

# Famílias Indexadas de Conjuntos (Alguns Exemplos)

Matemática Elementar - EAD

Departamento de Matemática  
Universidade Federal da Paraíba

4 de setembro de 2014



# Exemplo 1

Consideremos a família indexada de conjuntos

$$C_i = \{n \in \mathbb{N} / n \leq i\}$$

onde  $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Vamos determinar a interseção e união finita/infinita desta família, ou seja, determinaremos:

1  $\bigcup_{j=1}^{10} C_j$

2  $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$

3  $\bigcap_{j=1}^{10} C_j$

4  $\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $C_1 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 1\} = \{1\}$
- $C_2 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 2\} = \{1, 2\}$
- $C_3 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- $C_4 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C_5 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\vdots$
- $C_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Observe que:  $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \cdots \subset C_{10} \cdots \subset C_i \subset \cdots$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $C_1 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 1\} = \{1\}$
- $C_2 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 2\} = \{1, 2\}$
- $C_3 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- $C_4 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C_5 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\vdots$
- $C_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Observe que:  $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \cdots \subset C_{10} \cdots \subset C_i \subset \cdots$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $C_1 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 1\} = \{1\}$
- $C_2 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 2\} = \{1, 2\}$
- $C_3 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- $C_4 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C_5 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\vdots$
- $C_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Observe que:  $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \cdots \subset C_{10} \cdots \subset C_i \subset \cdots$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $C_1 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 1\} = \{1\}$
- $C_2 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 2\} = \{1, 2\}$
- $C_3 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- $C_4 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C_5 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\vdots$
- $C_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Observe que:  $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \cdots \subset C_{10} \cdots \subset C_i \subset \cdots$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $C_1 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 1\} = \{1\}$
- $C_2 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 2\} = \{1, 2\}$
- $C_3 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- $C_4 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C_5 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\vdots$
- $C_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Observe que:  $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \cdots \subset C_{10} \cdots \subset C_i \subset \cdots$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $C_1 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 1\} = \{1\}$
- $C_2 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 2\} = \{1, 2\}$
- $C_3 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- $C_4 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C_5 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\vdots$
- $C_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Observe que:  $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \cdots \subset C_{10} \cdots \subset C_i \subset \cdots$



# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $C_1 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 1\} = \{1\}$
- $C_2 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 2\} = \{1, 2\}$
- $C_3 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 3\} = \{1, 2, 3\}$
- $C_4 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 4\} = \{1, 2, 3, 4\}$
- $C_5 = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
- $\vdots$
- $C_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n \leq 10\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
- Observe que:  $C_1 \subset C_2 \subset C_3 \subset C_4 \cdots \subset C_{10} \cdots \subset C_i \subset \cdots$

# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 C_j = C_1 \cup C_2 = \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} = C_2$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} = C_3$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = \{1, 2, 3, 4\} = C_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{10} = C_{10}$$



# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 C_j = C_1 \cup C_2 = \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} = C_2$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} = C_3$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = \{1, 2, 3, 4\} = C_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{10} = C_{10}$$

# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 C_j = C_1 \cup C_2 = \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} = C_2$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} = C_3$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = \{1, 2, 3, 4\} = C_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{10} = C_{10}$$



# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 C_j = C_1 \cup C_2 = \{1\} \cup \{1, 2\} = \{1, 2\} = C_2$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 = \{1\} \cup \{1, 2\} \cup \{1, 2, 3\} = \{1, 2, 3\} = C_3$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 = \{1, 2, 3, 4\} = C_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \cup C_5 \cup C_6 \cup C_7 \cup C_8 \cup C_9 \cup C_{10} = C_{10}$$

# Construindo a união infinita

Observe que a união infinita dos conjuntos desta família é o conjunto:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j = C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup \dots = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N}$$



# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 C_j = C_1 \cap C_2 = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} = C_1$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{1\} \cap \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1\} = C_1$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \{1\} = C_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6 \cap C_7 \cap C_8 \cap C_9 \cap C_{10} = C_1$$

# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 C_j = C_1 \cap C_2 = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} = C_1$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{1\} \cap \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1\} = C_1$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \{1\} = C_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6 \cap C_7 \cap C_8 \cap C_9 \cap C_{10} = C_1$$



# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 C_j = C_1 \cap C_2 = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} = C_1$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{1\} \cap \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1\} = C_1$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \{1\} = C_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6 \cap C_7 \cap C_8 \cap C_9 \cap C_{10} = C_1$$

# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 C_j = C_1 \cap C_2 = \{1\} \cap \{1, 2\} = \{1\} = C_1$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 = \{1\} \cap \{1, 2\} \cap \{1, 2, 3\} = \{1\} = C_1$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 = \{1\} = C_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap C_4 \cap C_5 \cap C_6 \cap C_7 \cap C_8 \cap C_9 \cap C_{10} = C_1$$

# Construindo a interseção infinita

Observe que a interseção infinita dos conjuntos desta família é o conjunto:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} C_j = C_1 \cap C_2 \cap C_3 \cap \cdots = \{1\} = C_1$$

## Exemplo 2

Consideremos a família indexada de conjuntos

$$D_i = \{n \in \mathbb{N} / n > i\}$$

onde  $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Vamos determinar a interseção e união finita/infinita desta família, ou seja, determinaremos:

1  $\bigcup_{j=1}^{10} D_j$

2  $\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j$

3  $\bigcap_{j=1}^{10} D_j$

4  $\bigcap_{j=1}^{\infty} D_j$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $D_1 = \{n \in \mathbb{N} / n > 1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$
- $D_2 = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\} = \{3, 4, 5, \dots\}$
- $D_3 = \{n \in \mathbb{N} / n > 3\} = \{4, 5, 6, \dots\}$
- $D_4 = \{n \in \mathbb{N} / n > 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$
- $D_5 = \{n \in \mathbb{N} / n > 5\} = \{6, 7, 8, \dots\}$
- $\vdots$
- $D_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n > 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$
- Observe que:  $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset \dots \supset D_{10} \supset \dots \supset D_i \supset \dots$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $D_1 = \{n \in \mathbb{N} / n > 1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$
- $D_2 = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\} = \{3, 4, 5, \dots\}$
- $D_3 = \{n \in \mathbb{N} / n > 3\} = \{4, 5, 6, \dots\}$
- $D_4 = \{n \in \mathbb{N} / n > 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$
- $D_5 = \{n \in \mathbb{N} / n > 5\} = \{6, 7, 8, \dots\}$
- $\vdots$
- $D_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n > 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$
- Observe que:  $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset \dots \supset D_{10} \supset \dots \supset D_i \supset \dots$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $D_1 = \{n \in \mathbb{N} / n > 1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$
- $D_2 = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\} = \{3, 4, 5, \dots\}$
- $D_3 = \{n \in \mathbb{N} / n > 3\} = \{4, 5, 6, \dots\}$
- $D_4 = \{n \in \mathbb{N} / n > 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$
- $D_5 = \{n \in \mathbb{N} / n > 5\} = \{6, 7, 8, \dots\}$
- $\vdots$
- $D_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n > 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$
- Observe que:  $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset \dots \supset D_{10} \supset \dots \supset D_i \supset \dots$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $D_1 = \{n \in \mathbb{N} / n > 1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$
- $D_2 = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\} = \{3, 4, 5, \dots\}$
- $D_3 = \{n \in \mathbb{N} / n > 3\} = \{4, 5, 6, \dots\}$
- $D_4 = \{n \in \mathbb{N} / n > 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$
- $D_5 = \{n \in \mathbb{N} / n > 5\} = \{6, 7, 8, \dots\}$
- $\vdots$
- $D_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n > 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$
- Observe que:  $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset \dots \supset D_{10} \supset \dots \supset D_i \supset \dots$



# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $D_1 = \{n \in \mathbb{N} / n > 1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$
- $D_2 = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\} = \{3, 4, 5, \dots\}$
- $D_3 = \{n \in \mathbb{N} / n > 3\} = \{4, 5, 6, \dots\}$
- $D_4 = \{n \in \mathbb{N} / n > 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$
- $D_5 = \{n \in \mathbb{N} / n > 5\} = \{6, 7, 8, \dots\}$
- $\vdots$
- $D_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n > 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$
- Observe que:  $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset \dots \supset D_{10} \supset \dots \supset D_i \supset \dots$

# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $D_1 = \{n \in \mathbb{N} / n > 1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$

- $D_2 = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\} = \{3, 4, 5, \dots\}$

- $D_3 = \{n \in \mathbb{N} / n > 3\} = \{4, 5, 6, \dots\}$

- $D_4 = \{n \in \mathbb{N} / n > 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$

- $D_5 = \{n \in \mathbb{N} / n > 5\} = \{6, 7, 8, \dots\}$

⋮

- $D_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n > 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$

- Observe que:  $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset \dots \supset D_{10} \supset \dots \supset D_i \supset \dots$



# Construindo e entendendo cada conjunto da família

Vamos construir alguns conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $D_1 = \{n \in \mathbb{N} / n > 1\} = \{2, 3, 4, \dots\}$
- $D_2 = \{n \in \mathbb{N} / n > 2\} = \{3, 4, 5, \dots\}$
- $D_3 = \{n \in \mathbb{N} / n > 3\} = \{4, 5, 6, \dots\}$
- $D_4 = \{n \in \mathbb{N} / n > 4\} = \{5, 6, 7, \dots\}$
- $D_5 = \{n \in \mathbb{N} / n > 5\} = \{6, 7, 8, \dots\}$
- $\vdots$
- $D_{10} = \{n \in \mathbb{N} / n > 10\} = \{11, 12, 13, \dots\}$
- Observe que:  $D_1 \supset D_2 \supset D_3 \supset D_4 \supset \dots \supset D_{10} \supset \dots \supset D_i \supset \dots$

# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 D_j = D_1 \cup D_2 = D_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 = D_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8 \cup D_9 \cup D_{10} = D_1$$

# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 D_j = D_1 \cup D_2 = D_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 = D_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8 \cup D_9 \cup D_{10} = D_1$$

# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 D_j = D_1 \cup D_2 = D_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 = D_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8 \cup D_9 \cup D_{10} = D_1$$



# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 D_j = D_1 \cup D_2 = D_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 = D_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 = D_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4 \cup D_5 \cup D_6 \cup D_7 \cup D_8 \cup D_9 \cup D_{10} = D_1$$

# Construindo a união infinita

Observe que a união infinita dos conjuntos desta família é o conjunto:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} D_j = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \cdots = D_1$$



# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $\bigcap_{j=1}^2 D_j = D_1 \cap D_2 = D_2$

- $\bigcap_{j=1}^3 D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = D_3$

- $\bigcap_{j=1}^4 D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = D_4$

⋮

- $\bigcap_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5 \cap D_6 \cap D_7 \cap D_8 \cap D_9 \cap D_{10} = D_{10}$

# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 D_j = D_1 \cap D_2 = D_2$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = D_3$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = D_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5 \cap D_6 \cap D_7 \cap D_8 \cap D_9 \cap D_{10} = D_{10}$$

# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 D_j = D_1 \cap D_2 = D_2$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = D_3$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = D_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5 \cap D_6 \cap D_7 \cap D_8 \cap D_9 \cap D_{10} = D_{10}$$

# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 D_j = D_1 \cap D_2 = D_2$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 = D_3$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 = D_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5 \cap D_6 \cap D_7 \cap D_8 \cap D_9 \cap D_{10} = D_{10}$$

# Construindo a interseção infinita

Observe que a interseção infinita dos conjuntos desta família é o conjunto:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} D_j = D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap \cdots = \emptyset$$

# Exemplo 3

Consideremos a família indexada de conjuntos/intervalos

$$I_i = \left\{ x \in \mathbb{R} / 0 \leq x \leq \frac{1}{i} \right\} = \left[ 0, \frac{1}{i} \right]$$

onde  $i \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

Vamos determinar a interseção e união finita/infinita desta família, ou seja, determinaremos:

1  $\bigcup_{j=1}^{10} I_j$

2  $\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j$

3  $\bigcap_{j=1}^{10} I_j$

4  $\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j$

# Construindo e entendendo cada intervalo da família

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[0, \frac{1}{1}\right] = [0, 1]$

- $I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] = [0, 0.5]$

- $I_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right] = [0, 0.333\dots]$

⋮

- $I_{10} = \left[0, \frac{1}{10}\right] = [0, 0.1]$

- Observe que:  $I_1$  contém todos os outros intervalos da família, ou seja,  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_{10} \supset I_i \supset \dots$

# Construindo e entendendo cada intervalo da família

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[0, \frac{1}{1}\right] = [0, 1]$

- $I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] = [0, 0.5]$

- $I_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right] = [0, 0.333\dots]$

⋮

- $I_{10} = \left[0, \frac{1}{10}\right] = [0, 0.1]$

- Observe que:  $I_1$  contém todos os outros intervalos da família, ou seja,  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_{10} \supset I_i \supset \dots$



# Construindo e entendendo cada intervalo da família

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[0, \frac{1}{1}\right] = [0, 1]$

- $I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] = [0, 0.5]$

- $I_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right] = [0, 0.333\dots]$

⋮

- $I_{10} = \left[0, \frac{1}{10}\right] = [0, 0.1]$

- Observe que:  $I_1$  contém todos os outros intervalos da família, ou seja,  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_{10} \supset I_i \supset \dots$

# Construindo e entendendo cada intervalo da família

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[0, \frac{1}{1}\right] = [0, 1]$

- $I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] = [0, 0.5]$

- $I_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right] = [0, 0.333\dots]$

⋮

- $I_{10} = \left[0, \frac{1}{10}\right] = [0, 0.1]$

- Observe que:  $I_1$  contém todos os outros intervalos da família, ou seja,  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_{10} \supset I_i \supset \dots$

# Construindo e entendendo cada intervalo da família

Vamos construir alguns intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

- $I_1 = \left[0, \frac{1}{1}\right] = [0, 1]$

- $I_2 = \left[0, \frac{1}{2}\right] = [0, 0.5]$

- $I_3 = \left[0, \frac{1}{3}\right] = [0, 0.333\dots]$

⋮

- $I_{10} = \left[0, \frac{1}{10}\right] = [0, 0.1]$

- Observe que:  $I_1$  contém todos os outros intervalos da família, ou seja,  $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_{10} \supset I_i \supset \dots$

# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 I_j = I_1 \cup I_2 = I_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = I_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_8 \cup I_9 \cup I_{10} = I_1$$

# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 I_j = I_1 \cup I_2 = I_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = I_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_8 \cup I_9 \cup I_{10} = I_1$$

# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 I_j = I_1 \cup I_2 = I_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = I_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_8 \cup I_9 \cup I_{10} = I_1$$



# Construindo as uniões finitas

Vamos construir as uniões finitas dos conjuntos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcup_{j=1}^2 I_j = I_1 \cup I_2 = I_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^3 I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 = I_1$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^4 I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 = I_1$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcup_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup I_4 \cup I_5 \cup I_6 \cup I_7 \cup I_8 \cup I_9 \cup I_{10} = I_1$$

# Construindo a união infinita

Observe que a união infinita dos intervalos desta família é o conjunto:

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} I_j = I_1 \cup I_2 \cup I_3 \cup \cdots = I_1 = [0, 1]$$



# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 I_j = I_1 \cap I_2 = I_2$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 = I_3$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 = I_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap I_5 \cap I_6 \cap I_7 \cap I_8 \cap I_9 \cap I_{10} = I_{10}$$

# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 I_j = I_1 \cap I_2 = I_2$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 = I_3$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 = I_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap I_5 \cap I_6 \cap I_7 \cap I_8 \cap I_9 \cap I_{10} = I_{10}$$

# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 I_j = I_1 \cap I_2 = I_2$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 = I_3$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 = I_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap I_5 \cap I_6 \cap I_7 \cap I_8 \cap I_9 \cap I_{10} = I_{10}$$

# Construindo as interseções finitas

Vamos construir as interseções finitas dos intervalos desta família e tentar entender o que está ocorrendo:

$$\bullet \bigcap_{j=1}^2 I_j = I_1 \cap I_2 = I_2$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^3 I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 = I_3$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^4 I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 = I_4$$

$$\vdots$$

$$\bullet \bigcap_{j=1}^{10} I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap I_4 \cap I_5 \cap I_6 \cap I_7 \cap I_8 \cap I_9 \cap I_{10} = I_{10}$$

# Construindo a interseção infinita

Observe que a interseção infinita dos conjuntos desta família é o conjunto:

$$\bigcap_{j=1}^{\infty} I_j = I_1 \cap I_2 \cap I_3 \cap \cdots = [0, 0] = \{0\}$$