MATEMÁTICA APLICADA A GESTÃO PÚBLICA

(Notas de Aula - 2013.1)

Prof. Sérgio de Albuquerque Souza
Endereço eletrônico: sergio@mat.ufpb.br
Sítio: www.mat.ufpb.br/sergio

21 de maio de 2013

Sumário

Capítulo 1

Conjuntos

1.1 Introdução

O termo **conjunto** não será defini[...] um sinônimo de coleção ou agrupamento de objetos. Esses ob[...] os seus **elementos**. A natureza dos elementos de um conju[...] diversa. Podemos ter conjuntos de canetas, cores, bolas, n[...]izes, etc. Um dos pioneiros no estudo dos conjuntos foi o m[...]org Cantor (1845-1918) que fez relevantes contribuições à Te[...]ando estava estudando séries trigonométricas.

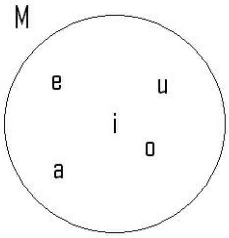
Plate XXVI. Cantor at Halle University, 1894.
(In the possession of the *Universitätsarchiv*, Halle/Saale, E. Germany D.D.R.)

Observação 1.1 *O ponto de vista aqui usado é chamado de ingênuo, pois não se faz uso de axiomas para construir uma teoria. O outro ponto de vista é o axiomático, onde se enunciam axiomas para se construir de modo rigoroso toda a teoria. Dentre os modos axiomáticos de tratar a teoria dos conjuntos, destacamos o modelo axiomático de Zermelo-Fraenkel desenvolvido pelos matemáticos Ernest Zermelo (1871-1953) e Adolf Fraenkel (1891-1965).*

1.2 Definições Básicas

Introduziremos agora uma série de termos e definições que encontraremos pela frente no decorrer do curso. Sejam A um conjunto e a um objeto. Se a for um elemento de A escreveremos $a \in A$ para simbolizar esse fato. Caso o elemento a não seja um elemento de A, escreveremos $a \notin A$, para simbolizar isso.

Para repesentarmos um conjunto podemos escrever todos seus elementos entre chaves, quando isso for possível. Também podemos descrever um conjunto por uma propriedade comum que todos os seus elementos possuam. Uma outra representação muito útil dos conjuntos é feita através dos chamados **Diagramas de Venn** criados pelo lógico inglês John Venn (1834-1923). Um Diagrama de Venn é uma curva fechada no plano, tend s elementos do conjunto, conforme o conjunto da figura a seg M estão representadas as vogais.



Vamos discutir agora alguns exemplos.

Exemplo 1.1 *Seja A o conjunto das letras da palavra* ***Atordoado.*** *Então podemos escrever simplesmente*

$$A = \{a, t, o, r, d\}$$

.

Exemplo 1.2 *Existem quatro conjuntos numéricos que estudamos desde os primeiros anos na escola. São eles o conjunto dos números naturais, representado por*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, ...\}$$

. *O conjuntos dos números inteiros, representado por*

$$\mathbb{Z} = \{... - 2, -1, 0, 1, 2, ...\}$$

. *O conjunto dos números racionais, representado por*

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{m}{n}; m, n \in \mathbb{Z} \ com \ n \neq 0\right\}$$

. *E finalmente o conjunto dos números reais, simplesmente representado por $\mathbb{R}$.*

Exemplo 1.3 *Seja A o conjunto dos números reais maiores ou iguais a 2. Evidentmente não podemos listar todos os elementos de A como foi feito no exemplo precedente. Porém, podemos escrever*

$$A = \{x \in \mathbb{R}; x \geq 2\}$$

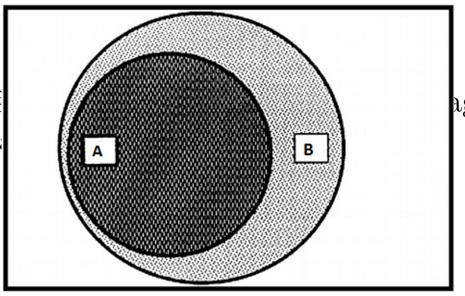
. Na notação acima utilizamos a propriedade comum aos elementos de A para, ao invés de listar os seus elementos, darmos um critério de quando um elemento pertence ou não ao dito conjunto. Mais especificamente: para que um número real pertença ao conjunto A, é preciso que ele seja maior que ou igual a 2.

Observação 1.2 *Existe um conjunto muito importante em Matemática que é o conjunto que não possui elemento algum. Este conjunto será chamado de **conjunto vazio** e será representado por $\emptyset$ que é uma letra do alfabeto norueguês. Podemos descrever o conjunto vazio através de uma propriedade que não é satisfeita por qualquer objeto. Por exemplo, o conjunto $\{x \in \mathbb{R}; x > x+1\}$ é vazio, uma vez que essa propriedade não é satisfeita por nenhum número real.*

1.3 Inclusão

Uma importante relação entre conjuntos é a relação de **inclusão** que veremos a seguir. Dados dois conjuntos A e B, diremos que A é um **subconjunto** de B se todo elemento de A for também elemento de B. Usaremos o símbolo $A \subseteq B$ para denotar este fato. Simbolicamente podemos escrever:

$A \subseteq B$ quando



Uma maneira de visualizar a inclusã … agramas de Venn está mostrada abaixo. Na figur…

Quando A não for um subconjunto de B, simbolizaremos isso por $A \not\subseteq B$. Isso siginifica que existe pelo menos um elemento de A que não pertence a B.

Observação 1.3 *Existem na literatura outros termos que também significam que A é um subconjunto de B. Diz-se também que A **está contido** em B, que A **é uma parte de** B, que B **é um superconjunto de** A, ou que B **contém** A.*

Observação 1.4 *A notação $A \subset B$, no nosso curso indicará o fato de que A é um subconjunto de B mas que é diferente dele. Diz-se nesse caso que A é um subconjunto **próprio** de B.*

Observação 1.5 *é preciso ter bastante cuidado no uso dos símbolos $\in$ e $\subseteq$. Em alguns casos um conjunto pode ser, ele mesmo, elemento de um outro conjunto.*

Veremos agora alguns exemplos.

Exemplo 1.4 *Sejam A e B conjuntos dados respectivamente por $A = \{1, 3\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$. Temos que $A \subset B$ e que $B \nsubseteq A$.*

Exemplo 1.5 *Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$. Nesse caso não temos nem $A \subseteq B$ nem $B \subseteq A$.*

Exemplo 1.6 *Seja $A = \{a, b, c\}$. As afirmações $a \in A$ e $\{a\} \subseteq A$ são ambas verdadeiras. Agora, se $A = \{\{a\}, b, c\}$, então as afirmações $a \in A$ e $\{a\} \subseteq A$ são ambas falsas.*

Veremos agora algumas propriedades da inclusão de conjuntos.

Teorema 1.1 *Se A, B e C são conjuntos então valem as seguintes propriedades:*

(i) *$A \subseteq A$,*

(ii) *$\emptyset \subseteq A$,*

(iii) *Se $A \subseteq B$ e $B \subseteq C$, então $A \subseteq C$,*

Demonstração: A primeira propriedade decorre imediatamente da definição de inclusão.
Provemos a segunda. Ela equivale a provar que se $a \in \emptyset$ então $a \in A$. Como uma implicação deste tipo será sempre verdadeira, uma vez que a hipótese nunca acontece, somos levados a concluir que vale a propriedade (ii).
Para mostrar que $A \subseteq C$, devemos mostrar que, dado $a \in A$, temos que $a \in C$. Ora, mas dado $a \in A$, segue que $a \in B$, por hipótese e, também por hipótese, segue que $a \in C$, como queríamos. ■
Surge agora uma importante pergunta: *Quando dois conjuntos são iguais?* A resposta mais simples é dizer que eles são iguais quando tiverem os mesmos elementos. Para os nossos propósitos usaremos uma definição que é bem mais fácil de se trabalhar que é a seguinte: Dados dois conjuntos A e B diremos que ele são **iguais** e representamos isso por $A = B$, se $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$.

Exemplo 1.7 *Os conjuntos $A = \{a, t, o, r, d\}$ e $B = \{$ letras da palavra atordoado $\}$ são iguais.*

Exemplo 1.8 *Os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 6 < 0\}$ e $B = \{x \in \mathbb{R} | 2 < x < 3\}$ são iguais. De fato, seja $x \in A$. Assim, $x^2 - 5x + 6 < 0$. Mas $x^2 - 5x + 6 = (x - 2)(x - 3)$. Assim, se $x \in A$, então $(x - 2)(x - 3) < 0$. Portanto, devemos ter*

1. $(x-2)>0$ *e* $(x-3)<0$ *ou*

2. $(x-2)<0$ *e* $(x-3)>0$.

No primeiro caso, devemos ter $x>2$ *e* $x<3$*, ou seja,* $2<x<3$*. No segundo caso, devemos ter* $x-2<0$ *e* $x-3>0$*. Como não existem números satisfazendo as essas duas condições simultaneamente, esse caso não pode ocorrer. Logo, devemos ter* $2<x<3$*, ou seja,* $x\in B$*.*
Seja $x\in B$*. Então* $x-2>0$ *e* $x-3<0$*, donde* $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)<0$*, ou seja,* $x\in A$*.* ∎

Observação 1.6 *A definição de igualdade entre conjuntos possui interessantes propriedades, a saber: Se* A,B *e* C *são conjuntos então vale o seguinte*

1. $A=A$,

2. *se* $A=B$ *então* $B=A$,

3. *se* $A=B$ *e* $B=C$ *então* $A=C$.

Como vimos anteriormente, um conjunto pode ser elemento de um outro conjunto. Vamos nos aprofundar um pouco mais nessa idéia e definirmos um importante conjunto cujos elementos são conjuntos. Seja A um conjunto. Definimos o **Conjunto das Partes** de A como sendo o conjunto cujos elementos são os subconjuntos de A. Vamos representá-lo por $\wp(A)$. Em símbolos:

$$\wp(A)=\{X|X\subseteq A\}$$

.

Exemplo 1.9 *Se* $A=\{a\}$ *então* $\wp(A)=\{\emptyset,\{a\}\}$*.*

Exemplo 1.10 *Se* $A=\emptyset$*, então* $\wp(\emptyset)=\{\emptyset\}$*.*

Exemplo 1.11 *Se* $A=\{a,b\}$ *então* $\wp(A)=\{\emptyset,\{a\},\{b\},\{a,b\}\}$*.*

Observação 1.7 *O conjunto* $\wp(A)$ *nunca é vazio pois o conjunto vazio é subconjunto de todo conjunto.*

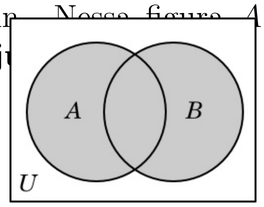
Observação 1.8 *Se o conjunto* A *tiver* n *elementos então o conjunto* $\wp(A)$ *terá* 2^n *elementos. Não vamos provar isso agora. Primeiro vamos entender o que significa* ***ter*** n ***elementos****. Isso ficará para breve quando estivermos falando de conjuntos finitos e infinitos.*

1.4 Operações com conjuntos

A nossa idéia agora é formar novos conjuntos a partir de outros. A formação desses novos conjuntos usará fortemente os termos **e**, **ou** e **não** vistos na disciplina de Argumentação em Matemática.
Sejam A e B conjuntos. A **união** de A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a pelo menos um dos dois conjuntos A ou B. Vamos representá-la por $A \cup B$. Em símbolos temos

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\}$$

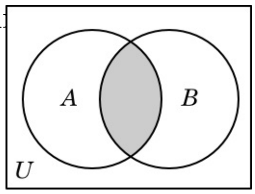
. Em outras palavras, o conjunto $A \cup B$ é o conjunto contendo todos os elementos que estão em A, em B ou em ambos. Na figura a seguir temos uma representação de $A \cup B$ em um diagrama de Venn. Nessa figura A e B estão contidos num conjunto maior U denominado **Conj**



Sejam A e B conjuntos. A **interseção** de A e B é o conjunto dos elementos que pertencem a ambos os conjuntos A e B. Vamos representá-la por $A \cap B$. Em símbolos temos

$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\}$$

. Na figura a seguir temos uma representação de $A \cap B$ em um diagrama de Venn. Nessa figura A e B estão contidos nu U denominado **Conjunto Universo**.



Exemplo 1.12 *Sejam* $A = \{x, y, z, p\}$ *e* $B = \{x, q\}$. *Então* $A \cup B = \{x, y, z, p, q\}$ *e* $A \cap B = \{x\}$.

Exemplo 1.13 *Sejam* $A = \{p \in \mathbb{N} | p \text{ é um número par}\}$ *e* $B = \{p \in \mathbb{N} | p \text{ é um número ímpar}\}$. *Então* $A \cup B = \mathbb{N}$ *e* $A \cap B = \emptyset$.

Observação 1.9 *Vemos imediatamente da definição que* $A, B \subseteq A \cup B$ *e que* $A \cap B \subseteq A, B$.

Observação 1.10 *Se* A *e* B *são conjuntos tais que* $A \cap B = \emptyset$, *diremos que* A *e* B *são* ***Conjuntos disjuntos***.

Reuniremos no Teorema a seguir as principais propriedades das União e da Interseção de conjuntos:

Teorema 1.2 *Sejam A, B e C conjuntos. Então valem as seguintes propriedades:*

1. *Se $X \subseteq A$ e $X \subseteq B$ então $X \subseteq A \cap B$,*

2. *Se $A \subseteq Y$ e $B \subseteq Y$ então $A \cup B \subseteq Y$,*

3. ***Comutatividade** $A \cup B = B \cup A$, e $A \cap B = B \cap A$,*

4. ***Associatividade** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$, e $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,*

5. ***Distributividade** $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ e $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$*

6. ***Identidade** $A \cup \emptyset = A$ e $A \cap \emptyset = \emptyset$,*

7. ***Idempotência** $A \cup A = A$ e $A \cap A = A$,*

8. ***Absorção** Se $A \subseteq B$ então $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$,*

9. ***Monotonicidade** Se $A \subseteq B$ então $A \cup C \subseteq B \cup C$ e $A \cap C \subseteq B \cap C$.*

Demonstração: Todas as propriedades decorrem das definições. Vamos provar uma das igualdades da propriedade (5), ficando outra igualdade e as demais como exercício para o leitor. Seja $x \in A \cap (B \cup C)$. Então $x \in A$ e $x \in B \cup C$. Assim, $x \in B$ ou $x \in C$. No primeiro caso, temos que $x \in A \cap B$, enquanto que no segundo, temos que $x \in A \cap C$. Em qualquer dos casos teremos então $x \in (A \cap B)$ ou $x \in (A \cap C)$, ou seja, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$, provando que $A \cap (B \cup C) \subseteq (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Seja agora $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$. Então $x \in A \cap B$ ou $x \in A \cap C$. No primeiro caso, temos que $x \in A$ e $x \in B$. Como $x \in B$, segue que $x \in B \cup C$. Portanto, do primeiro caso, concluímos que $x \in A \cap (B \cup C)$. Por um raciocínio totalmente análogo concluímos que, ocorrendo o segundo caso, teremos $x \in A \cap (B \cup C)$. Portanto, em qualquer dos casos teremos $x \in A \cap (B \cup C)$, mostrando que $(A \cap B) \cup (A \cap C) \subseteq A \cap (B \cup C)$. Portanto, a igualdade está provada. ■

Observação 1.11 *Os adjetivos dados a algumas das propriedades acima vêm dos mesmos adjetivos dados a propriedades análogas que os números e as operações com eles definidas possuem. Apenas a título de curiosidade, vamos atentar para a propriedade distributiva do produto com relação à adição que nos diz que se x, y e z são números reais, então*

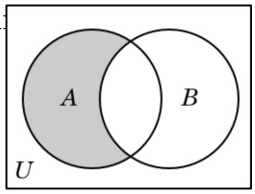
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$$

. Perceba a analogia existente entre essa propriedade e aquela que é válida para conjuntos.

Sejam A e B conjuntos. A **Diferença entre** A e B é o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A mas que não pertencem ao conjunto B. Vamos representá-la por $A - B$. Em símbolos temos

$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}$$

. Na figura a seguir temos uma representação de $A - B$ em um diagrama de Venn. Nessa figura A e B estão contidos nu U denominado **Conjunto Universo**.



Exemplo 1.14 *Sejam* $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ *e* $B = \{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$*. Então* $A - B = \{1, 2, 3\}$*. Também vemos que* $B - A = \{7, 8, 9, 10\}$*.*

Exemplo 1.15 *Se* $A = \mathbb{N}$ *e* $B = \{x \in \mathbb{N} | x > 10\}$*. Então* $A - B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$*. Nesse caso,* $B - A = \emptyset$*, uma vez que* $B \subset A$*.*

Vejamos agora as principais propriedades da diferença de conjuntos.

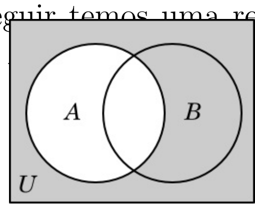
Teorema 1.3 *Sejam* A, B *e* C *conjuntos. Então valem as seguintes propriedades:*

1. $A - B \subseteq A$,
2. $(A - B) \cap B = \emptyset$,
3. $A - B = \emptyset \leftrightarrow A \subseteq B$,
4. *Se* $A \subseteq B$*, então* $A - C = A \cap (B - C)$,
5. *Se* $A \subseteq B$*, então* $C - B \subseteq C - A$,
6. $C - (A \cup B) = (C - A) \cap (C - B)$ *e* $C - (A \cap B) = (C - A) \cup (C - B)$,

Demonstração: Vamos provar apenas uma das igualdades da parte (6), deixando a outra e as demais propriedades como exercício para o leitor. Seja $x \in C - (A \cup B)$. Então $x \in C$ e $x \notin A \cup B$. Assim concluímos que $x \notin A$ e $x \notin B$. Como $x \in C$ e $x \notin A$, temos que $x \in (C - A)$. Analogamente, $x \in C$ e $x \notin B$, daí, $x \in (C - A) \cap (C - B)$, acarretando que $C - (A \cup B) \subseteq (C - A) \cap (C - B)$. Suponha agora que $x \in (C - A) \cap (C - B)$. Concluímos que $x \in C - A$ e que $x \in C - B$. Logo, $x \in C$ e $x \notin A$ e $x \notin B$. Assim, $x \in C - (A \cup B)$. Isso acarreta que $(C - A) \cap (C - B) \subset C - (A \cup B)$, donde a igualdade está provada. ■

Observação 1.12 *A propriedade (6) é conhecida como as* ***Leis de De Morgan****, em homenagem ao matemático Augustus de Morgan.*

A existência de um conjunto de todos os conjuntos, ou um conjunto universo leva a algumas contradições na Teoria dos Conjuntos. Entretanto, tomando-se o devido cuidado, podemos assumir essa hipótese sem problemas. Faremos isso a seguir para definirmos um importante conjunto. Suponha que $\mathbb{U}$ seja um conjunto universo e que $A \subseteq \mathbb{U}$. O **Complementar** de A com relação a $\mathbb{U}$ é o conjunto $\mathbb{U} - A$. Vamos representá-lo por A'. Na figura a seguir temos uma representação de A' em um diagrama de Venn. Nessa figura A e [illegible] um conjunto maior U.



Supondo que A e B estejam contidos em um conjunto universo $\mathbb{U}$, podemos dar algumas propriedades dos complementares:

Teorema 1.4 *Sejam A e B subconjuntos de um conjunto universo $\mathbb{U}$. Então valem as seguintes propriedades:*

1. $A - B = A \cap B'$,
2. $(A')' = A$,
3. $\emptyset' = \mathbb{U}$ *e* $\mathbb{U}' = \emptyset$,
4. $A \cap A' = \emptyset$ *e* $A \cup A' = \mathbb{U}$,
5. $A \subseteq B \leftrightarrow B' \subseteq A'$,
6. $(A \cup B)' = A' \cap B'$,
7. $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

Demonstração: A demonstração é feita usando as definições e o Teorema (1.3). Deixamos para o leitor como exercício.■

Capítulo 2

Grandezas e Proporções

2.1 Razão

Definição 2.1 *Grandezas são eventos que podem ser medidos e expressos através de números.*

Exemplo 2.1 *Algumas grandezas:*

- *Alunos matriculados na UFPB;*
- *Mensalidade escolar;*
- *Quantidade de um determinado produto.*

Definição 2.2 *Suponhamos que a grandeza A seja expressa pelo número a e a grandeza B pelo número b e que as mesmas sejam comparáveis. A razão*[1] *entre as grandeza A e B é o quociente*

$$a : b \text{ ou } \frac{a}{b}$$

onde a é chamado de antecedente e b de conseqüente ($b \neq 0$).

Exemplo 2.2 *Se 5 habitantes são analfabetos em cada 20 habitantes de um município, a razão entre o número de analfabetos pelo o número de habitantes é* $5 : 20 = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} = 1 : 4$.

[1] A palavra razão vem do latim *ratio* e significa a divisão ou o quociente entre dois números

Exemplo 2.3 *De cada 30 alunos matriculados, 2 gostam de matemática. A razão entre o número de alunos que gostam de matemática e o número de alunos matriculados é* $2:30 = \frac{2}{30} = \frac{1}{15} = 1:15$.

Exemplo 2.4 *A velocidade média, em geral, é uma grandeza obtida pela razão entre uma distância percorrida (expressa em quilômetros ou metros) e um tempo por ele gasto (expresso em horas, minutos ou segundos), ou seja,*

$$velocidade\ m\acute{e}dia = \frac{dist\hat{a}ncia\ percorrida}{tempo\ gasto}$$

Exemplo 2.5 *Uma das aplicações da razão entre duas grandezas se encontra na escala de redução ou escala de ampliação, conhecidas simplesmente como escala. Chamamos de escala de um desenho à razão entre o comprimento considerado no desenho e o comprimento real correspondente, ambos medidos na mesma unidade.*

$$escala = \frac{comprimento\ no\ desenho}{comprimento\ real}$$

Exemplo 2.6 *O cálculo da densidade demográfica, também chamada de população relativa de uma região é considerada uma aplicação de razão entre duas grandezas. Ela expressa a razão entre o numero de habitantes e a área ocupada em uma certa região.*

$$densidade\ demogr\acute{a}fica = \frac{n.\ de\ habitantes}{\acute{a}rea\ ocupada}$$

Exemplo 2.7 *Densidade de um corpo é mais uma aplicação de razão entre duas grandezas. Assim, a densidade (volumétrica) de um corpo é a razão entre a massa desse corpo, medida em* Kg *ou gramas e o seu volume, medido em* m^3, dm^3 *ou qualquer outra unidade de volume.*

$$densidade\ de\ um\ corpo = \frac{massa}{volume}$$

Exemplo 2.8 *Os egípcios trabalhavam muito com certas razões e descobriram a razão entre o comprimento de uma circunferência e seu diâmetro. Este é um fato fundamental pois esta razão é a mesma para toda circunferência. O nome desta razão é* π *e seu valor é aproximadamente:*

$$\pi = \frac{comprimento}{di\hat{a}metro} = 3,1415926535$$

2.2 Proporção

Definição 2.3 *Dadas duas razões $a : b$ e $c : d$, com b e d não nulos, teremos uma* ***proporção***[2] *se:*

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{ou} \quad a : b :: c : d$$

Observação 2.1 *A proporção acima é lida assim: a está para b assim como c está para d.*

Definição 2.4 *Com relação á proporção $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, temos:*

- *Os números a, b, c e d são denominados termos;*
- *Os números a e b são os dois primeiros termos;*
- *Os números c e d são os dois últimos termos;*
- *Os números a e c são os antecedentes;*
- *Os números b e d são os conseqüentes;*
- *Os números a e d são os extremos;*
- *Os números b e c são os meios;*
- *A divisão entre a e b e a divisão entre c e d, é uma constante K, denominada constante de proporcionalidade K dessa razão.*

2.2.1 Propriedades

Propriedade fundamental

Numa proporção o produto dos extremos é igual ao produto dos meios, ou seja:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow a \times d = b \times c$$

Exemplo 2.9 $\frac{6}{24} = \frac{24}{96}$ *é uma proporção, pois* $9 \times 96 = 24 \times 24 = 576$.

Exemplo 2.10 $\frac{3}{5} = \frac{2}{3}$ ***não*** *é uma proporção, pois* $9 = 3 \times 3 \neq 5 \times 2 = 10$.

[2] A palavra proporção em do latim *proportione* e significa uma relação entre as partes de uma grandeza, ou seja, é uma igualdade entre duas razões.

Exercício 2.1 *Escrever uma proporção com os números* 3, 5, 12 *e* 20.

Exercício 2.2 *Calcular o valor de x na proporção* $\dfrac{x}{40} = \dfrac{80}{200}$.

Exercício 2.3 *Determine os números x e y na proporção* $\dfrac{x}{5} = \dfrac{y}{4} = \dfrac{2}{6}$.

Outras propriedades

Na proporção $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, temos:

- A soma (diferença) dos dois primeiros termos está para o primeiro termo, assim como a soma (diferença) dos dois últimos está para o terceiro termo, isto é:
$$\frac{a \pm b}{a} = \frac{c \pm d}{c}$$

- A soma (diferença) dos dois primeiros termos está para o segundo termo, assim como a soma (diferença) dos dois últimos está para o quarto termo, isto é:
$$\frac{a \pm b}{b} = \frac{c \pm d}{d}$$

- A soma (diferença) dos antecedentes está para a soma (diferença) dos conseqüentes, assim como cada antecedente está para o seu conseqüente, isto é:
$$\frac{a \pm c}{b \pm d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

- Uma proporção não se altera se uma das razões for multiplicada por um número não nulo, isto é:
$$\frac{a}{b} = \frac{a.K_1}{b.K_1} = \frac{c.K_2}{d.K_2} = \frac{c}{d}$$

- Se trocarmos os meios ou os extremos de uma proporção, a mesma não se altera, isto é:
$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Longleftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a} \Longleftrightarrow \frac{d}{c} = \frac{b}{a}$$

- O produto dos antecedentes está para o produto dos conseqüentes, assim como o quadrado de cada antecedente está para quadrado do seu conseqüente, isto é:

$$\frac{a \times c}{b \times d} = \frac{a^2}{b^2}$$

Exercício 2.4 *Calcular x e y na proporção $\frac{x}{7} = \frac{y}{12}$, sabendo que $x + y = 76$.*[3]

Exercício 2.5 *Água e tinta estão misturados em um volume total de 28 litros, na razão de 9 : 5. Achar o volume de cada substância.*[4]

Exercício 2.6 *Determinar números A, B e C proporcionais a 2, 4 e 6, de modo que $A + B + C = 120$.*[5]

2.3 Grandezas Diretamente Proporcionais

Duas grandezas são ditas **diretamente proporcionais** quando, aumentando (diminuindo) uma delas numa determinada razão, a outra também aumenta (diminui) na mesma razão.

Se duas grandezas A e B são diretamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na mesma razão, isto é, existe uma constante K tal que: $\frac{a}{b} = K$.

Exemplo 2.11 *Uma torneira foi aberta para encher uma caixa com água. A cada 15 minutos é medida a altura do nível de água, surgindo a seguinte tabela:*

tempo	*altura*
15 *minutos*	50 *cm*
30 *minutos*	100 *cm*
45 *minutos*	150 *cm*

Observe que quando duplica o intervalo de tempo, a altura do nível da água também duplica e quando o intervalo de tempo é triplicado, a altura do nível da água também é triplicada. Usando razões, podemos descrever essa situação de outros modos:

[3] *R 2.4: $x = 28$ e $y = 48$*
[4] *R 2.5: $V_a = 18l$ e $V_t = 10l$*
[5] *R 2.6: $A = 20$, $B = 40$ e $C = 60$.*

- *Quando o intervalo de tempo passa de* 15 *min para* 30 *min, dizemos que o tempo varia na razão* 15/30*, enquanto que a altura da água varia de* 50 *cm para* 100 *cm, ou seja, a altura varia na razão* 50/100*. Observamos que estas duas razões são iguais:*
$$\frac{15}{30} = \frac{50}{100} = 12$$

- *Quando o intervalo de tempo varia de* 15 *min para* 45 *min, a altura varia de* 50 *cm para* 150 *cm. Nesse caso, o tempo varia na razão* 15/45 *e a altura na razão* 50/150*. Então, notamos que essas razões são iguais:*

$$\frac{15}{45} = \frac{50}{150} = 13$$

Concluímos que a razão entre o valor numérico do tempo que a torneira fica aberta e o valor numérico da altura atingida pela água é sempre igual, assim dizemos então que a altura do nível da água é diretamente proporcional ao tempo que a torneira ficou aberta.

Exemplo 2.12 *Considere um grupo de pessoas que, em férias, se instale num hotel que cobre R\$ 100,00 a diária individual. Vamos analisar a relação entre as grandezas numero de pessoas e despesa diária com hotel.*

N. de pessoas	*1*	*2*	*5*	*10*
Despesa diária	*100*	*200*	*500*	*1000*

2.4 Grandezas Inversamente Proporcionais

Duas grandezas são ditas **inversamente proporcionais** quando, aumentando (diminuindo) uma delas numa determinada razão, a outra também diminui (aumenta) na mesma razão.

Se duas grandezas A e B são inversamente proporcionais, os números que expressam essas grandezas variam na razão inversa, isto é, existe uma constante K tal que: $a \times b = K$

Exemplo 2.13 *Considerando o exemplo anterior e supondo que a quantia a ser gasta é de R\$ 2000,00. Vamos analisar a relação entre as grandezas número de pessoas e tempo de permanência no hotel:*

N. de pessoas	*1*	*2*	*4*	*10*
Permanência	*20*	*10*	*5*	*2*

Exercício 2.7 *Um muro de* $100m^2$ *será construído por operários que trabalharão durante um certo tempo. Analise a natureza da proporção entre as grandezas número de operários e dias de trabalho.*[6]

Exercício 2.8 *Uma estrada deverá ser construída por 20 operários que trabalharão durante um certo tempo. Analise a natureza da proporção entre as grandezas tamanho da estrada e dias de trabalho.*[7]

Exercício 2.9 *Determinar números* A, B *e* C *inversamente proporcionais a* 2, 4 *e* 6, *de modo que* $A + B + C = 220$.[8]

2.5 Regra de Três Simples

É um processo prático utilizado para resolver problemas que envolvam pares de grandezas direta ou inversamente proporcionais. Essas grandezas formam uma proporção em que se conhece 3 termos e o quarto termo é procurado.

Etapas para a resolução:

1. Dispor as grandezas, bem como os valores envolvidos da seguinte maneira:

Grandeza 1	Grandeza 2
a	b
x	c

2. Verificar se as grandezas são direta ou inversamente proporcionais, colocando setas:

Grandeza 1	Grandeza 2
$\Downarrow$ a	b $\Downarrow$
x	c

ou

Grandeza 1	Grandeza 2
$\Downarrow$ a	b $\Uparrow$
x	c

---

[6] *R* 2.7*: inversamente*

[7] *R* 2.8*: diretamente*

[8] *R* 2.9*:* $A = 120$, $B = 60$ *e* $C = 40$.

3. Escrever a proporção:
$$\frac{a}{x} = \frac{b}{c} \ ou \ \frac{a}{x} = \frac{c}{b}$$

4. Determinar o valor de x.

Exemplo 2.14 *Determinar a distância que um automóvel percorrerá em 8 horas, sabendo que , se a mesma velocidade for mantida, em 6 horas o carro percorrerá 900 Km.*

Distância (Km)	*Tempo (h)*
$\Downarrow$ *x*	*8* $\Downarrow$
900	*6*

Logo as grandezas são diretamente proporcionais e temos:

$$\frac{x}{900} = \frac{8}{6} \Leftrightarrow x = \frac{8 \times 900}{6} \Rightarrow x = 1200$$

Exemplo 2.15 *Numa fábrica, 16 operários com igual capacidade de trabalho, realizam uma tarefa durante 45 dias. Com 10 operários apenas, em quantos dias será realizada a mesma tarefa?*

N. de operários	*Dias trabalhados*
$\Downarrow$ *16*	*45* $\Uparrow$
10	*x*

Logo as grandezas são inversamente proporcionais e temos:

$$\frac{16}{10} = \frac{x}{45} \Leftrightarrow x = \frac{16 \times 45}{10} \Rightarrow x = 72$$

Exercício 2.10 *Uma torneira com a vazão de 9 litros por minuto, enche um tanque em 15 minutos. Em quantos minutos o tanque estará cheio se a vazão for diminuída para 7,7 litros por minuto?*[9]

Exercício 2.11 *Comprei 15 quilos de feijão por R$ 42,50. Quantos quilos poderia comprar, se tivesse R$ 70,00?*[10]

Exercício 2.12 *Ao participar de um treino de Fórmula 1, um corredor imprimindo a velocidade média de 180 Km/h fez um certo percurso em 20s. Se a sua velocidade média fosse de 200 Km/h, qual seria o tempo gasto no mesmo percurso?*[11]

[9] R 2.10*: 18 minutos.*
[10] R 2.11*: 28 quilos.*
[11] R 2.12*: 18 segundos*

Exercício 2.13 *Foram prescritos 100 mg VO de Fosfato sódico de prednisolona (cada 15 mg equivalem a 5 ml) suspensão de 6/6 h. Quantos mililitros devem ser administrados?*[12]

2.6 Regra de Três Composta

É um processo prático utilizado para resolver problemas que envolvam mais de duas grandezas proporcionais.

Etapas para a resolução:

1. Dispor as grandezas, bem como os valores envolvidos da seguinte maneira:

G_1	G_2	G_3	$\cdots$	G_n
a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_n
x	b_2	b_3	$\cdots$	b_n

2. Colocar as setas verticais comparativamente com a seta colocada na grandeza que contém a variável a ser calculada.

G_1	G_2	G_3	$\cdots$	G_n
$\Downarrow$ a_1	a_2 $\Uparrow$	a_3 $\Downarrow$	$\cdots$	a_n $\Uparrow$
x	b_2	b_3	$\cdots$	b_n

3. Montar a proporção:
$$\frac{a_1}{x} = \frac{b_2}{a_2} \times \frac{a_3}{b_3} \times \cdots \times \frac{b_n}{a_n}$$

4. Determinar o valor de x.

Exemplo 2.16 *Trabalhando 6 horas por dia durante 10 dias, 10 engenheiros executam projetos de 5 pontes. Quantos engenheiros seriam necessários para projetar 8 pontes trabalhando 8 horas por dia, durante 15 dias?*

Engenheiros	*horas*	*dias*	*projetos*
$\Downarrow$ 10	6 $\Uparrow$	10 $\Uparrow$	5 $\Downarrow$
x	8	15	8

Logo a proporção fica:
$$\frac{10}{x} = \frac{8}{6} \times \frac{15}{10} \times \frac{5}{8} \Rightarrow x = 8$$

[12] *R* 2.13*: 33,3 ml*

Exercício 2.14 *Um livro de 120 páginas, com 25 linhas por página é impresso em 4 horas, sendo utilizados 40* m^2 *de papel. Com o dobro da quantidade de papel, quantas horas seriam necessárias para imprimir um livro com 100 páginas com 30 linhas por página?*[13]

Exercício 2.15 *Um motociclista, rodando 4 h por dia, percorre em média 200 Km em 2 dias. Em quantos dias esse motociclista irá percorrer 500 Km, se rodar 5 h por dia?*[14]

Exercício 2.16 *Funcionando durante 6 dias, 5 máquinas produziram 400 peças de uma mercadoria. Quantas peças dessa mesma mercadoria serão produzidas por 7 máquinas iguais às primeiras, se essas máquinas funcionarem durante 9 dias?*[15]

2.7 Porcentagem

Praticamente todos os dias, observamos nos meios de comunicação, expressões matemáticas relacionadas com porcentagem. Toda razão da forma $\frac{a}{b}$ na qual o denominador $b = 100$, é chamada taxa de porcentagem ou simplesmente porcentagem ou ainda percentagem.

Historicamente, a expressão por cento[16] aparece nas principais obras de aritmética de autores italianos do século XV. O símbolo % surgiu como uma abreviatura da palavra cento utilizada nas operações mercantis.

Fórmula prática para resolver problemas que envolvam porcentagens:

$$\boxed{\text{Porcentagem} = \text{TAXA} \times \text{PRINCIPAL}}$$

onde PRINCIPAL é o número sobre o qual vai se calcular a porcentagem e TAXA é o valor fixo, tomado a partir de cada 100 partes do principal.

Exemplo 2.17 *Quanto é o valor de 13% de 200?*

$$valor = \frac{13}{100}.200 = 13.2 = 26$$

Exemplo 2.18 *Qual é a taxa que aplicada num capital de R\$ 720.000,00 resulta numa porcentagem de R\$ 21.600,00?*

$$21600 = \frac{taxa}{100}720000 \Leftrightarrow taxa = \frac{21600}{720000}100 = 3$$

[13] *R* 2.14*: 8 horas.*
[14] *R* 2.15*: 4 dias.*
[15] *R* 2.16*: 840 peças.*
[16] O termo por cento é proveniente do latim *per centum* e quer dizer por cem.

Exercício 2.17 *Dois postos de abastecimento misturam água ao álcool que vendem. No primeiro deles foram encontrados 7,5 litros de água em cada 300 litros de álcool e no segundo, 13,5 litros de água em cada 500 litros de álcool. Quantos porcentos o álcool é mais "aguado" que do outro?*[17]

Exercício 2.18 *Um fichário tem 25 fichas numeradas, sendo que 52% dessas fichas estão etiquetadas com um número par. Quantas fichas têm a etiqueta com número par e número ímpar?*[18]

Exercício 2.19 *Num torneio de basquete, uma determinada seleção disputou 4 partidas na primeira fase e venceu 3. Qual a porcentagem de vitórias obtida por essa seleção nessa fase?*[19]

Exercício 2.20 *Numa indústria há 255 empregadas. Esse número corresponde a 42,5% do total de empregados da indústria. Quantas pessoas trabalham nesse local? Quantos homens trabalham nessa indústria?*[20]

Exercício 2.21 *Ao comprar uma mercadoria, obtive um desconto de 8% sobre o preço marcado na etiqueta. Se paguei R$ 690,00 pela mercadoria, qual o preço original dessa mercadoria?*[21]

2.8 Aplicações

Exemplo 2.19 *A água H_2O tem sempre*[22] *na sua composição 11,11% de hidrogênio e 88,88% de oxigênio (porcentagem em massa), pois a massa atômica do hidrogênio é 1 e do oxigênio é 16, e a massa atômica da água é* $2_H + 16_{(O)} = 18_{(H_2O)}$.

Exercício 2.22 *Calcular a porcentagem (composição centesimal) de cada elemento nas substâncias abaixo:*

1) *Cloreto de Sódio:* $NaCl$

2) *Pirofosfato de sódio:* $Na_4P_2O_7$

3) *Sulfato cúprico penta-hidratado:* $CuSO_4.5H_2O$

[17] *R* 2.17*: No segundo posto, o álcool é 0,2% mais "aguado" que no primeiro.*
[18] *R* 2.18*: 13 fichas etiquetadas com número par e 12 com número ímpar.*
[19] *R* 2.19*: 75%*
[20] *R* 2.20*: Trabalham 600 pessoas, sendo que há 345 homens.*
[21] *R* 2.21*: R$ 750,00.*
[22] Lei de Proust: Qualquer reação química obedece sempre à mesma proporção em massa.

4) *Ácido sulfúrico:* H_2SO_4[23]

5) *Sacarose:* $C_{12}H_{22}O_{11}$

Onde as massas atômicas são: $H = 1$, $C = 12$, $O = 16$, $Na = 23$, $P = 31$, $S = 32$, $Cl = 35,5$ *e* $Cu = 63,5$.

Exercício 2.23 *Calcular a porcentagem de* SO_4 *e água no sulfato cúprico penta-hidratado.*

Exercício 2.24 *Uma substância, de massa molecular 180, contem 40% de carbono, 6,72% de hidrogênio e 53,28% de oxigênio. Qual a fórmula molecular dessa substânia?*[24]

Exercício 2.25 *Na analise de 0,40 g de um certo óxido de ferro revelou que continha 0,28 g de ferro e 0,12 g de oxigênio, qual a porcentagem de cada elemento? Tentar determinar uma fórmula mínima para esse óxido de ferro.* $(Fe = 56)$ [25]

Exercício 2.26 *Determinar a fórmula molecular de um óxido de fósforo que apresenta 43,6% de fósforo, 56,4% de oxigêniao (% em massa) e massa molecular 284.*[26]

Exercício 2.27 *Determinada substância de massa molecular 194, possui fórmula mínima* $C_4H_5N_2O$ *. O numero de átomos de nitrogênio contido em uma única molécula da substância é?*[27] $(N = 14)$

Exercício 2.28 *Uma amostra de sulfato, pesando 1,23 g, de magnésio cristalizado,* $MgSO_4.nH_2O$ *é aquecida até perder toda a água de cristalização. O sal anidro obtido,* $MgSO_4$*, pesou 0,6 g. Qual a fórmula molecular da amostra inicial?* $(Mg = 24)$[28]

Exercício 2.29 *Certo composto* A_xB_y *contém 9,1% em massa de A, o resto sendo B. Se o pesso do elemtnoto A for 30 e do B for 100, qual a proporção entre x e y?* [29]

---

[23] R 2.22: *2,04% de H, 32,65% de S e 65,31% O,* Fe_2O_3

[24] R 2.24: $C6_H12O_6$

[25] R 2.25: *70% de Fe e 30% de O e* Fe_2O_3

[26] R 2.26: P_4O12

[27] R 2.27: *4*

[28] R 2.28: $MgSO_4.7H_2O$

[29] R 2.29: *1:3*

Exercício 2.30 *Calcular a massa de óxido cúprico obtida a partir de 2,54 g de cobre metálico.*[30] *Considerar a equação química balanceada:*

$$2Cu + O_2 \longrightarrow 2CuO$$

Exercício 2.31 *Quais são as massas de ácido sulfúrico (H_2SO_4) e hidróxido de sódio ($NaOH$) necessárias para preparar 28,4 gramas de sulfato de sódio?*[31] *Considerar a equação química balanceada:*

$$H_2SO_4 + 2NaOH \longrightarrow Na_2SO_4 + 2H_2O$$

[30] R 2.30: *3,18 g de CuO*
[31] R 2.31: *19,6 g de H_2SO_4 e 16 g de $NaOH$*

Capítulo 3

Noções de Matemática Financeira

3.1 Juros

3.1.1 Juros Simples

Juro é toda compensação em dinheiro que se paga ou se recebe pela quantia em dinheiro que se empresta ou que é emprestada em função de uma taxa e do tempo. Quando falamos em juros, devemos considerar:

1. O dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado é chamado de **capital**.
2. A taxa de porcentagem que se paga ou se recebe pelo aluguel do dinheiro é denominada **taxa de juros**.
3. O tempo deve sempre ser indicado na mesma unidade a que está submetida a taxa, e em caso contrário, deve-se realizar a conversão para que tanto a taxa como a unidade de tempo estejam compatíveis, isto é, estejam na mesma unidade.
4. O total pago no final do empréstimo, que corresponde ao capital mais os juros, é denominado **montante**.

Para calcular os juros simples j de um capital C, durante t períodos com a taxa de $i\%$ ao período, basta usar a fórmula:

$$j = C \times t \times \frac{i}{100}$$

Exemplo 3.1 *O preço à vista de um aparelho é de R$ 450,00. A loja oferece este aparelho para pagamento em 5 prestações mensais e iguais porém, o preço passa a ser de R$ 652,50. Sabendo-se que a diferença entre o preço à prazo e o preço à vista é devida aos juros cobrados pela loja nesse período, qual é a taxa mensal de juros cobrada por essa loja?*

Os dados são: $\begin{cases} j = 652,5 - 450 = 202,5 \\ t = 5 \\ C = 450 \\ i = ? \end{cases}$

$$\Rightarrow 202,50 = 450 \times 5 \times \frac{i}{100} \Rightarrow x = 9$$

De outra forma, como o juros pago a cada mês foi de $\dfrac{202,50}{5} = 40,50$ *então a taxa mensal de juros, desse problema pode ser resolvido da seguinte forma: i% de* $450,00 = 40,50$
Resposta: A taxa de juros é de 9% ao mês.

Exercício 3.1 *Uma aplicação feita durante 2 meses a uma taxa de 3% ao mês, rendeu R$ 1.920,00 de juro. Qual foi o capital aplicado? Os dados são:* $\begin{cases} j = 1.920,00 \\ t = 2 \\ C = ? \\ i = 3\% \end{cases}$

$$\Rightarrow 1.920,00 = C \times 2 \times \frac{i}{100} \Rightarrow C = 32.000,00$$

De outra forma, como o capital que a aplicação rendeu mensalmente de juros foi de: $\dfrac{1920,00}{2} = 960,00$. *Se o capital aplicado é indicado por C, esse problema pode ser expresso por:* 3% *de* $C = 960,00$.
Resposta: O capital aplicado foi de R$ 32.000,00.

Exercício 3.2 *A quantia de R$3.000,00 é aplicada a juros simples de 5% ao mês, durante cinco anos. Calcule o montante ao final dos cinco anos.*[1]

Exercício 3.3 *Calcule o montante ao final de dez anos de um capital R$10.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 18% ao semestre.*[2]

Exercício 3.4 *Quais os juros produzidos pelo capital R$ 12.000,00 aplicados a uma taxa de juros simples de 10% ao bimestre durante 5 anos?*[3]

Exercício 3.5 *Um certo capital é aplicado em regime de juros simples, à uma taxa mensal de 5%. Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?*[4]

[1] R 3.2: *R$ 12.000,00.*
[2] R 3.3: *R$ 46.000,00*
[3] R 3.4: *R$ 36.000,00*
[4] R 3.5: *20 meses ou 1 ano e oito meses.*

3.1.2 Juros Compostos

Se P reais forem investidos a uma taxa de juros anual de r (expressa como decimal) e os juros forem compostos k vezes por ano, o saldo $S(t)$ após t anos será de

$$\boxed{S(t) = P\left(1 + \frac{r}{t}\right)^{kt} \text{ reais}}$$

3.1.3 Juros Compostos Continuamente

Se P reais forem investidos a uma taxa de juros anual de r (expressa como decimal) e os juros forem compostos continuamente, o saldo $S(t)$ após t anos será de

$$\boxed{S(t) = Pe^{rt} \text{ reais}}$$

3.2 Tempo de Duplicação

Se a quantia for investida a uma taxa de juros anual r e os juros forem compostos k vezes ao ano, então

$$\boxed{\text{Tempo de duplicação} = \frac{\ln 2}{k \ln(1 + r/k)}}$$

Se a quantia for investida a uma taxa de juros anual r e os juros forem compostos continuamente, então

$$\boxed{\text{Tempo de duplicação} = \frac{\ln 2}{r}}$$

3.3 Taxa Efetiva de Juros

Se o juros são compostos k vezes ao ano, a uma taxa anual de juros r, então

$$\boxed{\text{Taxa efetiva de juros} = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^{k} - 1}$$

Se o juros são compostos continuamente, a uma taxa anual de juros r, então

$$\boxed{\text{Taxa efetiva de juros} = e^{r} - 1}$$

3.4 Valor Presente

Se o juros são compostos k vezes ao ano, a uma taxa anual de juros r, o valor presente de S reais, pagável daqui a t anos é

$$\boxed{P = S\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kt} \text{ reais}}$$

Se o juros são compostos continuamente, a uma taxa anual de juros r, o valor presente de S reais, pagável daqui a t anos é

$$\boxed{P = Se^{-rt} \text{ reais}}$$