mathcal{B}$.

Exemplo 3.a

a) Determine a relação $\mathcal{F}$ induzida por f.

- A relação de equivalência $\mathcal{F}$ induzida por f é definida como:

$$\boxed{x\mathcal{F}y \Longleftrightarrow f(x)=f(y)}$$

- Logo:

$$\boxed{\mathcal{F}=\left\{\begin{array}{c}(0,0),(0,1),(1,0),(1,1),\\(3,3),(3,4),(4,4),(4,3),\\(2,2),(2,5),(5,5),(5,2)\end{array}\right\}}$$

Exemplo 3.b

- **b** Escreva o conjunto quociente $\mathcal{A}/\mathcal{F}$.

$$\overline{0} = \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{F}0\} = \{0,1\} = \overline{1}$$

$$\overline{2} = \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{F}2\} = \{2,5\} = \overline{5}$$

$$\overline{3} = \{x \in \mathcal{A} \mid x\mathcal{F}3\} = \{3,4\} = \overline{4}$$

Logo:

$$\boxed{\mathcal{A}/\mathcal{F} = \{\overline{0},\overline{2},\overline{3}\}}$$

Exemplo 3.c

- c. Calcule $F(\bar{5})$ com $F : \mathcal{A}/\mathcal{F} \to \mathcal{B}$.
  - A função projeção F é definida como:

$$\boxed{F(\bar{x}) = f(x)}$$

Logo:

$$\boxed{F(\bar{5}) = F(\bar{2}) = f(5) = f(2) = 3}$$

Observações

- Em $\mathbb{Z}$, a congruência módulo n nos dá

$$\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{n-1}\}$$

  que também será representado por $\mathbb{Z}_n$.
- Qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\mathbb{Z}_n$ possui exatamente n elementos.

Ex.: $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ do exemplo 2.

Dúvidas!!!

Prof. Sérgio

e-mails:

sergio.souza@academico.ufpb.br

sergio@mat.ufpb.br

Página do Professor:

mat.ufpb.br/sergio

Apresentação utilizando o Beamer/LaTeX