Conjunto Quociente e Classe de Equivalência
(Alguns Exemplos e Definições)

Matemática Elementar - EAD

Departamento de Matemática
Universidade Federal da Paraíba

4 de setembro de 2014

Exemplo 1

Vamos considerar o conjunto

$$A = \{\text{todos os alunos de ME do EAD da UFPB}\}$$

e que dois alunos a_1 e a_2 estão relacionados se pertencem a um mesmo polo P, ou seja,

$$a_1 \sim a_2 \iff a_1, a_2 \in P$$

Exemplo 1

Observem que a relação “pertencer a um mesmo polo” é uma **relação de equivalência** no conjunto A, pois:

- $a \sim a$ (é **reflexiva**)
  Pois cada aluno pertence a um polo

- Se $a_1 \sim a_2$ então $a_2 \sim a_1$ (é **simétrica**)
  Pois se a_1 pertence ao mesmo polo de a_2 então a_2 pertence ao mesmo polo de a_1

- Se $a_1 \sim a_2$ e $a_2 \sim a_3$ então $a_1 \sim a_3$ (é **transitiva**)
  Pois se a_1 pertence ao mesmo polo de a_2 e a_2 pertence ao mesmo polo de a_3 então a_1 pertence ao mesmo polo de a_3.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 1

Observem que a relação “pertencer a um mesmo polo” é uma **relação de equivalência** no conjunto A, pois:

- $a \sim a$ (é **reflexiva**)
  Pois cada aluno pertence a um polo

- Se $a_1 \sim a_2$ então $a_2 \sim a_1$ (é **simétrica**)
  Pois se a_1 pertence ao mesmo polo de a_2 então a_2 pertence ao mesmo polo de a_1

- Se $a_1 \sim a_2$ e $a_2 \sim a_3$ então $a_1 \sim a_3$ (é **transitiva**)
  Pois se a_1 pertence ao mesmo polo de a_2 e a_2 pertence ao mesmo polo de a_3 então a_1 pertence ao mesmo polo de a_3.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 1

Observem que a relação "pertencer a um mesmo polo" é uma **relação de equivalência** no conjunto A, pois:

- $a \sim a$ (é **reflexiva**)
  Pois cada aluno pertence a um polo

- Se $a_1 \sim a_2$ então $a_2 \sim a_1$ (é **simétrica**)
  Pois se a_1 pertence ao mesmo polo de a_2 então a_2 pertence ao mesmo polo de a_1

- Se $a_1 \sim a_2$ e $a_2 \sim a_3$ então $a_1 \sim a_3$ (é **transitiva**)
  Pois se a_1 pertence ao mesmo polo de a_2 e a_2 pertence ao mesmo polo de a_3 então a_1 pertence ao mesmo polo de a_3.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 1

Logo o conjunto quociente $A/\sim$ é formado de subconjuntos de alunos de cada polo, ou seja,

$$A/\sim = \{\{\text{Alagoa Grande}\} \ldots, \{\text{Cuité de Mamanguape}\}, \ldots, \{\text{Taperoá}\}\}$$

Vamos supor, por exemplo, que *Rafael* e *Beatriz* sejam do polo de Cuité de Mamanguape, logo fazem parte da mesma classe de equivalência, pois pertencem a um mesmo polo.
Em notação matemática:

$$\overline{Rafael} = \overline{Beatriz} = \overline{outro\ aluno\ do\ polo} = \ldots$$

Portanto para representar o polo de Cuité de Mamanguape, qualquer aluno deste polo pode ser escolhido.

Exemplo 2

Considere $\mathcal{A} = \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ (conjunto dos números inteiros) e a relação $\sim$ de $\mathcal{A} \times \mathcal{A}$, definida por:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ é múltiplo de } 3$$

Exemplo 2

1. Observe que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   De fato:
   - $\sim$ é uma relação **reflexiva**
     Pois temos que $a - a = 0 = 3 \times 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, logo $a \sim a$.
   - $\sim$ é uma relação **simétrica**
     Pois temos que se $a - b = 3n$ então $b - a = 3(-m)$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, logo $b \sim a$ se, e somente se $a \sim b$
   - $\sim$ é uma relação **transitiva**
     Pois se $a \sim b$ e $b \sim c$, então temos que $a - b = 3n$ e $b - c = 3m$ logo $a - b + (b - c) = 3n + 3m$ e portanto $a - c = 3(n + m)$ ou seja $a - c$ é múltiplo de 3, logo $a \sim c$.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

1. Observe que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   De fato:
   - $\sim$ é uma relação **reflexiva**
     Pois temos que $a - a = 0 = 3 \times 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, logo $a \sim a$.
   - $\sim$ é uma relação **simétrica**
     Pois temos que se $a - b = 3n$ então $b - a = 3(-m)$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, logo $b \sim a$ se, e somente se $a \sim b$
   - $\sim$ é uma relação **transitiva**
     Pois se $a \sim b$ e $b \sim c$, então temos que $a - b = 3n$ e $b - c = 3m$ logo $a - b + (b - c) = 3n + 3m$ e portanto $a - c = 3(n + m)$ ou seja $a - c$ é múltiplo de 3, logo $a \sim c$.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

1. Observe que $\sim$ é uma relação de equivalência em $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.
   De fato:

   - $\sim$ é uma relação **reflexiva**
     Pois temos que $a - a = 0 = 3 \times 0$ para todo $a \in \mathbb{Z}$, logo $a \sim a$.

   - $\sim$ é uma relação **simétrica**
     Pois temos que se $a - b = 3n$ então $b - a = 3(-m)$ para todo $a, b \in \mathbb{Z}$, logo $b \sim a$ se, e somente se $a \sim b$

   - $\sim$ é uma relação **transitiva**
     Pois se $a \sim b$ e $b \sim c$, então temos que $a - b = 3n$ e $b - c = 3m$ logo $a - b + (b - c) = 3n + 3m$ e portanto $a - c = 3(n + m)$ ou seja $a - c$ é múltiplo de 3, logo $a \sim c$.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

② Vamos agora, determinar os elementos do conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{m}/m \in \mathbb{Z}\}$ e as classes de equivalência, para cada inteiro m:

- Elementos de $\overline{0}$ são: $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 0 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{0} = \overline{3} = \overline{-3} = \cdots = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
- Elementos de $\overline{1}$ são: $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 1 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{1} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
- Elementos de $\overline{2}$ são: $\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 2 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{2} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
- Observe que: $\overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} = \overline{1}$, $\overline{5} = \overline{2}$, etc.
- Logo $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ possui apenas 3 elementos.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

② Vamos agora, determinar os elementos do conjunto quociente $\mathbb{Z}/\!\sim = \{\overline{m}/m \in \mathbb{Z}\}$ e as classes de equivalência, para cada inteiro m:

- Elementos de $\overline{0}$ são: $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 0 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{0} = \overline{3} = \overline{-3} = \cdots = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
- Elementos de $\overline{1}$ são: $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 1 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{1} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
- Elementos de $\overline{2}$ são: $\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 2 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{2} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
- Observe que: $\overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} = \overline{1}$, $\overline{5} = \overline{2}$, etc.
- Logo $\mathbb{Z}/\!\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ possui apenas 3 elementos.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

② Vamos agora, determinar os elementos do conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{m}/m \in \mathbb{Z}\}$ e as classes de equivalência, para cada inteiro m:

- Elementos de $\overline{0}$ são: $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 0 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{0} = \overline{3} = \overline{-3} = \cdots = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
- Elementos de $\overline{1}$ são: $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 1 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{1} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
- Elementos de $\overline{2}$ são: $\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 2 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{2} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
- Observe que: $\overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} = \overline{1}$, $\overline{5} = \overline{2}$, etc.
- Logo $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ possui apenas 3 elementos.

Exemplo 2

② Vamos agora, determinar os elementos do conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{m}/m \in \mathbb{Z}\}$ e as classes de equivalência, para cada inteiro m:

- Elementos de $\overline{0}$ são: $\{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 0 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{0} = \overline{3} = \overline{-3} = \cdots = \{\ldots, -6, -3, 0, 3, 6, \ldots\}$
- Elementos de $\overline{1}$ são: $\{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 1 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{1} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots = \{\ldots, -5, -2, 1, 4, 7, \ldots\}$
- Elementos de $\overline{2}$ são: $\{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
  Pois a diferença entre 2 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{2} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots = \{\ldots, -4, -1, 2, 5, 8, \ldots\}$
- Observe que: $\overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} = \overline{1}$, $\overline{5} = \overline{2}$, etc.
- Logo $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ possui apenas 3 elementos.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

② Vamos agora, determinar os elementos do conjunto quociente $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{m}/m \in \mathbb{Z}\}$ e as classes de equivalência, para cada inteiro m:

- Elementos de $\overline{0}$ são: $\{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$
  Pois a diferença entre 0 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{0} = \overline{3} = \overline{-3} = \cdots = \{\dots, -6, -3, 0, 3, 6, \dots\}$
- Elementos de $\overline{1}$ são: $\{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$
  Pois a diferença entre 1 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{1} = \overline{4} = \overline{-2} = \cdots = \{\dots, -5, -2, 1, 4, 7, \dots\}$
- Elementos de $\overline{2}$ são: $\{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$
  Pois a diferença entre 2 e qualquer um dos elementos deste conjunto é múltiplo de 3.
  Logo $\overline{2} = \overline{5} = \overline{-1} = \cdots = \{\dots, -4, -1, 2, 5, 8, \dots\}$
- Observe que: $\overline{3} = \overline{0}$, $\overline{4} = \overline{1}$, $\overline{5} = \overline{2}$, etc.
- Logo $\mathbb{Z}/\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ possui apenas 3 elementos.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

② Aproveitando este exemplo, vamos verificar que $\mathbb{Z}/\!\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

- Temos que:
  $$\mathbb{Z}/\!\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$
  é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathbb{Z}$;
- Os subconjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;
- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;
- A união dos subconjuntos $\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}=\mathbb{Z}$;
- Logo $\mathbb{Z}/\!\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

② Aproveitando este exemplo, vamos verificar que $\mathbb{Z}/\!\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

- Temos que:

  $$\mathbb{Z}/\!\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$

  é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathbb{Z}$;

- Os subconjuntos $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;

- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0}, \overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;

- A união dos subconjuntos $\overline{0} \cup \overline{1} \cup \overline{2} = \mathbb{Z}$;

- Logo $\mathbb{Z}/\!\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

② Aproveitando este exemplo, vamos verificar que $\mathbb{Z}/\!\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

- Temos que:
  $$\mathbb{Z}/\!\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$
  é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathbb{Z}$;
- Os subconjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;
- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;
- A união dos subconjuntos $\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}=\mathbb{Z}$;
- Logo $\mathbb{Z}/\!\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

② Aproveitando este exemplo, vamos verificar que $\mathbb{Z}/\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

- Temos que:
  $$\mathbb{Z}/\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$
  é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathbb{Z}$;
- Os subconjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;
- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;
- A união dos subconjuntos $\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}=\mathbb{Z}$;
- Logo $\mathbb{Z}/\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

UFPBVIRTUAL

Exemplo 2

② Aproveitando este exemplo, vamos verificar que $\mathbb{Z}/\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

- Temos que:
  $$\mathbb{Z}/\sim = \{\underbrace{\{\ldots,-3,0,3,\ldots\}}_{\overline{0}},\underbrace{\{\ldots,-2,1,4,\ldots\}}_{\overline{1}},\underbrace{\{\ldots,-1,2,5,\ldots\}}_{\overline{2}}\}$$
  é um conjunto formado de 3 subconjuntos de $\mathbb{Z}$;
- Os subconjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ são não vazios;
- Qualquer interseção entre os conjuntos $\overline{0},\overline{1}$ e $\overline{2}$ é vazio;
- A união dos subconjuntos $\overline{0}\cup\overline{1}\cup\overline{2}=\mathbb{Z}$;
- Logo $\mathbb{Z}/\sim$ é uma partição de $\mathbb{Z}$.

Observações

- A relação de equivalência em $\mathbb{Z}$, definida por:
$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ é múltiplo de } n$$
recebe o nome de **congruência módulo** n e é indicada por
$$a \equiv b(mod\ n)$$
(lê-se: a congruente a b módulo n)

Exemplo: $22 \equiv 1\,(mod\ 7)$, pois $22 - 1 = 21$ é múltiplo de 7.

- Em $\mathbb{Z}$, a congruência módulo n nos dá
$$\mathbb{Z}/\!\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{p-1}\}$$
que também será representado por $\mathbb{Z}_n$. Qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\mathbb{Z}_n$ possui exatamente n elementos.

Exemplo: $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/\!\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ do exemplo 2.

UFPBVIRTUAL

Observações

- A relação de equivalência em $\mathbb{Z}$, definida por:

$$a \sim b \Leftrightarrow a - b \text{ é múltiplo de } n$$

recebe o nome de **congruência módulo** n e é indicada por

$$a \equiv b(mod\ n)$$

(lê-se: *a* congruente a *b* módulo *n*)

Exemplo: $22 \equiv 1\,(mod\ 7)$, pois $22 - 1 = 21$ é múltiplo de 7.

- Em $\mathbb{Z}$, a congruência módulo n nos dá

$$\mathbb{Z}/\!\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \ldots, \overline{p-1}\}$$

que também será representado por $\mathbb{Z}_n$. Qualquer que seja $n \in \mathbb{Z}$, temos que $\mathbb{Z}_n$ possui exatamente n elementos.

Exemplo: $\mathbb{Z}_3 = \mathbb{Z}/\!\sim = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}\}$ do exemplo 2.

UFPBVIRTUAL

Relação Binária

Definição

Uma **relação binária** $\mathcal{R}$ entre os elementos de um conjunto A com os elementos de um conjunto B ($\mathcal{R} : A \to B$) é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$. Quando $(x, y) \in$R$, escrevemos x \mathcal{R} y$.

Relação de Equivalência

Definição

Seja A um conjunto não vazio. Uma relação binária $\mathcal{R} : A \to A$ que satisfaz às seguintes propriedades é chamada **relação de equivalência** em A:

- $x \mathcal{R} x, \forall x \in A$ ($\mathcal{R}$ é **reflexiva**)
- Se $x \mathcal{R} y$ então $y \mathcal{R} x$ ($\mathcal{R}$ é **simétrica**)
- Se $x \mathcal{R} y$ e $y \mathcal{R} z$ então $x \mathcal{R} z$ ($\mathcal{R}$ é **transitiva**)

Classe de Equivalência

Definição

Dada uma relação de equivalência $\sim$ em um conjunto A, para cada $x \in A$, consideremos o conjunto

$$\overline{x} = \{a \in A / a \sim x\} \subset A$$

Este subconjunto $\overline{x}$ de A é chamado de **classe de equivalência** de x (módulo $\sim$).

UFPBVIRTUAL

Conjunto Quociente

Definição

Dada uma relação de equivalência $\sim$ em A, o conjunto de todas as classes de equivalência (módulo $\sim$) é chamado de **conjunto quociente** de A pela relação de equivalência $\sim$ e denotamos tal conjunto por $A/\sim$.

Em símbolos: $$A/\sim = \{\overline{x} / x \in A\}$$

UFPBVIRTUAL