Matemática Aplicada à Tecnologia

(Notas de Aula)

Sérgio de Albuquerque Souza

Ver: 5 de fevereiro de 2016

Sumário

1 — Funções

1.1 Relações

Definição 1.1 Dados dois conjuntos A e B não vazios, definimos o **produto cartesiano**[a] entre A e B, denotado por $A \times B$, como o conjunto de todos os pares ordenados da forma (x,y) onde x pertence ao primeiro conjunto A e y pertence ao segundo conjunto B, ou seja

$$A \times B = \{(x,y) \ / \ x \in A \text{ e } y \in B\}$$

[a] Plano Cartesiano e Produto Cartesiano são homenagens ao seu criador René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês. O nome de Descartes em Latim, era *Cartesius*, daí vem o nome cartesiano.

Observação 1.1. *Em relação ao produto cartesianos temos:*

- *$A \times B \neq B \times A$, se A é não vazio ou B é não vazio e $A \neq B$.*
- *Se $A = \{\}$ ou $B = \{\}$, por definição: $A \times \{\} = \{\} = \{\} \times B$.*
- *Se A possuir n elementos e B possuir m elementos, então $A \times B$ possui $n \times m$ elementos.*
- *$A \times A$ é representado por A^2.*

■ **Exemplo 1.1** Dados $A = \{a,b,c,d,e\}$ e $B = \{1,2,3,4\}$, o produto cartesiano:

- $A \times B$ é um conjunto formado por $5 \times 4 = 20$ pares ordenados:

$$A \times B = \left\{ \begin{matrix} (a,1), & (a,2), & (a,3), & (a,4), \\ (b,1), & (b,2), & (b,3), & (b,4), \\ (c,1), & (c,2), & (c,3), & (c,4), \\ (d,1), & (d,2), & (d,3), & (d,4), \\ (e,1), & (e,2), & (e,3), & (e,4) \end{matrix} \right\}$$

- $B \times A$ é um conjunto formado por $4 \times 5 = 20$ pares ordenados:

$$B \times A = \left\{ \begin{matrix} (1,a), & (1,b), & (1,c), & (1,d), & (1,e), \\ (2,a), & (2,b), & (2,c), & (2,d), & (2,e), \\ (3,a), & (3,b), & (3,c), & (3,d), & (3,e), \\ (4,a), & (4,b), & (4,c), & (4,d), & (4,e) \end{matrix} \right\}$$

- B^2 é um conjunto formado por $4 \times 4 = 16$ pares ordenados:

$$b^2 = B \times A = \begin{Bmatrix} (1,1), & (1,2), & (1,3), & (1,4), \\ (2,1), & (2,2), & (2,3), & (2,3), \\ (3,1), & (3,2), & (3,3), & (3,4), \\ (4,1), & (4,2), & (4,3), & (4,4) \end{Bmatrix}$$

■

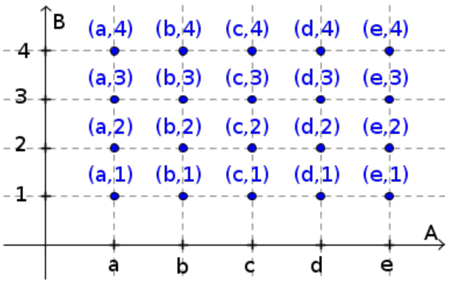


Figura 1.1: Representação gráfica do Produto Cartesiano $A \times B$, do exemplo 1.1.

Definição 1.2 Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma **relação** $\mathscr{R}$ de A em B é qualquer subconjunto do produto cartesiano $A \times B$, ou seja, $\mathscr{R} \subseteq A \times B$.

■ **Exemplo 1.2** Consideres as relações abaixo entre os conjuntos A e B, do exemplo 1.1:

a) $\mathscr{R}_1 = \{(a,3),(b,3),(c,2),(c,3),(d,2),(d,3),(e,4)\}$

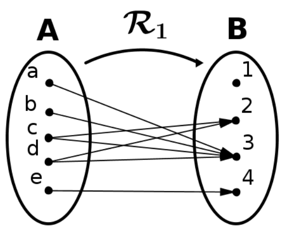


Figura 1.2: Representação da relação $\mathscr{R}_1$ usando diagrama de Venn, do exemplo 1.2

b) $\mathscr{R}_2 = \{(a,1),(b,1),(c,1),(d,1),(e,1)\}$
c) $\mathscr{R}_3 = \{(a,1),(a,2),(a,3),(a,4)\}$
d) $\mathscr{R}_4 = A \times B$

■

Obs *Uma relação $\mathscr{R}$ de A em B pode ser denotada por $\mathscr{R} : A \to B$. Denotaremos também que $(x,y) \in \mathscr{R}$ por $x\mathscr{R}y$, ou seja, x está relacionado com y pela relação $\mathscr{R}$.*

■ **Exemplo 1.3** Sejam $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, uma relação entre esses dois conjuntos, também podem ser definidos por regras, como nas relações abaixo:

a) $\mathscr{R}_1 = \{(x,y) \in A \times B \mid x = y\} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$
b) $\mathscr{R}_2 = \{(x,y) \in A \times B \mid x = 2y\} = \{(2,1),(4,2)\}$
c) $\mathscr{R}_3 = \{(x,y) \in A \times B \mid 2x = y\} = \{(1,2),(2,4),(3,6),(4,8),(5,10)\}$
d) $\mathscr{R}_4 = \{(x,y) \in A \times B \mid x^2 = y\} = \{(1,1),(2,4),(3,9)\}$
e) $\mathscr{R}_5 = \{(x,y) \in A \times B \mid x = y^2\} = \{(1,1),(4,2)\}$
f) $\mathscr{R}_6 = \{(x,y) \in B \times B \mid x = y^2\} = \{(0,0),(1,1),(4,2),(9,3)\}$

■

Definição 1.3 Seja $\mathscr{R}$ uma relação entre os conjuntos A e B.

- O **domínio** da relação $\mathscr{R}$ é conjunto definido por:

$$Dom(\mathscr{R}) = \{x \in A \mid (x,y) \in \mathscr{R}, \text{para algum } y \in B\}$$

- A **imagem** da relação $\mathscr{R}$ é conjunto definido por:

$$Im(\mathscr{R}) = \{y \in B \mid (x,y) \in \mathscr{R}, \text{para algum } x \in A\}$$

■ **Exemplo 1.4** Considerando os conjuntos e relações do exemplo 1.3, temos:

a) $Dom(\mathscr{R}_1) = \{1,2,3,4,5\} = A$ e $Im(\mathscr{R}_1) = \{1,2,3,4,5\} = A \subset B$
b) $Dom(\mathscr{R}_2) = \{2,4\}$ e $Im(\mathscr{R}_2) = \{1,2\}$
c) $Dom(\mathscr{R}_3) = \{1,2,3,4,5\} = A$ e $Im(\mathscr{R}_3) = \{2,4,6,8,10\}$
d) $Dom(\mathscr{R}_4) = \{1,2,3\} = A$ e $Im(\mathscr{R}_4) = \{1,4,9\}$
e) $Dom(\mathscr{R}_5) = \{1,2,3,4,5\} = A$ e $Im(\mathscr{R}_5) = \{1,4\}$
f) $Dom(\mathscr{R}_6) = \{0,1,4,9\}$ e $Im(\mathscr{R}_6) = \{0,1,2,3\}$

■

Definição 1.4 Dada uma relação $\mathscr{R} \subseteq A \times B$, podemos classificá-la como:

- **Total**: Se para todo $a \in A$, existe pelo menos um $b \in B$, tal que $(a,b) \in \mathscr{R}$, ou seja, todo elemento de A se relaciona com algum de B.
- **Sobrejetora**: Se para todo $b \in B$, existe pelo menos um $a \in A$, tal que $(a,b) \in \mathscr{R}$. É o inverso da total, todo elemento de B é relacionado com algum em A.
- **Funcional** Se para todo $a \in A$ existe um **único** $b \in B$, tal que $(a,b) \in \mathscr{R}$, ou seja, um elemento de A não pode se relacionar com mais de um elemento em B.
- **Injetora** Se para todo $b \in B$ existe um **único** $a \in A$, tal que $(a,b) \in \mathscr{R}$, ou seja, o contrário da funcional, um elemento de B não pode ser relacionado com dois ou mais elementos em A diferentes.
- **Monomorfismo** Se ela é total e injetora.
- **Epimorfismo** se ela é funcional e sobrejetora.
- **Isomorfismo** se ela é um monomorfismo e um epimorfismo.

1.2 Funções

Definição 1.5 Uma função f de A em B é uma relação em $A \times B$, que associa a cada elemento a em A, um único $b = f(a)$ em B, ou seja, f é uma relação total e funcional.

$$f = \{(a, f(a)) \in A \times B \mid a \in A \text{ e } f(a) \in B\} \subseteq A \times B$$

Uma das notações mais usadas para uma função de A em B, é:

$$\begin{array}{rccl} f: & A & \longrightarrow & B \\ & a & \longmapsto & f(a) = b \end{array}$$

■ **Exemplo 1.5** Exemplos de relação que são funções e que não são funções:

a) As relações $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ do exemplo 1.3 são funções e $\mathscr{R}_1$ e $\mathscr{R}_2$ não são, pois o elemento $a \in A$ se relaciona com os elementos $1,2,3,4 \in B$.

■

Observação 1.2. *Quatro aspectos chamam a atenção na definição apresentada:*

- *O domínio A da relação.*
- *O contradomínio B da relação.*

- *Todo elemento de A deve ter correspondente em B.*
- *Cada elemento de A só poderá ter um único correspondente no contradomínio B.*

Estas características nos informam que uma função pode ser vista geometricamente como um conjunto de pontos no plano cartesiano, contidos em $A \times B$, que só pode ser "cortada" uma única vez por uma reta vertical, qualquer que contenha o ponto.

Obs *Vamos considerar deste ponto em diante que todas as funções, usadas e definidas por quaisquer letras, tenham o conjunto domínio Dom e imagem Im, como intervalos contidos no conjunto dos números reais $\mathbb{R}$.*

Observação 1.3. *Usaremos a seguintes notações para os intervalos numéricos:*

- $(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ *chamado de intervalo aberto.*

- $[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ *chamado de intervalo fechado.*

- $(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ *chamado de intervalo aberto à esquerda e fechado à direita.*

- $[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ *chamado de intervalo fechado à esquerda e aberto à direita.*

- $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$

- $[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$

- $(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$

- $(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$

Definição 1.6 Chamaremos de **zeros** (ou **raízes**) da função $f(x)$ ao conjunto formado por todos os valores de $z \in \mathbb{R}$ tais que a imagem $f(z)$ seja zero, ou seja,

$$Z(f) = \{z \in \mathbb{R} | f(z) = 0\}$$

1.3 Funções Polinomiais

Definição 1.7 Uma função f de R em R é dita **polinomial** de grau n se ela for do tipo:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \\ &= a_0x^0 + a_1x^1 + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \\ &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n \end{aligned}$$

Onde a_ix^i são chamados de monômios de grau i e os $a_i \in \mathbb{R}$ são chamados de coeficientes do termo de grau i, $\forall i = 1, \ldots, n$.

■ **Exemplo 1.6** Considere alguns exemplos[1]:

a) $p(x) = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4$, chamada de função polinomial, ou simplesmente polinômio do 4º grau, com $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 4$ e $a_4 = 5$;

b) $f(x) = 4$, chamada de função constante, onde $a_0 = 4$;

c) $g(x) = 3 - 2x$, chamada de função afim (ou do 1º grau), onde $a_0 = 3$ e $a_1 = -2$;

d) $h(x) = x^2 + 2x + 3$, chamada de função quadrática (ou do 2º grau), onde $a_0 = 3$, $a_1 = 2$ e $a_1 = 1$.

■

1.3.1 Função Constante

Definição 1.8 Uma **função constante** f é uma função polinomial de grau zero, ou seja, é do tipo $f(x) = k$. O domínio $Dom(f) = \mathbb{R}$ e a imagem é $Im(f) = k$. O gráfico de $f(x)$ é uma reta paralela ao eixo x, passando pelo ponto $(0, k)$, no eixo y.

■ **Exemplo 1.7** Considere as funções constantes $f(x) = 3$ e $g(x) = -2$ exibidas na figura 1.3

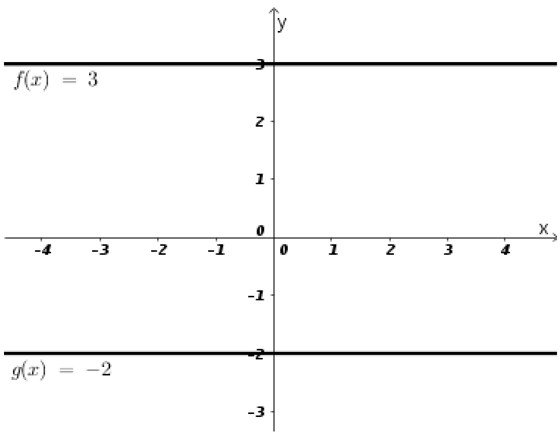


Figura 1.3: Gráficos das funções constantes $f(x) = 3$ e $g(x) = -2$

■

1.3.2 Função Afim - 1º Grau

Definição 1.9 Uma **função afim** f é uma função polinomial de grau um, também chamada de função do primeiro grau, ou seja, é do tipo $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. O domínio $Dom(f) = \mathbb{R}$ e a imagem é $Im(f) = \mathbb{R}$. O gráfico de $f(x)$ também é uma reta, porém não é paralela ao eixo x.

■ **Exemplo 1.8** Considere as funções $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = -x - 2$ exibidas na figura 1.4

[1] Em geral é colocado os termos do maior para o menor grau, ou seja, a função $p(x)$ é escrita da forma $p(x) =$

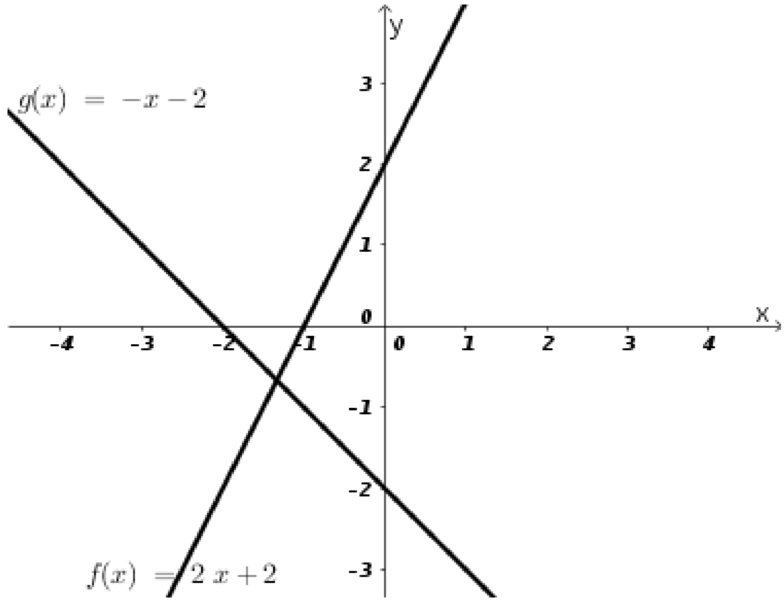


Figura 1.4: Gráficos das funções $f(x) = 2x + 2$ e $g(x) = -x - 2$

■

Observação 1.4. *Os termos a e b, de uma função afim $f(x) = ax + b$, são chamados de coeficiente angular e linear respectivamente.*

Coeficiente Linear

O coeficiente linear b é o termo independente da variável x na função do 1º grau $f(x) = ax + b$ e observe que é exatamente o valor onde o gráfico da função corta o eixo y. Isto se dá pelo simples fato de que o ponto $(0, f(0)) = (0, a0 + b) = (0, b)$ pertence ao gráfico da função.

Coeficiente Angular

O coeficiente angular a é o termo dependente da variável x na função do 1º grau $f(x) = ax + b$. O valor de a indica o coeficiente angular ($\tan\alpha$) que o gráfico da função faz em relação ao eixo x. Relembrando um pouco das propriedades dos triângulos retângulos, na figura 1.5, temos que no triângulo ABC satisfaz:

$$\tan\alpha = \frac{\textit{comprimento do cateto oposto}}{\textit{comprimento do cateto adjacente}} = \frac{2}{1} = 2 = a$$

1.3.3 Função Quadrática - 2º Grau

Definição 1.10 Uma **função quadrática** f é uma função polinomial de grau dois, também chamada de função do segundo grau, ou seja, é do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. O domínio $Dom(f) = \mathbb{R}$ e a imagem $Im(f)$ é uma semi-reta. O gráfico de $f(x)$ é uma parábola, porém não é paralela ao eixo x.

Obs *Dado uma equação do segundo grau*

$$ax^2 + bx + c = 0, \text{ com } a \neq 0 \tag{1.1}$$

Dependendo do valor $\Delta = b^2 - 4ac$, chamado de discriminante da equação do 2º grau, podemos ter:

$5x^4 + 4x^3 + 3x^2 + 2x + 1.$

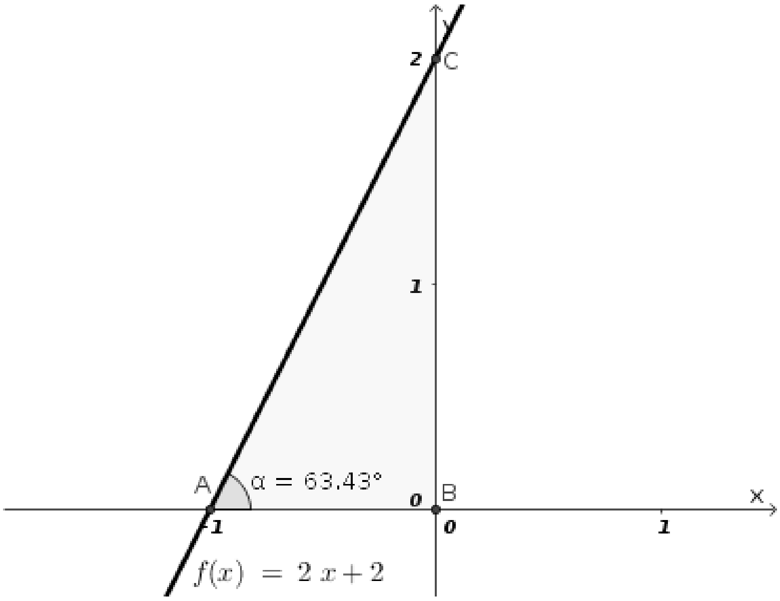


Figura 1.5: Triângulo ABC formado pelo gráfico de $f(x)$ e os eixos cartesianos.

a) $\Delta > 0$ *a equação admite duas soluções* $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ *e* $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$;

b) $\Delta = 0$ *a equação admite apenas uma solução* $x_1 = \dfrac{-b}{2a}$;

c) $\Delta > 0$ *a equação não admite soluções reais.*

1.4 Função Logarítmica

1.5 Função Exponencial

1.5.1 Funções Compostas

1.6 Função Modular

Definição 1.11 O **módulo** de um número real $x \in R$, denotado por $|x|$, é definido por:

$$|x| = \begin{cases} x & , se \quad x \geq 0 \\ -x & , se \quad x < 0 \end{cases}$$

2 — Derivada

2.1 Reta secante e tangente à uma função

Definição 2.1 Chamaremos de coeficiente de Newton de uma função $f(x)$ a razão entre variação da função $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$ e a variação dos valores do domínio da função $\Delta x = x_1 - x_0$, ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

2.2 Regras da derivação

2.2.1 Potências de x

Propiedade 2.2.1 Se $f(x) = x^p$ com $p \in R$, então

$f'(x) = p.x^{(p-1)}$

$$\mathbf{f' = p.x^{(p-1)}}$$

■ **Exemplo 2.1** Se $f(x) = x^5$ então $f'(x) = 5.x^{5-1} = 5x^4$ ■

■ **Exemplo 2.2** Se $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ então: $f'(x) = \frac{3}{2}.x^{3/2-1} = \frac{3x^{1/2}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$ ■

2.2.2 Constante multiplicada por uma função

Propiedade 2.2.2 Se $f(x) = K.g(x)$ com $k \in R$, então:

$f'(x) = k.g'(x)$

$$\mathbf{f' = k.g'}$$

■ **Exemplo 2.3** Se $f(x) = 3.x^4$ então $f'(x) = 3.[x^4]' = 3.(4x^3) = 12x^3$ ■

■ **Exemplo 2.4** Se $f(x) = \frac{3}{2x^2} = \frac{3}{2}x^{-2}$ então:

$$f'(x) = \frac{3}{2}.[x^{-2}]' = \frac{3}{2}.(-2x^{-3}) = -\frac{3}{x^3}$$

■

2.2.3 Soma ou diferença de duas funções

Propiedade 2.2.3 Se $f(x) = g(x) \pm h(x)$, então

$f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$

$$\mathbf{f' = g' \pm h'}$$

Ou seja, a derivada da soma/diferença é igual a soma/diferença das derivadas.

■ **Exemplo 2.5** Se $f(x) = 4x^2 + 3x$ então $f'(x) = [4x^2]' + [3x]' = 8x + 3$ ■

■ **Exemplo 2.6** Se $f(x) = x - \dfrac{1}{x} = x - x^{-1}$ então $f'(x) = [x]' - [x^{-1}]' = 1 + \dfrac{1}{x^2}$ ■

2.2.4 Produto de duas funções

Propiedade 2.2.4 Se $f(x) = g(x).h(x)$, então

$f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$

$$\mathbf{f' = g'.h + g.h'}$$

■ **Exemplo 2.7** Se $f(x) = (2x^2 - 1)(x + 2)$ então considere $g(x) = 2x^2 - 1$ e $h(x) = x + 2$, logo

$$f'(x) = (\underbrace{4x}_{g'})(\underbrace{x+2}_{h}) + (\underbrace{2x^2-1}_{g})(\underbrace{1}_{h'})$$

$$f'(x) =$$

■

■ **Exemplo 2.8** Se $f(x) = (5x^3 - x^2)(x^2 - x - 2)$ então considere $g(x) = 5x^3 - x^2$ e $h(x) = x^2 - x - 2$, logo

$$f'(x) = (\underbrace{15x^2 - 2x}_{g'})(\underbrace{x^2 - x - 2}_{h}) + (\underbrace{5x^3 - x^2}_{g})(\underbrace{2x - 1}_{h'})$$

$$f'(x) =$$

■

2.2.5 Quociente de duas funções

Propiedade 2.2.5 Se $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ com $h(x) \neq 0$, então

$f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}$

$$\mathbf{f' = \frac{g'.h - g.h'}{h^2}}$$

■ **Exemplo 2.9** Se $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 2}$ então considere $g(x) = 2x^2 - 1$ e $h(x) = x + 2$, logo

$$f'(x) = \frac{(\overbrace{4x}^{g'})(\overbrace{x+2}^{h}) - (\overbrace{2x^2-1}^{g})(\overbrace{1}^{h'})}{\underbrace{(x+2)^2}_{h^2}}$$

$$f'(x) = \frac{}{(x+2)^2}$$

■

■ **Exemplo 2.10** Se $f(x) = \dfrac{5x^3 - x^2}{x^2 - x - 2}$ então considere $g(x) = 5x^3 - x^2$ e $h(x) = x^2 - x - 2$, logo

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(15x^2 - 2x)}^{g'}\overbrace{(x^2 - x - 2)}^{h} - \overbrace{(5x^3 - x^2)}^{g}\overbrace{(2x-1)}^{h'}}{\underbrace{(x^2 - x - 2)^2}_{h^2}}$$

$$f'(x) = \frac{}{(x^2 - x - 2)^2}$$

■

2.2.6 Função logarítmica

Observação 2.1. *O logarítmo natural (ou neperiano), representado por* $\ln x$ *é o logaritmo* $\log_e x$*, com base* $e = 2,7182818284590452354$ *chamada de constante de Euler.*

Observação 2.2. *Para transformar um* $\log$ *de uma base qualquer para* $\ln$ *basta fazer a mudança de base:* $\log_b x = \dfrac{\log_e x}{\log_e b} = \dfrac{\ln x}{\ln b} = \dfrac{1}{\ln b} \ln x$

Propiedade 2.2.6 Se $f(x) = \ln x$ com $x > 0$, então

$f'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$\mathbf{f' = \frac{1}{x}}$$

■ **Exemplo 2.11** Se $f(x) = 5 \ln x$ então $f'(x) = 4[\ln x]' = 4\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{x}$ ■

2.2.7 Função exponencial

Observação 2.3. *Seja a base* $b > 0$ *então* $b^x = e^{\ln b^x} = e^{x \ln b}$*, por exemplo, se* $b = 2$ *temos* $2^x = e^{x \ln 2} \approx e^{0,69x}$*, pois* $\ln 2 \approx 0,693147181$

Propiedade 2.2.7 Se $f(x) = e^x$ com $e = 2,7182818284590452354$ (constante de Euler), então

$f'(x) = e^x$

$$\mathbf{f' = e^x}$$

■ **Exemplo 2.12** Seja $N(t)$ o número de indivíduos (animal ou vegetal) de uma população em um instante t de tempo. A variação da população entre dois instantes $t = t_0$ e $t = t_0 + h$ $(h > 0)$ é $\Delta N = N(t_0 + h) - N(t_0)$, logo a taxa média de crescimento durante o período de tempo $t_0 \leq t \leq t_0 + h$ é

$$\text{taxa média} = \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{N(t_0 + h) - N(t_0)}{h}$$

A taxa de crescimento instantâneo é obtida desta taxa média quando o período de tempo $\Delta t = h$ se aproximar de 0, ou seja,

$$\text{taxa de crescimento} = \lim_{h \to 0} \frac{\Delta N}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} \frac{N(t_0 + h) - N(t_0)}{h} = N'(t_0)$$

Vamos considerar, por exemplo, uma população inicial de 100 bactérias, em um meio nutriente e homogêneo, na qual a cada hora o número de bactérias duplique, então temos:

$$\begin{aligned}
&N(0) = 100\\
&N(1) = N(0)\times 2 = 100\times 2 (= 200)\\
&N(2) = N(1)\times 2 = 100\times 2^2 (= 400)\\
&N(3) = N(2)\times 2 = 100\times 2^3 (= 800)\\
&\vdots\\
&N(t) = N(t-1)\times 2 = 100\times 2^t
\end{aligned}$$

Como a taxa de crescimento da população de bactérias no instante t é

$$N'(t) = (100\times 2^t)' = 100\times(e^{t\ln 2})' = 100\times(\ln 2)\times e^{t\ln 2} \approx 100\times(0,69)\times 2^t \approx 69\times 2^t$$

Logo a taxa de crescimento após quatro horas é $N'(4) \approx 69\times 2^4 = 1104$, ou seja, a população cresce a uma taxa de 1104 bactérias por hora. ■

■ **Exemplo 2.13** Se $f(x) = 4e^x$ então $f'(x) = 4[e^x]' = 4e^x$ ■

■ **Exemplo 2.14** Se $f(x) = 4x^2e^x$ então considere $g(x) = 4x^2 - 1$ e $h(x) = e^x$, logo

$$f'(x) = (\underbrace{4x}_{g'})(\underbrace{e^x}_{h}) + (\underbrace{4x^2}_{g})(\underbrace{e^x}_{h'})$$

$$f'(x) = (4x + 4x^2)e^x$$

■

■ **Exemplo 2.15** Se $f(x) = e^x \ln x$ então considere $g(x) = e^x$ e $h(x) = \ln x$, logo

$$f'(x) = (\underbrace{e^x}_{g'})(\underbrace{\ln x}_{h}) + (\underbrace{e^x}_{g})(\underbrace{\frac{1}{x}}_{h'})$$

$$f'(x) = (\ln x + \frac{1}{x})e^x$$

■

2.2.8 Funções compostas (Regra da cadeia)

Propiedade 2.2.8 Se $f(x) = g[h(x)]$, ou seja, f é uma composição das funções g e h, então

$f'(x) = g'[h(x)].h'(x)$

$$\mathbf{f' = g'(h).h'}$$

■ **Exemplo 2.16** Se $f(x) = (x^3 - 2x)^7$ então considere $g(x) = x^7$ e $h(x) = x^3 - 2x$, note que $f(x) = g[h(x)]$, portanto

$$f'(x) = \underbrace{7(x^3-2x)^6}_{g'[h(x)]}.\underbrace{(3x^2-2)}_{h'(x)}$$

$$f'(x) = (21x^2 - 14)(x^3 - 2x)^6$$

■

A regra da cadeia pode ser usada para funções definida por várias composições, bastando derivar reutilizando a regra da cadeia seguidas vezes.

■ **Exemplo 2.17** Se $f(x) = [\ln(x^3 - 2x)]^7$ então considere $g(x) = x^7$, $h(x) = \ln x$ e $i(x) = x^3 - 2x$, note que $f(x) = g\{h[i(x)]\}$, portanto

$$f'(x) = \underbrace{7[\ln(x^3 - 2x)]^6}_{g'\{h[i(x)]\}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3x^2 - 2x}\right)}_{h'[i(x)]} \cdot \underbrace{(6x - 2)}_{i'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{7(6x-2)[\ln(x^3 - 2x)]^6}{3x^2 - 2x}$$

■

■ **Exemplo 2.18** Derive a seguinte função: $f(x) = \dfrac{\sqrt{[\ln(x^3 - 4x)]^3}}{2x^3 e^{2x^3 - \sqrt{x}}}$ ■

2.3 Analisando as Funções

2.3.1 Pontos Críticos

Definição 2.2 Diremos que um ponto $(x_0, f(x_0))$ é um **ponto crítico** da função $f(x)$, se:

a) a derivada no ponto x_0 é nulo, ou seja, $f'(x_0) = 0$, ou

b) a $f(x)$ não é derivável no ponto x_0, ou seja, não existe $f'(x_0)$

2.3.2 Função Crescente e Decrescente

Definição 2.3 Dada uma função $f(x)$ definida em um intervalo I e $x_1, x_2 \in I$, então:

a) $f(x)$ é **crescente** em I se $f(x_1) < f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

b) $f(x)$ é **decrescente** em I se $f(x_1) > f(x_2)$ para $x_1 < x_2$;

c) $f(x)$ é **constante** em I se $f(x_1) = f(x_2)$ para todos $x_1, x_2 \in I$;

Teorema 2.3.1 Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo $I = [a,b]$ e diferenciável em (a,b), então se:

a) $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,b)$, então $f(x)$ é crescente em I;

b) $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,b)$, então $f(x)$ é decrescente em I;

c) $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a,b)$, então $f(x)$ é constante em I.

2.3.3 Concavidade

3 — Integrais

3.1 Primitivas

Antes de iniciar propriamente as integrais e as propriedades, iremos calcular alguns exemplos de primitivas, apenas com as propriedades das derivadas.

Definição 3.1 Diremos que uma função $F(x)$ é uma **primitiva** da função $f(x)$, quando:

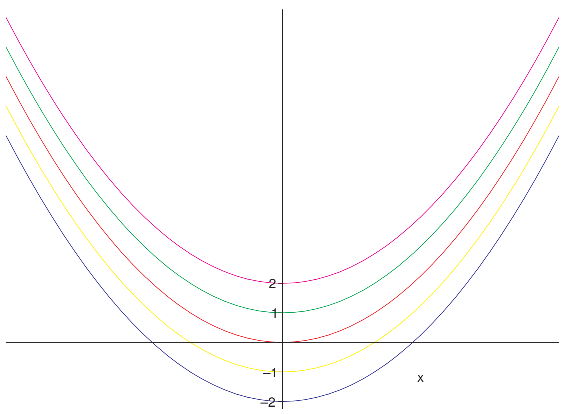
$$F'(x) = f(x)$$

Exercício 3.1 Encontre as primitivas da função $f(x) = 2x$

Neste caso, nota-se facilmente que $F_1(x) = x^2 + 1$ e $F_2(x) = x^2 - 5$ são primitivas de $f(x)$ e que para qualquer constante K, a função $F(x) = x^2 + K$ também é uma primitiva de $f(x)$. ■

Observação 3.1. *Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são primitivas de uma função $f(x)$, então $F_1(x) = F_2(x) + K$, onde K é uma constante.*

Observação 3.2. *Note que para cada constante K existe uma primitiva, isto graficamente, significa que existem infinitas curvas que representam as primitivas de $f(x)$.*



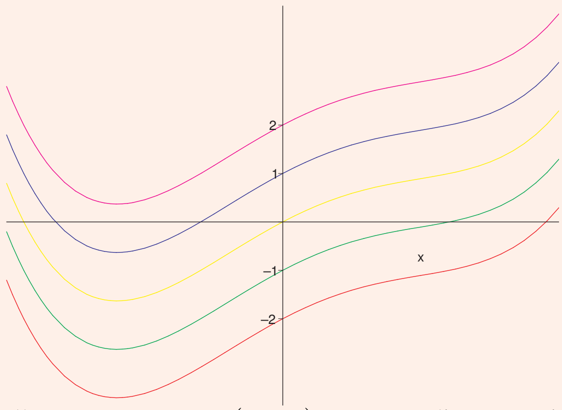
■ **Exemplo 3.1** Determinar a função $f(x)$ tal que $f'(x) = 4x^3 - 2x^3 - 3$ ■

■ **Exemplo 3.2** $F(x) = 3x^4 - 2x^2 - 4$ é uma primitiva de $f(x) = 12x^3 - 4x$. ■

Exercício 3.2 Encontre as primitivas da função $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$

Note que, para se encontrar uma primitiva de $f(x)$ a função $F(x)$, neste caso, tem que ser uma função polinomial do quarto grau $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + K$, portanto $F'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ deve ser igual a $f(x)$, logo: $4a = 3$, $3b = -2$, $2c = -2$ e $d = 2$ ou seja, $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -1$ e $d = 2$, donde $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + K$.

Graficamente temos várias curvas que representam as primitivas de $f(x)$.



Portanto ao se escolher um ponto $P = (x_0, y_0)$ (uma condição) a primitiva fica unicamente determinada.

■ **Exemplo 3.3** Encontrar a primitiva da função $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ no ponto $P = (1,2)$.

Como $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + K$ são as primitivas de $f(x)$, para determinar a primitiva que passa pelo ponto $P = (1,2)$, basta substituir o ponto na primitiva, isto é, $2 = F(1) = \frac{3}{4}(1)^4 - \frac{2}{3}(1)^3 - (1)^2 + 2(1) + K$, donde resulta: $K =$. ■

3.2 Integrais Indefinidas

A **integral indefinida** *de uma função $f(x)$, é uma primitiva de $f(x)$, denotado por*

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

onde $\int$ é o sinal de integração (lê-se integral de), dx indica que x é a variável a ser considerada.

Temos algumas regras de integração, de fácil obtenção:

3.2.1 Potências de x

Propiedade 3.2.1 Se $f(x) = x^n$ onde $n \neq -1$, então:

$f(x) = x^n$

$$\boldsymbol{\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K}$$

■ **Exemplo 3.4** $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + K = \frac{x^6}{6} + K.$ ■

■ **Exemplo 3.5** $\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + K = \frac{x^{5/2}}{5/2} + K = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + K$ ■

3.2.2 Caso x^{-1}

Propiedade 3.2.2 Se $f(x) = \frac{1}{x}$, então:

$f(x) = \frac{1}{x}$

$$\int \mathbf{\frac{1}{x}dx} = \int \mathbf{x^{-1}dx} = \ln|\mathbf{x}| + \mathbf{K}$$

3.2.3 Constante multiplicada por uma função

Propiedade 3.2.3 Se $f(x) = c.g(x)$ onde k é uma constante qualquer, então:

$f(x) = k.g(x)$

$$\int \mathbf{k.f(x)dx} = \mathbf{k}. \int \mathbf{f(x)dx}$$

3.2.4 Soma ou diferença de duas funções

Propiedade 3.2.4 Se $f(x) = g(x) \pm h(x)$, então:

$f(x) = g(x) \pm h(x)$

$$\int [\mathbf{f(x)} \pm \mathbf{g(x)}]\,\mathbf{dx} = \int \mathbf{f(x)dx} \pm \int \mathbf{g(x)dx}$$

3.2.5 Função exponencial

Propiedade 3.2.5 Se $f(x) = e^x$, então:

$f(x) = e^x$

$$\int \mathbf{e^x dx} = \mathbf{e^x} + \mathbf{K}$$

■ **Exemplo 3.6** $\int 3x^3 - 4e^x + 1dx = 3\int x^3dx - 4\int e^xdx + \int 1dx =$

$$= 3\left(\frac{x^4}{4} + K_1\right) + 4\left(e^x + K_2\right) + \left(\frac{x^{0+1}}{0+1} + K_3\right) =$$

$$= \frac{3x^4}{4} + 4e^x + x + \overbrace{(3K_1 - 4K_2 + K_3)}^{=K}$$

■

3.2.6 Integração de produtos e quociente

Não existe uma regra específica para o produto ou quociente de duas funções. Eventualmente será possível reescrever a integral de uma forma que possa ser integrado pelas regras anteriores.

■ **Exemplo 3.7** $\int \sqrt{x}(x^3 - 4x - 2)dx = \int x^{1/2}(x^3 - 4x - 2)dx = \int x^{7/2} - 4x^{3/2} - 2x^{1/2}dx =$ resolva usando as regras anteriores. ■

■ **Exemplo 3.8** $\int \frac{5x^6 - 4x^2 - 3}{x^3}dx = \int \frac{5x^6}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3}dx = \int 5x^3 - \frac{4}{x} - 3x^{-3}dx =$ resolva usando as regras anteriores. ■

3.2.7 Integração por substituição

A ideia dessa regra, é usar a regra da cadeia para uma determinada função, usando para isso uma substituição adequada, tornando a integral mais simples do que a integral original.

Exercício 3.3 Calcule a integral $\int 9(x^3-3x+4)^8(3x^2-3)dx$.

Considerando $u(x)=x^3-3x+4$ temos $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=3x^2-3$ ou seja, $du=(3x^2-3)dx$, logo:

$$\begin{aligned}\int 9\underbrace{(x^3-3x+4)}_{u}{}^8\underbrace{(3x^2-3)dx}_{du} &= \int 9u^8du = u^9+K = \\ &= \underbrace{(x^3-3x+4)}_{u}{}^9+K\end{aligned}$$

■

Exercício 3.4 Calcule a integral $\int \dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+4}dx$.

Considerando $u(x)=x^3-3x+4$ temos $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=3x^2-3$ ou seja $du=(3x^2-3)dx$, logo:

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-3}{x^3-3x+4}dx &= \int \frac{1}{\underbrace{x^3-3x+4}_{u}}\overbrace{(3x^2-3)dx}^{du} = \\ &= \int \frac{1}{u}du = \ln|u|+K = \\ &= \ln|\underbrace{(x^3-3x+4)}_{u}|+K\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.9** Calcule a integral $\int \dfrac{x}{x-1}dx$.

Considerando $u(x)=x-1$ temos $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=1$ ou seja $du=dx$, logo:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x-1}dx &= \int \frac{x}{\underbrace{x-1}_{u}}\overbrace{dx}^{du} = \int \frac{u+1}{u}du = \\ &= \int 1+\frac{1}{u}du = u+\ln|u|+K = \\ &= \underbrace{x-1}_{u}+\ln|\underbrace{x-1}_{u}|+K\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.10** Calcule a integral $\int x\ln(x^2+5)dx$.

Considerando $u(x)=x^2-5$ temos $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=2x$ ou seja $\dfrac{du}{2}=xdx$, logo:

$$\begin{aligned}\int x\ln(x^2+5)dx &= \int \ln\underbrace{x^2+5}_{u}\overbrace{xdx}^{du/2} = \int \ln u\frac{du}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\int \ln u du = ?^1\end{aligned}$$

■

3.2.8 Integração por partes

Na propriedade da regra do produto (ver 2.2.4) temos:

$$\begin{aligned}g(x).h'(x) &= [g(x)h(x)]' - g'(x)h(x) \\ &\Downarrow \\ \int g(x).h'(x)dx &= \int [g(x)h(x)]'dx - \int g'(x)h(x)dx \\ &= g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)dx\end{aligned}$$

■ **Exemplo 3.11** Calcule $\int xe^x dx$

Escolhendo $g(x) = x$ e $h'(x) = e^x$, temos $g'(x) = 1$ e $h(x) = e^x$, portanto:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{h'(x)}dx &= \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)}\underbrace{e^x}_{h(x)}dx = \\ &= xe^x - e^x + K = (x-1)e^x + K\end{aligned}$$

Note que fazendo a escolha $g(x) = e^x$ e $h'(x) = x$, temos $g'(x) = e^x$ e $h(x) = \frac{x^2}{2}$, portanto:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{e^x}_{g(x)}\underbrace{x}_{h'(x)}dx &= \underbrace{e^x}_{g(x)}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{h(x)} - \int \underbrace{e^x}_{g'(x)}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{h(x)}dx = \\ &= xe^x - (\text{integral mais complicada})\end{aligned}$$

Portanto a escolha deve sempre ter como objetivo simplificar a integral, deixando mais simples que a integral original. ■

■ **Exemplo 3.12** Calcule $\int x\sqrt{x+5}dx$

Escolhendo $g(x) = x$ e $h'(x) = \sqrt{x+5}$, temos $g'(x) = 1$ e $h(x) = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$, portanto:

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{\sqrt{x+5}}_{h'(x)}dx &= \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)}\underbrace{\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}}_{h(x)}dx \\ &= \frac{2x\sqrt{x+5}}{3} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + K\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.13** Calcule $\int \ln x dx$

Escolhendo $g(x) = \ln x$ e $h'(x) = 1$, temos $g'(x) = \frac{1}{x}$ e $h(x) = x$, portanto:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{\ln x}_{g(x)} \underbrace{1}_{h'(x)} dx &= \underbrace{\ln x}_{g(x)} \underbrace{x}_{h(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \underbrace{x}_{h(x)} dx = \\
&= x \ln x - \int 1 dx = \\
&= x \ln x - x + K
\end{aligned}$$

■

■ **Exemplo 3.14** Terminando o exemplo 3.10, temos:

$$\begin{aligned}
\int x \ln(x^2 + 5) dx &= \frac{1}{2} \int \ln u du = \\
&= \frac{1}{2} (u \ln u - u) + K = \\
&= \frac{1}{2} (x^2 + 5) \ln(x^2 + 5) - \frac{1}{2} (x^2 + 5) + K
\end{aligned}$$

■

3.3 Aplicações

3.3.1 Desvalorização

■ **Exemplo 3.15** O preço de revenda de uma certa máquina decresce a uma taxa que varia com o tempo de uso. Quando a máquina tinha t anos de uso, a taxa de variação do seu valor era $200(t - 10)$ reais por ano. Se a máquina foi comprada por R$ 12.000,00, quanto valerá 10 anos depois?

Seja $R(t)$ o preço de revenda daqui a t anos. Note que:

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = 200(t - 10) = 200t - 2000$$

logo,

$$R(t) = \int 200t - 2000 dt = 200 \frac{t^2}{2} - 2000t + C = 100t^2 - 2000t + C$$

como a máquina foi comprada por R$ 12.000,00, ou seja, para $t = 0$, temos que $C = 12.000$, portanto daqui a 10 anos a máquina valerá:

$$R(10) = 100(10)^2 - 2000(10) + 12000 = R\$ \ 2.000,00$$

■

■ **Exemplo 3.16** O preço de revenda de uma certa máquina decresce a uma taxa que varia com o tempo de uso. Quando a máquina tinha t anos de uso, a taxa de variação do seu valor era $-960e^{-t/5}$ reais por ano. Se a máquina foi comprada por R$ 5.000,00, quanto valerá 10 anos depois?

Seja $R(t)$ o preço de revenda daqui a t anos. Note que:

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = -960e^{-t/5}$$

logo,

$$R(t) = \int -960e^{-t/5}dt = \int 4800e^{u}du = 4800e^{u} + C = 4800e^{-t/5} + C$$

como a máquina foi comprada por R$ 12.000,00, ou seja, para $t = 0$, temos que $C = 200$, portanto daqui a 10 anos a máquina valerá:

$$R(10) = 4800e^{-10/5} + 200 = \frac{4800}{e^2} + 200 = \frac{4800}{7.389} + 200 = R\$\ 849,61$$

■

3.3.2 Valorização

■ **Exemplo 3.17** Estima-se que um certo objeto valoriza a uma taxa anual de $\dfrac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4+8000}}$ reais. Quanto valerá daqui a 10 anos o objeto que atualmente vale R$ 500,00?

Seja $P(t)$ o preço do objeto daqui a t anos. Note que:

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4+8000}}$$

logo,

$$P(t) = \int \frac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4+8000}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \sqrt{u} + C = \sqrt{0,2x^4+8000} + C$$

como o objeto vale atualmente R$ 500,00, ou seja, para $t = 0$, temos que $C = 410,55$, portanto daqui a 10 anos o objeto valerá:

$$P(10) = \sqrt{0,2(10)^4 + 8000} + 410,55 = 100 + 410,55 = R\$\ 510,55$$

■

3.3.3 Receita futura

■ **Exemplo 3.18** Um poço de petróleo produz 300 barris de petróleo por mês. Este poço deverá secar em 3 anos. Estima-se que, daqui a t meses, o preço do barril de petróleo será de $P(t) = 18 + 0,3\sqrt{t}$ dólares. Como o petróleo é vendido logo que extraído, qual será a receita total futura do poço?

Seja R a receita. Então:

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = (\text{dólares recebidos por barril}).(\text{N. de barris vendidos por mês})$$

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dB}.\frac{dB}{dt} = P(t).300 = 5400 + 90\sqrt{t}$$

Logo:

$$R(t) = \int 5400 + 90\sqrt{t}dt = 5400t + 60t^{3/2} + C$$

Como $R(0) = 0$, segue que $C = 0$ e $R(t) = 5400t + 60t^{3/2}$. Como o poço secará em 36 meses, a receita futura total do poço será de:

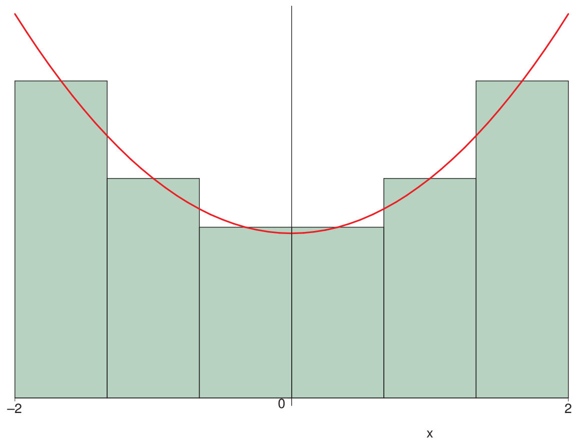
$$R(36) = 5400.36 + 60(36)^{3/2} = U\$\ 207.360,00$$

■

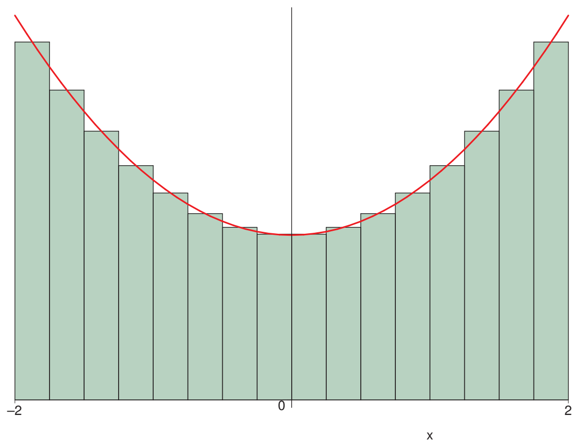
3.4 Integral Definida

3.4.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Suponha que $f(x)$ seja contínua e não-negativa em um intervalo $a \leq x \leq b$. Você pode calcular o valor aproximado da área abaixo do gráfico de f, entre $x = a$ e $x = b$, da seguinte maneira:



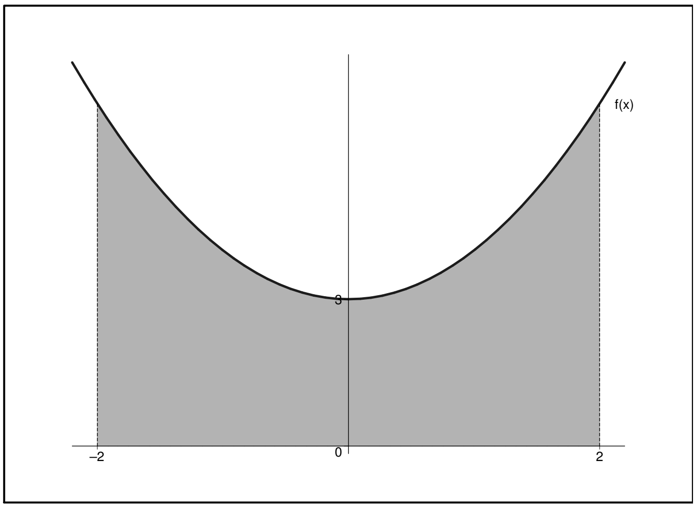
Se fizer uma subdivisão maior, temos:



Onde a área do n-ésimo retângulo é $f(x_i)\Delta x$. Portanto a área total será:

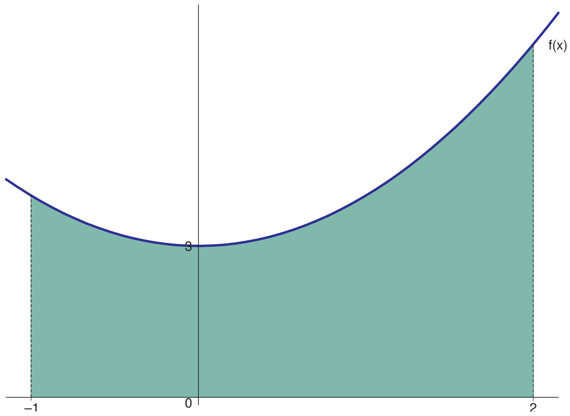
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.



■ **Exemplo 3.19** Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = x^2 + 3$ e o eixo x entre $-1 \leq x \leq 2$.

Observando o gráfico nota-se que é só usar o teorema fundamental do calculo para se encontrar a área desejada.



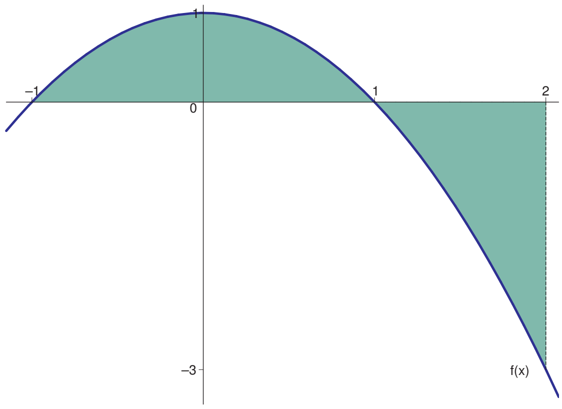
logo, $A = \int_{-1}^{2} x^2 + 3dx = F(2) - F(-1)$ onde $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x + C$, portanto:

$$A = \underbrace{\frac{2^3}{3} + 3.2 + C}_{F(2)} - \left(\underbrace{\frac{(-1)^3}{3} + 3.(-1) + C}_{F(-1)} \right) = \frac{26}{3} + C + \frac{10}{3} - C = 12\ u.a.$$

■

■ **Exemplo 3.20** Calcule a área entre o gráfico de $f(x) = -x^2 + 1$ e o eixo x entre $-1 \leq x \leq 2$.

Observando o gráfico nota-se que só dá para usar o teorema fundamental do calculo para se encontrar a área no intervalo $-1 \leq x \leq 1$. Para se calcular a área no intervalo $1 \leq x \leq 2$ basta calcular a integral definida nesse intervalo, considerando-se o resultado positivo, portanto:



$$A_{total} = A_1 - A_2 = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx$$

Como $F(x) = -\dfrac{x^3}{3} + x + C$ é uma primitiva, temos:

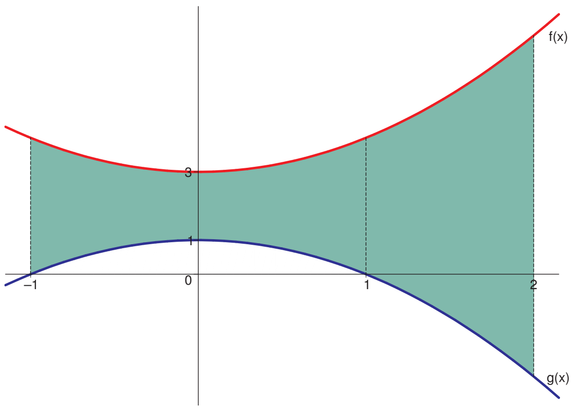
$$A_1 = \underbrace{-\frac{(1)^3}{3} + (1) + C}_{F(1)} - \left(\underbrace{-\frac{(-1)^3}{3} + (-1) + C}_{F(-1)} \right) = \frac{2}{3} + C + \frac{4}{3} - C = 2$$

$$A_2 = \underbrace{-\frac{2^3}{3} + 2 + C}_{F(2)} - \left(\underbrace{-\frac{(1)^3}{3} + (1) + C}_{F(1)} \right) = -\frac{6}{3} + C + \frac{2}{3} - C = -\frac{4}{3}$$

Conclusão: $A = 2 - \left(-\dfrac{4}{3}\right) = \dfrac{10}{3}\ u.a.$ ■

■ **Exemplo 3.21** Calcule a área entre os gráficos de $f(x) = x^2 + 3$ e o gráfico de $g(x) = -x^2 + 1$ entre $-1 \leq x \leq 2$.

Observando o gráfico nota-se que a área no intervalo $-1 \leq x \leq 1$ é a diferença entre as áreas entre o eixo x e os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$, ou seja:



$$A_1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx$$

e que a área no intervalo $1 \leq x \leq 2$ é:

$$A_1 = \int_{1}^{2} f(x)dx - \left(\int_{1}^{2} g(x)dx \right) = \int_{1}^{2} [f(x) - g(x)]dx$$

Portanto a função $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 + 2$, satisfaz o teorema, logo $A_{total} = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]dx$ e como $H(x) = 2\frac{x^3}{3} + 2x + C$ é uma primitiva de $h(x)$, temos:

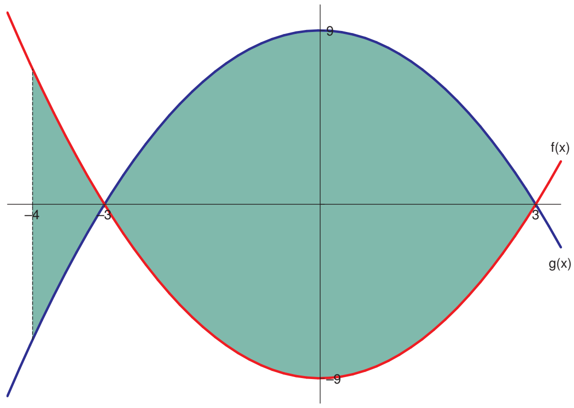
$$A_{total} = \underbrace{2\frac{(2)^3}{3} + 2.(2) + C}_{F(2)} - \left(\underbrace{2\frac{(-1)^3}{3} + 2.(-1) + C}_{F(-1)} \right)$$

$$A_{total} = \frac{20}{3} + C + \frac{4}{3} - C = \frac{24}{3} = 8\ u.a.$$

■

■ **Exemplo 3.22** Calcule a área entre os gráficos de $f(x) = x^2 - 9$ e o gráfico de $g(x) = -x^2 + 9$ entre $-4 \leq x \leq 3$.

Observando o gráfico nota-se que a área A_1 no intervalo $-4 \leq x \leq -3$ é a diferença entre as áreas entre o eixo x e os gráficos de $f(x)$ e $g(x)$ e que a área A_2 no intervalo $-3 \leq x \leq 3$ é a diferença entre as áreas entre o eixo x e os gráficos de $g(x)$ e $f(x)$, ou seja:



$$A_{total} = A_1 + A_2 = \int_{-4}^{-3} [f(x) - g(x)]dx + \int_{-3}^{3} [g(x) - f(x)]dx$$

Para resolver essas integrais, vamos utilizar uma função auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 9) - (-x^2 + 9) = 2x^2 - 18$$

logo

$$A_{total} = \int_{-4}^{-3} h(x)dx + \int_{-3}^{3} -h(x)dx$$

Calculando a primitiva de $h(x)$, temos:

$$H(x) = \int h(x)dx = \int 2x^2 - 18dx = 2\frac{x^3}{3} - 18x + C$$

Portanto:

$$A_1 = \left(\underbrace{2\frac{(-3)^3}{3} + 18.(-3) + C}_{F(-3)} \right) - \left(\underbrace{2\frac{(-4)^3}{3} + 18.(-4) + C}_{F(-4)} \right) = \frac{20}{3} u.a.$$

e

$$A_2 = \left(\underbrace{2\frac{(3)^3}{3} + 18.(3) + C}_{F(3)} \right) - \left(\underbrace{2\frac{(-3)^3}{3} + 18.(-3) + C}_{F(-3)} \right) = 72u.a.$$

Finalmente: $A_{total} = \dfrac{20}{3} + 72 = \dfrac{236}{3}u.a.$ ■