Universidade Federal da Paraíba
Centro de Ciências Exatas e da Natureza
Departamento de Matemática

Matemática Aplicada à Administração, Ciências Contábeis e Economia

Antônio de Andrade e Silva

Dedicatória

Aos meus filhos
José Augusto, Amanda
e Fernanda.

Prefácio

Estas notas de aula surgiram da experiência do autor quando este ministrou algumas vezes a disciplina para os cursos de Administração, Ciências Contábeis e Economia

O principal objetivo destas notas é fazer com que os alunos compreendam com clareza os conceitos introdutórios de matemática do ponto vista geométrico, numérico, algébrico e lingüístico. Desenvolvendo também a capacidade de modelagem de problemas matemáticos e provas envolvendo conjuntos, conjuntos numéricos, distância entre dois pontos, equação geral da reta, funções lineares, polinomiais, exponenciais, logarítmica e trigonométrica, bem como as noções intuitivas de limites, continuidade, diferenciabilidade e o comportamento de funções.

É nossa expectativa que este texto assuma o caráter de espinha dorsal de uma experiência permanentemente renovável, sendo, portanto, bem vindas às críticas e/ou sugestões apresentadas por todos - professores ou alunos quantos dele fizerem uso.

Para desenvolver a capacidade do estudante de pensar por si mesmo em termos das novas definições, incluímos no final de cada seção uma extensa lista de exercícios.

No capítulo 1 apresentaremos algumas definições e resultados sobre conjuntos, conjuntos numéricos, intervalos e equações e inequações que serão necessárias para o entendimento dos próximos capítulos.

No capítulo 2 apresentaremos o sistema de coordenadas cartesianas, distância entre dois pontos, equação geral da reta e aplicações.

No capítulo 3 apresentaremos as noções de funções e suas principais propriedades.

No capítulo 4 apresentaremos alguns tipos especiais de funções tais como: funções lineares, polinomiais, exponenciais, logarítmica, trigonométrica e aplicações.

No capítulo 5 apresentaremos, de um ponto de vista intuitivos, as noções de limites e continuidade, bem como suas principais propriedades.

No capítulo 6 apresentaremos, de um ponto de vista intuitivos, as noções de derivada, bem como suas principais propriedades.

Finalmente, no capítulo 7 aplicaremos os conhecimentos sobre derivadas para revolver problemas de máximo e mínimo, gráficos de funções, bem como taxas relacionadas.

Agradecemos aos colegas e alunos do Departamento de Matemática que direta ou indiretamente contribuíram para a realização deste trabalho.

Sumário

Capítulo 1

Números Reais

O principal objetivo deste capítulo é fornecer a base necessária para a boa compreensão dos números reais e suas propriedades através de um tratamento conciso sem, contudo, descurar do rigor matemático.

1.1 Conjuntos

A noção de conjunto é a própria estrutura para o pensamento da matemática abstrata. Assim, sem dúvida, para atacar a lista de noções indefinidas e os vários axiomas, relacionando-os, será tomada uma abordagem formal e/ou informal do assunto.

Um *conjunto* é formado de objetos ou entidades bem definidos. Os objetos que compõem um conjunto particular são chamados de *elementos* ou *membros*. (A teoria dos conjuntos foi desenvolvida pelo matemático russo Georg Cantor, 1845 - 1918).

Conjuntos e elementos serão indicados, salvo menção explícita em contrário, por letras maiúsculas e minúsculas do nosso alfabeto, respectivamente.

Quando um objeto x é um dos elementos que compõem o conjunto A, dizemos que x *pertence* a A ou A *contém* x, e escrevemos $x \in A$; caso contrário, escrevemos $x \notin A$.

Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A e B são *iguais*, denotado por $A = B$, se eles consistem dos mesmos elementos, isto é,

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B.$$

Caso contrário, $A \neq B$ (O símbolo $\Leftrightarrow$ significa "equivalente"). Assim, um conjunto é completamente determinado se conhecemos seus elementos.

Um conjunto com um número finito de elementos pode ser exibido escrevendo todos os seus elementos entre chaves e inserindo vírgulas entre eles. Assim,

$$\{a, b, c\}$$

denota o conjunto cujos elementos são a, b e c. A ordem em que os elementos são escritos não altera o conjunto. Assim,

$$\{a, b, c\} \text{ e } \{b, c, a\}$$

denota o mesmo conjunto. Também, repetição de um elemento não tem efeito. Por exemplo,

$$\{a, b, c, b\} = \{a, b, c\}.$$

Um conjunto com um único elemento é chamado *conjunto unitário*, por exemplo, $A = \{a\}$.

Dado um conjunto A e uma propriedade $P(x)$, existe um único conjunto B cujos elementos são precisamente aqueles elementos x de A tal que $P(x)$ é verdadeira e denotado por

$$B = \{x \in A : P(x)\},$$

onde ":" lê-se *tal que*. Por exemplo,

$$\{x : x \text{ é uma vogal}\} = \{a, e, i, o, u\}.$$

Um modo de representar os elementos de um conjunto é através de pontos interiores a uma linha fechada e não entrelaçada no plano. Quando a linha fechada é um círculo chamamos de diagrama de Venn (matemático inglês John Venn, 1834 - 1923). Por exemplo,

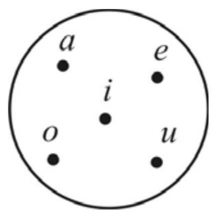

Figura 1.1: Diagrama de Venn.

Sejam A e B conjuntos. Dizemos que A é um *subconjunto* de B se todo elemento de A é um elemento de B, isto é,

$$x \in A \Rightarrow x \in B.$$

Se A é um subconjunto de B, denotamos por $A \subseteq B$ (O símbolo $\Rightarrow$ significa "implica" e o símbolo $\subseteq$ significa "está contido ou igual"). Na definição, acima, não está excluída a possibilidade de A e B serem iguais. Se $A \subseteq B$ e $A \neq B$, dizemos que A é um *subconjunto próprio* de B e denotamos por $A \subset B$ (O símbolo $\subset$ significa "está contido propriamente"). Se o conjunto A não está contido no conjunto B, denotamos por $A \nsubseteq B$, isto é, existe $x \in A$ tal que $x \notin B$.

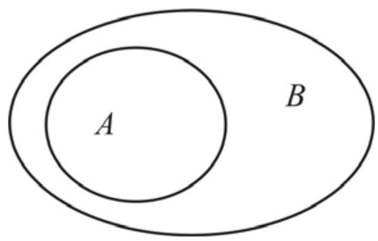

Figura 1.2: A é um subconjunto de B.

O termo *conjunto-universo* (ou *universal*) é, às vezes, usado para um conjunto U que contém todos os conjuntos em um dado contexto. Por exemplo, na Geometria Plana, o universo é o conjunto de todos os pontos do plano. Assim, admitiremos, no que segue, que todos os conjuntos considerados sejam subconjuntos de um conjunto-universo U.

É possível citar uma propriedade que não possa ser gozada por qualquer elemento. Neste caso, o conjunto

$$\{x \in U : P(x)\}$$

não possui elemento algum. Por exemplo, se

$$U = \{a, e, i, o, u\},$$

então o conjunto

$$A = \{x \in U : x \text{ é uma consoante}\}$$

não possui elemento algum. Esse conjunto é conhecido como o *conjunto vazio* e denotado por $\emptyset$. Note que o conjunto vazio $\emptyset$ está contido em qualquer conjunto. De fato,

$$x \notin A \Rightarrow x \notin \emptyset,$$

pois $\emptyset$ não contém nenhum elemento.

Sejam A e B subconjuntos de U. A *união* de A e B, denotada por $A \cup B$, é o conjunto

$$A \cup B = \{x \in U : x \in A \text{ ou } x \in B\}.$$

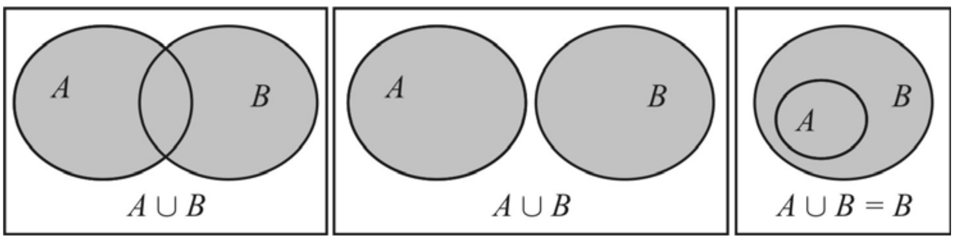

Figura 1.3: A união de A e B.

Sejam A e B subconjuntos de U. A *interseção* de A e B, denotada por $A \cap B$, é o conjunto

$$A \cap B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \in B\}$$

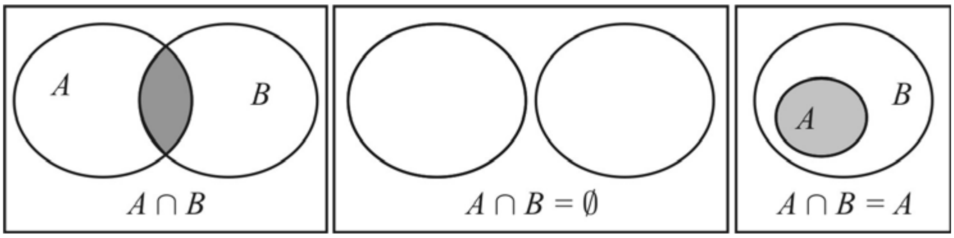

Figura 1.4: A interseção de A e B.

Sejam A e B subconjuntos de U. A *diferença* de A e B, denotada por $A - B$, é o conjunto

$$A - B = \{x \in U : x \in A \text{ e } x \notin B\}.$$

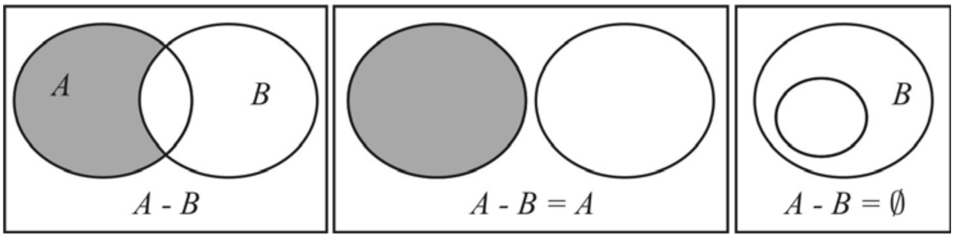

Figura 1.5: A diferença de A e B.

Se $A \subseteq B$, então $B - A$ é chamado o *complementar* de A em B. Os conjuntos A e B são chamados *disjuntos* se $A \cap B = \emptyset$. O complementar de A em U é simplesmente chamado de complementar de A e denotado por A' ou A^c, sem referência explícita a U. Assim,

$$A - B = A \cap B'.$$

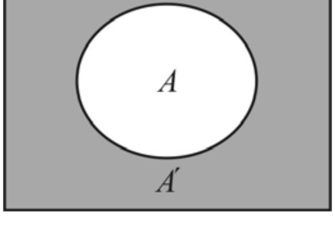

Figura 1.6: O complemento de A.

Exemplo 1.1 *Sejam* $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ *e* $C = \{1, 2, 4, 5\}$.

Então:

$$\begin{aligned} A \cup B &= \{1,2,3,4,5\} \\ A \cap B &= \{2\} \\ A - B &= \{1,4\} \\ B - A &= \{3,5\} \\ A - C &= \emptyset \\ A' &= \{0,3,5,6\} \\ B' &= \{0,1,4,6\}. \end{aligned}$$

É fácil verificar que:

$$\begin{aligned} x &\notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \ \text{ e } \ x \notin B. \\ x &\notin A \cap B \Leftrightarrow x \notin A \ \text{ ou } \ x \notin B. \\ x &\notin A - B \Leftrightarrow x \notin A \ \text{ ou } \ x \in B. \\ x &\notin A \Leftrightarrow x \in A'. \end{aligned}$$

Seja A um conjunto qualquer. Então o conjunto cujos elementos são subconjuntos de A é chamado o *conjunto de potências* de A e denotado por $\mathcal{P}(A)$, isto é,

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

Note que o conjunto vazio $\emptyset$ e o conjunto A (ele próprio) são subconjuntos de A e, portanto, são elementos de $\mathcal{P}(A)$.

Exemplo 1.2 *Seja* $A = \{0,1\}$. *Então os subconjuntos de* A *são* $\emptyset, \{0\}, \{1\}$ *e* A. *Logo,*

$$\mathcal{P}(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, A\}.$$

Se A é o conjunto vazio $\emptyset$, então $\mathcal{P}(A)$ tem um elemento, a saber $\emptyset$. Note que x e $\{x\}$ não são o mesmo, pois x representa um elemento, enquanto $\{x\}$ representa um conjunto. Se $x \in A$, então $\{x\} \in \mathcal{P}(A)$.

EXERCÍCIOS

---

1. Se $A = \{a,b,c\}$ e $B = \{a,d\}$, determinar $A - B$; $B - A$; $A \cap B$ e $A \cup B$.

2. Se $A \cap B = \{a,c\}$, $A - B = \{b\}$ e $A \cup B = \{a,b,c,d\}$, determinar A e B.

3. Se $U = \{a,b,c,d,e,f\}$, $A = \{c,d,e\}$, $B = \{a,b,c\}$ e $C = \{a,b,c,d\}$, determinar

(a)	$A' \cap B' \cap C'$	(f)	$(A' \cup B')'$
(b)	$(A - B) \cup (B - A)$	(g)	$(A \cup B) - C'$
(c)	$(A \cup B) - (A \cap B)$	(h)	$(A - C) - (B - A)$
(d)	$(B - A) \cap C$	(i)	$(B - A) - [(C - A) \cup (C - B)]$
(e)	$(A' - B') \cup C$	(j)	$(C - A) \cup B.$

4. Se $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, determinar

(a)	$A = \{x \in U : x \text{ é par}\}$	(d)	$D = \{x \in U : x \text{ é múltiplo de } 2\}$
(b)	$B = \{x \in U : x \text{ é ímpar}\}$	(e)	$E = \{x \in U : x \text{ é múltiplo de } 3\}$
(c)	$C = \{x \in U : x \text{ é primo}\}$	(f)	$F = \{x \in U : x \text{ é múltiplo de } 10\}$.

5. Sejam A e B subconjuntos de U. Mostrar que$(A \cup B)' = A' \cap B'$ e $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

6. Numa faculdade em que estudam 250 alunos houve, no final do semestre, reposição nas disciplinas de Matemática e Português, sendo que 10 alunos fizeram reposição das duas matérias, 42 fizeram reposição de Português e 187 alunos não ficaram em reposição. Determinar:

   (a) Quantos alunos ficaram, no total, em reposição?

   (b) Quantos fizeram reposição apenas em Matemática?

   (c) Quantos ficaram em apenas uma matéria?

7. Se $A \cap C = \{2, 7\}$, $B \cap C = \{2, 5, 6\}$, $A - B = \{4, 7, 8\}$, $A - C = \{4, 8\}$, $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ e $A \cup B \cup C = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$, determinar A, B e C.

1.2 Conjuntos Numéricos

O primeiro conjunto numérico a surgir foi o conjunto dos *números naturais*

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}.$$

Esse conjunto tinha, originalmente, a capacidade de representar "todas" as quantidades e, posteriormente, com o advento das operações elementares, em particular a adição e a multiplicação, foi possível somar e multiplicar dois números quaisquer de $\mathbb{N}$, obtendo-se um número de $\mathbb{N}$, o que em linguagem moderna significa dizer que em $\mathbb{N}$ é fechado em relação à soma e à multiplicação, isto é,

$$\forall \ x, y \in \mathbb{N} \Rightarrow x + y \in \mathbb{N} \ \text{ e } \ x \cdot y \in \mathbb{N}.$$

(O símbolo $\forall$ significa "para todo" ou "qualquer que seja").

Com a subtração surgiu um problema, que era o da impossibilidade de se subtrair um número do outro quando o primeiro era menor do que o segundo ou de resolver equações do tipo

$$x + 2 = 0.$$

Daí, a necessidade de se construir um conjunto contendo uma "cópia" de $\mathbb{N}$ e onde pudéssemos, além de somar e multiplicar, subtrair um elemento do outro sem qualquer restrição. Assim, surgiu o conjunto dos *números inteiros*

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

Vamos destacar alguns subconjuntos de $\mathbb{Z}$:

1. O conjunto dos números inteiros positivos:

$$\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}.$$

2. O conjunto dos números inteiros negativos:

$$\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0\}.$$

3. O conjunto dos números inteiros menos o zero:

$$\mathbb{Z}^* = \mathbb{Z} - \{0\}.$$

Teorema 1.3 (Algoritmo da Divisão) *Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \in \mathbb{Z}_+^*$. Então existem únicos $q, r \in \mathbb{Z}$ tais que*

$$a = qb + r, \quad \textit{onde } r \in \{0, 1, \ldots, b-1\}.$$

■

Exemplo 1.4 *Como*

$$\begin{aligned} -15 &= (-3) \cdot 4 - 3 \\ &= (-3) \cdot 4 - 4 + 1 \\ &= (-4) \cdot 4 + 1 \end{aligned}$$

temos que o quociente e o resto da divisão de -15 por 4 é -4 e 1, respectivamente.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $b \neq 0$. Dizemos que b *divide* a ou b *é um divisor de* a ou a *é um múltiplo de* b, denotado por $b \mid a$, se existir $c \in \mathbb{Z}$ tal que

$$a = b \cdot c.$$

Caso contrário, dizemos que b *não divide* a, denotado por $b \nmid a$. Por exemplo, $5 \mid 15$, pois $15 = 3 \cdot 5$ e $4 \nmid 15$, pois não existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que

$$15 = 4 \cdot c.$$

Seja $a \in \mathbb{Z}$. Dizemos que a é um *número par* se $2 \mid a$, caso contrário, a é um *número ímpar*. Por exemplo, 26 é um número par, pois $2 \mid 26$, enquanto 27 é um número ímpar, pois $2 \nmid 27$. Seja $p \in \mathbb{Z}$. Dizemos que p é um *número primo* se $p \neq \pm 1$ e os únicos divisores positivos de p são 1 e p. Caso contrário, p é chamado um *número composto*, isto é,

$$\exists\ a, b \in \{2, 3, \ldots, p-1\} \text{ tais que } p = ab.$$

(O símbolo $\exists$ significa "existe").

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Dizemos que um inteiro positivo $d \in \mathbb{N}$ é o *máximo divisor comum* de a e b, denotado por $\text{mdc}(a, b) = d$, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $d \mid a$ e $d \mid b$;

2. Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então $c \mid d$.

Observação 1.5 *A condição* (*1*) *diz que d é um divisor comum de a e b,* (*2*) *diz que d é o maior divisor comum de a e b. Se $a, b \in \mathbb{Z}^*$ e $\operatorname{mdc}(a, b)$ existe, então ele é único* (*Prove isto!*).

Exemplo 1.6 *Determinar o máximo divisor comum de* 21 *e* 35*. Além disso, determinar todos os $r, s \in \mathbb{Z}$, tais que*

$$\operatorname{mdc}(21, 35) = 21r + 35s.$$

Solução. Sejam

$$A = \{1, 3, 7, 21\} \text{ e } B = \{1, 5, 7, 35\}$$

os divisores positivos de 21 e 35, respectivamente. Então

$$A \cap B = \{1, 7\}$$

é o conjunto dos divisores comuns de 21 e 35. Logo, 7 é o maior divisor comum de 21 e 35. Portanto,

$$\operatorname{mdc}(21, 35) = 7.$$

Podemos, também, determinar o máximo divisor comum de 35 e 21 aplicando sucessivamente o algoritmo da divisão (confira tabela abaixo):

$$\begin{array}{c|c|c|c}
 & 1 & 1 & 2 \\
\hline
35 & 21 & 14 & \boxed{7} \\
\hline
14 & 7 & 0 &
\end{array}.$$

Como

$$\begin{aligned}
21 &= 1 \cdot 14 + 7 \Rightarrow 7 = 21 + (-1)14 \text{ e} \\
35 &= 1 \cdot 21 + 14 \Rightarrow 14 = 35 + (-1)21
\end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned}
7 &= 21 + (-1)14 \\
&= 21 + (-1)[35 + (-1)21] \\
&= 21 + (-1)35 + 21 \\
&= 2 \cdot 21 + (-1)35.
\end{aligned}$$

Assim,

$$7 = \operatorname{mdc}(21, 35) = 2 \cdot 21 + (-1)35.$$

Portanto, somando e subtraindo $21 \cdot 35k$, obtemos

$$7 = (2 - 35k)21 + (-1 + 21k)35, \ \ \forall k \in \mathbb{Z},$$

isto é,

$$\mathrm{mdc}(21, 35) = 21r + 35s$$

é a solução geral da equação, onde

$$r = 2 - 35k \ \text{ e } \ s = -1 + 21k, \forall \ k \in \mathbb{Z}.$$

Além disso, para encontrar as soluções positivas desta equação, basta resolver as inequações

$$-1 + 21k \geq 0 \ \text{ e } \ 2 - 35k \geq 0.$$

Neste caso a equação não possui solução positiva.

Sejam $a, b \in \mathbb{Z}$, com $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Dizemos que um inteiro positivo $m \in \mathbb{Z}_+^*$ é o *mínimo múltiplo comum* de a e b, denotado por $\mathrm{mmc}(a, b)$, se as seguintes condições são satisfeitas:

1. $a \mid m$ e $b \mid m$.

2. Se $a \mid c$ e $b \mid c$, então $m \mid c$.

Observação 1.7 *A condição* (*1*) *diz que* m *é um múltiplo comum de* a *e* b, (*2*) *diz que* m *é o menor múltiplo comum de* a *e* b. *Se* $a, b \in \mathbb{Z}^*$ *e* $\mathrm{mmc}(a, b)$ *existe, então ele é único* (*Prove isto*!). *Além disso,*

$$\mathrm{mdc}(a, b) \cdot \mathrm{mmc}(a, b) = ab, \ \ \forall a, b \in \mathbb{N}.$$

De fato, suponhamos que $m = \mathrm{mmc}(a, b)$. *Como* $a \mid ab$ *e* $b \mid ab$ *temos, por* (*2*), *que existe* $d \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$ab = dm.$$

Mas, por (*1*), *existem* $r, s \in \mathbb{N}$ *tais que* $m = ar$ *e* $m = bs$. *Logo,*

$$ab = dm = dar \ \text{ e } \ ab = dm = dbs,$$

de modo que $b = dr$ *e* $a = ds$, *isto é,* $d \mid a$ *e* $d \mid b$. *Por outro lado, se* $c \mid a$ *e* $c \mid b$, *então existem* $t, u \in \mathbb{N}$ *tais que* $a = ct$ *e* $b = cu$. *Assim,* $a \mid ctu$ *e* $b \mid ctu$. *Logo, por* (*2*), $m \mid ctu$, *digamos,* $ctu = vm$, *para algum* $v \in \mathbb{N}$. *Então*

$$dm = ab = (ct)(cu) = cvm \Rightarrow c \mid d.$$

Portanto, $d = \mathrm{mdc}(a, b)$.

Exemplo 1.8 *Calcular o mínimo múltiplo comum de* 21 *e* 35.

Solução. Sejam

$$A = \{21, 42, 63, 84, 105, 126, \ldots\} \text{ e } B = \{35, 70, 105, 140, \ldots\}$$

os múltiplos positivos de 21 e 35, respectivamente. Então

$$A \cap B = \{105, 210, 305, \ldots\}.$$

é o conjunto de todos os múltiplos comuns de 21 e 35. Logo, 105 é o menor múltiplo comum de 21 e 35. Portanto, o

$$\text{mmc}(21, 35) = 105.$$

Podemos, também, determinar o mínimo múltiplo comum de 21 e 35 usando a seguinte tabela:

$$\begin{array}{cc|c} 21 & 35 & 3 \\ 7 & 35 & 5 \\ 7 & 7 & 7 \\ 1 & 1 & \end{array}.$$

Portanto, $\text{mmc}(21, 35) = 3 \cdot 5 \cdot 7 = 105$.

No conjunto $\mathbb{Z}$ não temos problemas com a subtração, isto é, podemos subtrair um elemento qualquer de outro sem qualquer restrição, mas surge a impossibilidade de se efetuar a divisão de certos números inteiros ou de resolver equações do tipo

$$2x - 1 = 0.$$

Assim, surgiu o conjunto dos *números racionais*

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, \ \text{com } b \neq 0 \right\}.$$

Note que $\frac{a}{b}$ representa a divisão de a por b e, por isso, b é diferente de zero.

Seja $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Dizemos que x é uma *fração irredutível* se $\text{mdc}(a, b) = 1$, caso contrário, é x uma *fração redutível*. Por exemplo, $x = \frac{5}{9}$ é uma fração irredutível, enquanto $x = \frac{15}{35}$ é uma fração redutível.

Sejam $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$. Então:

1. $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} \in \mathbb{Q}$;

2. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d} \in \mathbb{Q}$.

Note que estas operações possuem as seguintes propriedades:

1. A adição é associativa,
$$x + (y + z) = (x + y) + z,$$
para todos $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

2. Existe um único elemento 0 (zero) em $\mathbb{Q}$ tal que
$$x + 0 = 0 + x = x,$$
para todo $x \in \mathbb{Q}$.

3. A cada x em $\mathbb{Q}$ corresponde um único elemento $-x$ (oposto) em $\mathbb{Q}$ tal que
$$x + (-x) = (-x) + x = 0.$$

4. A adição é comutativa,
$$x + y = y + x,$$
para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

5. A multiplicação é associativa,
$$x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z,$$
para todos $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

6. Existe um único elemento 1 (um) em $\mathbb{Q}$ tal que
$$x \cdot 1 = 1 \cdot x = x,$$
para todo $x \in \mathbb{Q}$.

7. A cada x em $\mathbb{Q}$ corresponde um único elemento x^{-1} ou $\frac{1}{x}$ (inverso) em $\mathbb{Q}$ tal que
$$x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$$

8. A multiplicação é comutativa,
$$x \cdot y = y \cdot x,$$
para todos $x, y \in \mathbb{Q}$.

9. A multiplicação é distributiva com relação à adição,
$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \ \text{ e } \ (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$
para todos $x, y, z \in \mathbb{Q}$.

Neste caso, dizemos que $\mathbb{Q}$ é um *corpo*. Se $x = \frac{a}{b}$, então $x^{-1} = \frac{b}{a}$, pois
$$x^{-1} = \frac{c}{d} \Rightarrow x \cdot x^{-1} = 1 \Rightarrow \frac{a \cdot c}{b \cdot d} = 1 \Rightarrow \frac{c}{d} = \frac{b}{a}.$$
Portanto,
$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^{-1} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c},$$
isto é, na divisão de uma fração por uma outra fração: conserva-se a primeira e multiplica-se pela segunda invertida.

Observação 1.9 *Todo número racional é uma decimal exata ou uma dízima periódica e vice-versa.* (*Introduzida pelo matemático holandês Simon Stevin, 1548 - 1620*)

Exemplo 1.10 *Os números* $\frac{1}{8} = 0,125$ *e* $\frac{1}{3} = 0,333\cdots = 0,\overline{3}$*, onde* $\overline{x}$ *indica uma repetição sucessiva do período* x*.*

Exemplo 1.11 *Determinar a fração correspondente a dízima periódica* $0,\overline{32}$*.*

Solução. Esse exemplo trata de uma dízima periódica simples (simples quer dizer que o período começa logo após a vírgula) sem parte inteira. Seja

$$x = 0,\overline{32}. \tag{1.1}$$

Multiplicando (1.1) por 100, obtemos

$$\begin{aligned} 100x &= 32,\overline{32} \\ &= 32 + 0,\overline{32} \\ &= 32 + x. \end{aligned}$$

Logo,

$$99x = 32 \Rightarrow x = \frac{32}{99}.$$

Portanto,

$$0,\overline{32} = \frac{32}{99}.$$

Note que "*toda dízima periódica simples é igual a uma fração, cujo numerador é igual a um período e cujo denominador é constituído de tantos* 9 *quantos são os algarismos do período.*"

Exemplo 1.12 *Determinar a fração correspondente a dízima periódica* $2,3\overline{18}$*.*

Solução. Esse exemplo trata de uma dízima periódica composta com parte inteira. Seja

$$x = 0,3\overline{18}. \tag{1.2}$$

Multiplicando (1.2) por 10, obtemos

$$10x = 3,\overline{18} = 3 + 0,\overline{18}.$$

Pelo Exemplo acima, obtemos

$$0,\overline{18} = \frac{18}{99}.$$

Logo,

$$10x = 3 + \frac{18}{99} = \frac{99 \cdot 3 + 18}{99} = \frac{(100 - 1) \cdot 3 + 18}{99} = \frac{318 - 3}{99}.$$

Portanto,

$$x = \frac{315}{990} = \frac{7}{22}.$$

Assim,
$$2,3\overline{18} = 2 + 0,3\overline{18} = 2 + \frac{7}{22} = \frac{51}{22}.$$
Note que "*toda dízima periódica composta é igual a uma fração, cujo numerador é igual à parte não periódica seguida de um período menos a parte não periódica e cujo denominador é constituído de tantos* 9 *quantos são os algarismos do período, seguidos de tantos* 0 *quantos são os algarismos da parte não periódica.*"

Exemplo 1.13 *A dízima*
$$0,101001000100001\cdots$$
não é periódica, pois existem n zeros entre o n-ésimo e o $(n+1)$-ésimo 1*. Note que*
$$0,101001000100001\cdots = 0,x_1x_2x_3x_4\cdots$$
onde
$$x_n = \begin{cases} 1 & \textit{se } n \textit{ é um número da forma } \frac{k(k+1)}{2}, \\ 0 & \textit{caso contrário.} \end{cases}$$

Assim, surgiu o conjunto dos *números irracionais* $\mathbb{I}$ (Uma teoria dos números irracionais foi desenvolvida pelo matemático alemão Richard Dedekind, 1831 - 1916). Os números racionais e irracionais são chamados *números reais* ou, simplesmente, *números.* Notação
$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}.$$
Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então $x + y \in \mathbb{R}$ e $xy \in \mathbb{R}$. Com estas operações o conjunto $\mathbb{R}$ é um corpo.

Propriedade 1.14 *Sejam $a, b, x \in \mathbb{R}$. Então*:

1. *Se $a + x = a$, então $x = 0$;*
2. *Se $b \neq 0$ e $b \cdot x = b$, então $x = 1$;*
3. *Se $a + b = 0$, então $b = -a$;*
4. *A equação $a + x = b$ tem uma única solução $x = (-a) + b$;*
5. *Se $a \neq 0$, a equação $a \cdot x = b$ tem uma única solução $x = a^{-1} \cdot b = \frac{b}{a}$;*
6. $x \cdot 0 = 0$;
7. $-x = (-1)x$;
8. $-(a + b) = (-a) + (-b)$;
9. $-(-x) = x$;

10. $(-1)(-1) = 1$.

Prova. Vamos provar apenas o item 8.

$$-(a+b) = (-1)(a+b) = (-1)a + (-1)b = (-a) + (-b).$$

■

Lema 1.15 *$\sqrt{2}$ é um número irracional.*

Prova. Suponhamos, por absurdo, que $\sqrt{2}$ seja um número racional, digamos

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

com $\mathrm{mdc}(a,b) = 1$, isto é, $\frac{a}{b}$ é uma fração irredutível. Elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos

$$2 = \frac{a^2}{b^2} \text{ ou } 2b^2 = a^2.$$

Logo, $2 \mid a^2$ implica que $2 \mid a$ (prove isto!) e, assim, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = 2c$. Assim,

$$2b^2 = 4c^2 \Leftrightarrow b^2 = 2c^2,$$

de modo análogo, $2 \mid b$. Portanto,

$$2 \mid \mathrm{mdc}(a,b),$$

ou ainda, $2 \mid 1$, o que é uma contradição. ■

EXERCÍCIOS

---

1. Efetuar as operações indicadas:

   (a) $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ (c) $1 + \frac{4}{5}$ (e) $5 \cdot \frac{2}{7}$ (g) $(\frac{1}{4} - \frac{2}{3}) \div \frac{3}{4}$
   (b) $\frac{1}{4} - \frac{2}{3}$ (d) $-\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{7}$ (f) $\frac{3}{4} \div \frac{5}{6}$ (h) $-\frac{3}{5} \div (\frac{2}{7} + \frac{1}{5})$.

2. Determinar se a representação decimal dos números racionais abaixo é exata ou periódica:

   (a) $\frac{7}{30}$ (b) $\frac{11}{50}$ (c) $\frac{4}{45}$ (d) $\frac{13}{40}$ (e) $\frac{7}{13}$ (f) $\frac{17}{5}$.

3. Calcular a representação decimal do número racional $\frac{2}{7}$.

4. Calcular a representação decimal do número racional $\frac{1}{17}$.

5. Determinar a fração correspondente às dízimas periódicas:

   (a) $0,343343\cdots$ (c) $3,266\cdots$ (e) $0,21507507\cdots$
   (b) $0,714285714285\cdots$ (d) $1,333\cdots$ (f) $0,0002727\cdots$

6. Seja $p \in \mathbb{N}$ um número primo. Mostrar que $\sqrt{p}$ é irracional.

7. Sejam $r, s \in \mathbb{R}$, com $r \neq 0$. Mostrar que se r é racional e s é irracional, então $r+s$, $r-s$, rs e $\frac{1}{s}$ são irracionais. Conclua que se r, s são irracionais e $r^2 - s^2$ é racional não-nulo, então $r+s$ e $r-s$ são irracionais. Por exemplo, se $r = \sqrt{3}$ e $s = \sqrt{2}$.

8. Calcular o $\text{mdc}(180, 252)$.

9. Calcular $r, s \in \mathbb{Z}$ tais que $\text{mdc}(a, b) = ra + sb$ nos seguintes casos:

   (a) $a = 21$ e $b = 35$ (c) $a = 20$ e $b = 13$ (e) $a = 180$ e $b = 252$
   (b) $a = 11$ e $b = 15$ (d) $a = 69$ e $b = 372$ (f) $a = 275$ e $b = 792$.

10. Mostrar que o quadrado de qualquer inteiro ímpar sempre deixa resto 1 quando dividido por 8.

11. Mostrar que $a^2 + b^2$ nunca deixa resto 3 quando dividido por 4, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.

12. Em uma loja dois produtos custam \$71, 00 e \$83, 00, respectivamente. Que quantidade inteiras de ambos podem ser compradas com \$1.670, 00?

13. Escreva o número 300 como soma de dois inteiros positivos de tal forma que um seja múltiplo de 7 e o outro seja múltiplo de 17.

14. Um terreno retângular, com dimensões 7.200 m por 2.700 m, respectivamente, foi dividido em lotes quadrados. Determinar a maior área possível para esses lotes.

15. Determinar o menor inteiro positivo que tem para restos 2, 3 e 4 quando dividido, respectivamente, por 3, 4 e 5.

16. Determinar o menor inteiro positivo que tem para restos 1, 2, 3, 4 e 5 quando dividido, respectivamente, por 2, 3, 4, 5 e 6.

17. Um produto é oferecido ao mercado consumidor apenas em embalagens dos tipos x, y e z e contendo cada uma 15, 24 e 100 unidades, respectivamente. Uma loja encomendou 590 unidades desse produto para o seu estoque. Calcular a quantidade total possível de embalagens que ele receberá.

18. Sejam A o conjunto dos múltiplos positivos de 2 e B o conjunto dos múltiplos positivos de 3. Se o conjunto $A \cap B$ é colocado em ordem crescente, determinar a posição do número 2004 neste conjunto.

19. O máximo divisor comum de dois números é 36 e os quocientes encontrados, por divisões sucessivas, foram 1, 2 e 2. Quais são esses números?

20. Numa casa há três goteiras. A primeira pinga de 5 em 5 segundos; a segunda de 6 em 6 segundos e a terceira de 7 em 7 segundos. Se, em um dado instante, as três pingarem ao mesmo tempo, depois de quanto segundos voltarão a pingar juntas?

1.3 Representação Geométrica dos Números Reais

Nesta seção vamos mostrar, de um ponto de vista intuitivo, que os números reais podem ser identificados com os pontos de uma reta r.

Para isto, fixemos sobre a reta r um ponto O. Agora, escolhamos um outro ponto P sobre r e uma unidade de comprimento u, de modo que u seja igual ao comprimento do segmento $\overline{OP}$.

Com um compasso de abertura $\overline{OP}$ centrado em P marcamos o ponto P_2, a partir do qual, obtemos o ponto P_3 e, assim, sucessivamente, obtemos a seqüência de pontos

$$P_1, P_2, P_3, \ldots,$$

onde $P_1 = P$. Note que o n-ésimo ponto P_n dista n unidades de O. De modo análogo, obtemos a seqüência de pontos

$$P_{-1}, P_{-2}, P_{-3}, \ldots$$

na direção oposta (confira Figura 1.7).

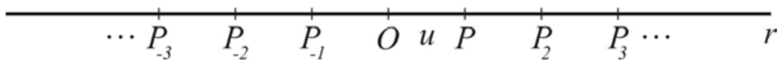

Figura 1.7: Marcando os pontos P_n sobre r.

Assim, identificamos cada $n \in \mathbb{Z}$ com um ponto $P_n \in r$. Portanto, a figura acima se transforma na Figura 1.8.

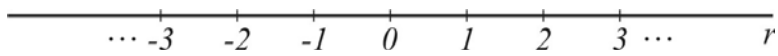

Figura 1.8: Identificando cada $n \in \mathbb{Z}$ com um ponto $P_n \in r$.

Agora, dado

$$x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q},$$

com $n > 0$. Como podemos associar x a um único ponto da reta r?

Primeiro. Se $m > n$, então, pelo algoritmo da divisão, existem únicos $q, s \in \mathbb{Z}$ tais que

$$m = qn + s, \text{ onde } s \in \{0, 1, \ldots, n-1\}.$$

Assim,

$$x = \frac{m}{n} = q + \frac{s}{n} = q\frac{s}{n},$$

onde $q\frac{s}{n}$ é chamada de *fração mista*.

Segundo. A partir de q tracemos uma reta que faz um certo ângulo com a reta r. Agora, com uma dada abertura do compasso, marcamos a partir de q, n pontos sobre esta reta. Unimos o último ponto P ao ponto $q+1$ e tracemos paralelas ao segmento $\overline{P(q+1)}$. Estas paralelas divide o segmento $\overline{q(q+1)}$ em n partes iguais.

Terceiro. Tomamos as s primeiras destas partes. O ponto final da última parte é o ponto que corresponde ao número x.

Exemplo 1.16 *Marque o ponto $x = -\frac{7}{6}$ sobre a reta r.*

Solução. Como $-7 = (-2)6 + 5$ temos que

$$-\frac{7}{6} = -2 + \frac{5}{6}$$

o resultado segue da Figura 1.9.

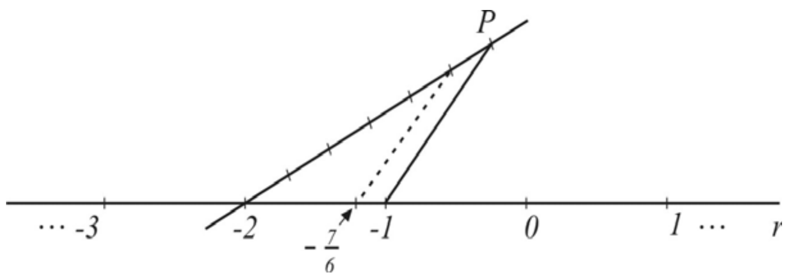

Figura 1.9: Marcando o ponto $-\frac{7}{6}$ sobre a reta r.

Assim, identificamos cada $x \in \mathbb{Q}$ com um ponto $P \in r$. Portanto, obtemos a Figura 1.10.

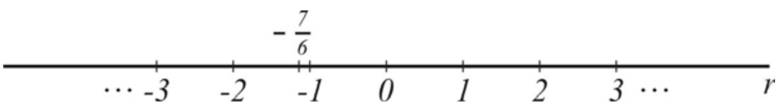

Figura 1.10: Identificando cada $x \in \mathbb{Q}$ com um ponto $P \in r$.

Finalmente, como podemos associar o número irracional $\sqrt{2}$ a um único ponto da reta r?

Primeiro. Desenhamos a partir de 0 um quadrado com um lado sobre r e de comprimento igual a 1.

Segundo. Usamos o Teorema de Pitágoras para calcular a diagonal do quadrado d e com uma abertura do compasso igual a d tracemos uma circunferência C centrada em 0.

Terceiro. O ponto P da interseção de C e r é o número irracional $\sqrt{2}$ (confira Figura 1.11).

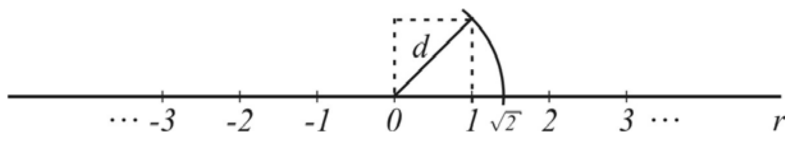

Figura 1.11: Marcando o ponto $\sqrt{2}$ sobre a reta r.

Conclusão 1.1 *Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos da reta r e os números reais.*

Uma reta r na qual foi estabelecida uma correspondência biunívoca entre seus pontos e os números reais $\mathbb{R}$ será chamada de *reta numérica* ou *eixo real*. O ponto O será chamado de *origem* e o número x associado a um ponto P de r será chamado de *coordenada* de P ou *abscissa* de P. A reta r fica *orientada*, pois nela podemos destiguir dois sentidos de percurso: *sentido positivo* ou *semi-reta positivo*, que é o das coordenadas crescentes, e *sentido negativo* ou *semi-reta negativo*, que é o das coordenadas decrescentes.

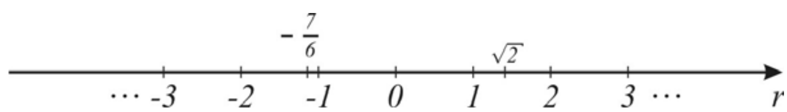

Figura 1.12: Identificando cada $x \in \mathbb{R}$ com um ponto $P \in r$.

EXERCÍCIOS

---

1. Marcar os pontos abaixo sobre a reta r:

   $(a)\ \frac{2}{5}\quad (b)\ -\frac{20}{3}\quad (c)\ \frac{4}{7}\quad (d)\ -\frac{15}{7}\quad (e)\ \frac{5}{9}\quad (f)\ \frac{5}{12}\quad (g)\ 10\frac{3}{4}.$

2. Marcar os pontos abaixo sobre a reta r:

   $(a)\ \sqrt{3}\quad (b)\ \sqrt{8}\quad (c)\ \sqrt{5}\quad (d)\ \sqrt{2}+\sqrt{3}\quad (e)\ \sqrt{27}\quad (f)\ \sqrt{7}.$

1.4 Desigualdades

Um subconjunto $\mathbb{P}$ de $\mathbb{R}$ é chamado um *cone positivo* se as seguintes condições são satisfeitas:

1. Se $x, y \in \mathbb{P}$, então $x + y \in \mathbb{P}$;

2. Se $x, y \in \mathbb{P}$, então $xy \in \mathbb{P}$;

3. Se $x \in \mathbb{R}$, então uma e apenas uma das condições ocorre:

$$x \in \mathbb{P} \text{ ou } x = 0 \text{ ou } -x \in \mathbb{P}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é *estritamente positivo* se $x \in \mathbb{P}$ e escreveremos $x > 0$. Dizemos que x é *positivo* se $x \in \mathbb{P} \cup \{0\} = \mathbb{R}_+$ e escreveremos $x \geq 0$. Assim, um número $x \in \mathbb{R}$ é *estritamente negativo* (*negativo*) se $-x \in \mathbb{P}$ $(-x \in \mathbb{R}_+)$ e escreveremos $x < 0$ $(x \leq 0)$.

Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Dizemos que x é *menor do que* y se $y - x \in \mathbb{P}$ e escreveremos $x < y$. Dizemos que x *menor do que ou igual* y se $y - x \in \mathbb{R}_+$ e escreveremos $x \leq y$. Note que $x < y$ se, e somente se, existe $a \in \mathbb{P}$ tal que $y = x + a$.

Exemplo 1.17 $5 > 2$, *pois*

$$5 - 2 = 3 > 0,$$

$-2 < -1$, *pois*

$$-1 - (-2) = -1 + 2 = 1 > 0,$$

$\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$, *pois*

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{9-8}{12} = \frac{1}{12} > 0.$$

Propriedade 1.18 *Sejam* $x, y, z, w \in \mathbb{R}$. *Então*:

1. *Se* $x < y$ *e* $y < z$, *então* $x < z$;

2. *Se* $x \neq 0$, *então* $x^2 > 0$;

3. $1 > 0$;

4. *Se* $x < y$, *então* $x + z < y + z$;

5. *Se* $x < y$ *e* $z < w$, *então* $x + z < y + w$;

6. *Se* $x < y$ *e* $z > 0$, *então* $xz < yz$;

7. *Se* $x < y$ *e* $z < 0$, *então* $xz > yz$;

8. *Se* $x > 0$, *então* $x^{-1} > 0$;

9. *Se* $xy > 0$, *então* $(x > 0$ *e* $y > 0)$ *ou* $(x < 0$ *e* $y < 0)$;

10. *Se* $xy < 0$, *então* $(x > 0$ *e* $y < 0)$ *ou* $(x < 0$ *e* $y > 0)$.

Prova. Vamos provar apenas os itens 8. e 9. Como

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = x\left(\frac{1}{x}\right)^2$$

temos que $x^{-1} > 0$. Agora, se $xy > 0$, então $x \neq 0$ e $y \neq 0$ (prove isto!). Como $x \neq 0$ temos que $x > 0$ ou $x < 0$. Se $x > 0$, então $x^{-1} > 0$ e, assim,

$$y = 1 \cdot y = (x^{-1}x)y = x^{-1}(xy) > 0.$$

O caso $x < 0$, prova-se de modo similar. ■

Note que se

$$x = \frac{a}{b}, y = \frac{c}{d} \in \mathbb{Q},$$

então seu ponto médio

$$m = \frac{x+y}{2} = \frac{da+bc}{2bd} \in \mathbb{Q}.$$

Suponhamos que $x < y$. Então

$$m = x + \frac{y-x}{2}.$$

Figura 1.13: Ponto médio m.

Observação 1.19 *Em torno de qualquer $x \in \mathbb{R}$, existe uma infinidade de números racionais. De fato, seja $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro menor do que ou igual a x ou, equivalentemente,*

$$\lfloor x \rfloor = \max\{n \in \mathbb{Z} : n \leq x\},$$

por exemplo $\lfloor \sqrt{2} \rfloor = 1$. Então

$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

Assim, para cada $x \in \mathbb{R}$, existem $m, n \in \mathbb{Z}$ tais que

$$m < x < n.$$

Portanto, podemos aplicar indefinidamente, de modo conveniente, o processo de obter o ponto médio.

Sejam $x \in \mathbb{R}^*$ e $n \in \mathbb{Z}$. A *potência n-ésima de x*, denotada por x^n, é definida como

$$x^n = \begin{cases} x^{n-1} \cdot x & \text{se } n > 0 \\ 1 & \text{se } n = 0 \\ x^{n+1} \cdot x^{-1} & \text{se } n < 0. \end{cases}$$

O número x será chamado de *base* e n de *expoente*. Por exemplo,

$$2^4 = 2^3 \cdot 2 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 16 \text{ e } 2^{-4} = 2^{-3} \cdot 2^{-1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{16}.$$

Propriedade 1.20 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^*$ e $m, n \in \mathbb{Z}$. Então:*

1. $x^m \cdot x^n = x^{m+n}$;

2. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$;

3. $(x^m)^n = x^{mn}$;

4. $(xy)^m = x^m y^m$;

5. $(\frac{x}{y})^m = \frac{x^m}{y^m}$.

Sejam $x \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{N}$. A *raiz n-ésima de x*, denotada por $\sqrt[n]{x}$, é todo número real y tal que

$$y^n = x.$$

Por exemplo, -2 é a raiz cúbica de -8, pois $(-2)^3 = -8$, 3 e -3 são a raízes quartas de 81, pois $(3)^4 = 81$ e $(-3)^4 = 81$.

Propriedade 1.21 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ e $k, m, n \in \mathbb{N}$. Então:*

1. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$;

2. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$;

3. $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$;

4. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$;

5. $\sqrt[n]{x^m} = \sqrt[k \cdot n]{x^{k \cdot m}}$.

Finalmente, sejam $x \in \mathbb{R}_+^*$ e $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$. Então o símbolo $x^{\frac{m}{n}}$ é definido como

$$x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}.$$

Por exemplo,

$$3^{\frac{3}{5}} = \sqrt[5]{3^3}.$$

Seja $x \in \mathbb{R}$. O *valor absoluto* ou o *módulo* de x é definido como

$$|x| = \begin{cases} x & \text{se } x > 0, \\ 0 & \text{se } x = 0, \\ -x & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

ou, equivalentemente,

$$|x| = \max\{-x, x\}.$$

Exemplo 1.22 $|5| = 5$, $|-3| = -(-3) = 3$. *Note, também, que*

$$|5| = \max\{-5, 5\} = 5 \ \text{ e } \ |-3| = \max\{-(-3), -3\} = 3.$$

Se na reta númerica os pontos P e Q têm coordenadas x e y, repectivamente, então $|x-y|$ é a distância entre P e Q, denotada por

$$d(P,Q) = |x-y|\,.$$

De fato, se $x-y>0$, isto é, $x>y$, então a distância é $x-y$, enquanto que se $x-y<0$, isto é, $x<y$, a distância é $y-x=-(x-y)$. Portanto, a distância entre P e Q é $|x-y|$.

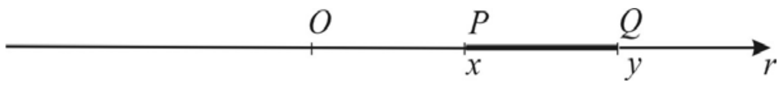

Figura 1.14: A distância entre P e Q.

Propriedade 1.23 *Sejam $a, x, y \in \mathbb{R}$. Então:*

1. $|x| \geq 0$;
2. $|x| = |-x|\,$;
3. $|x|^2 = x^2$ *e* $|x| = \sqrt{x^2}$;
4. *Se* $a \geq 0$, *então* $|x| = a \Leftrightarrow x = -a$ *ou* $x = a$;
5. *Se* $a \geq 0$, *então* $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$;
6. *Se* $a \geq 0$, *então* $|x| > a \Leftrightarrow x < -a$ *ou* $x > a$;
7. $-|x| \leq x \leq |x|\,$;
8. $|xy| = |x|\,|y|\,$;
9. *Se* $y \neq 0$, *então* $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$;
10. $|x+y| \leq |y| + |y|$.

Prova. Vamos provar apenas o item 10,

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2\,|x|\,|y| + |y|^2 \\ &= (|x|+|y|)^2. \end{aligned}$$

Assim, extraindo a raiz quadrada de ambos os membros, obtemos

$$|x+y| \leq |x| + |y|\,.$$

■

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. O conjunto

$$]a, b[\ = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$$

é chamado de *intervalo aberto* definido por a e b.

Figura 1.15: Intervalo aberto de extremos a e b.

O conjunto

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$$

é chamado de *intervalo fechado* definido por a e b.

Figura 1.16: Intervalo fechado de extremos a e b.

Os conjuntos

$$\begin{array}{rcl} [a, b[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\} \\ ]a, b] & = & \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\} \end{array}$$

chamam-se *intervalos semi-abertos* (ou *semifechados*) definidos por a e b. Os números a e b chamam-se de *extremos* destes intervalos. Os conjuntos

$$\begin{array}{rcl}]a, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : a < x\} \\ ]-\infty, b[& = & \{x \in \mathbb{R} : x < b\} \\ [a, +\infty[& = & \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\} \\ ]-\infty, b] & = & \{x \in \mathbb{R} : x \leq b\} \end{array}$$

são chamados *intervalos abertos* (*fechados*) *infinitos* definidos por a e b. Note que $+\infty$ ou $-\infty$ são apenas símbolos da notação de intervalos infinitos e não números reais.

Figura 1.17: Intervalo infinito aberto de extremo a.

É muito comum, em diversas situações de resolução de problemas, necessitarmos de realizar operações de união e interseção com intervalos numéricos. Por exemplo, se

$$A = \{x \in \mathbb{R} : -3 \leq x < 7\} \text{ e } B = \{x \in \mathbb{R} : x > 1\},$$

então

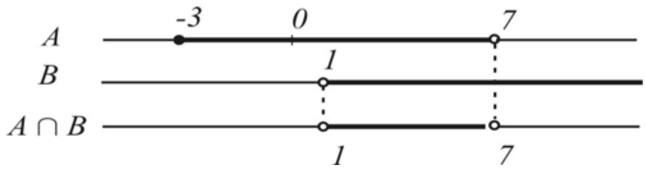

Figura 1.18: Representão gráfica da interseção de A e B.

Uma *equação* em x é uma igualdade da forma

$$x^2 - 4x + 3 = 0 \text{ ou } \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1.$$

Uma *solução* de uma equação é um número a tal que torna a equação uma identidade quando substituímos x por a.

Uma *inequação* em x é uma desigualdade da forma

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0 \text{ ou } \frac{2x - 3}{x - 10} < 0.$$

Exemplo 1.24 *Resolver a equação* $|3x - 2| = 1$.

Solução. Pelo item 4 da propriedade 1.23,

$$|3x - 2| = 1 \Leftrightarrow 3x - 2 = -1 \text{ ou } 3x - 2 = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3} \text{ ou } x = 1.$$

Portanto, as soluções da equação são $x = \frac{1}{3}$ e $x = 1$ ou

$$S = \left\{\frac{1}{3}, 1\right\}.$$

Exemplo 1.25 *Resolver a equação* $|2 - 5x| = 3x - 1$.

Solução. Pelo item 1 da propriedade 1.23, devemos impor à condição $3x - 1 \geq 0$, isto é, $x \geq \frac{1}{3}$. Além disso, para resolver esse tipo de equação devemos primeiro elevar ao quadrado ambos os membros e usar o item 3 das Propriedades 1.23.

$$\begin{aligned} |2 - 5x| &= 3x - 1 \Leftrightarrow |2 - 5x|^2 = (3x - 1)^2 \Leftrightarrow \\ (2 - 5x)^2 &= (3x - 1)^2 \Leftrightarrow 16x^2 - 14x + 3 = 0. \end{aligned}$$

Assim, basta resolver a equação

$$16x^2 - 14x + 3 = 0.$$

Temos que $a = 16$, $b = -14$ e $c = 3$. Logo,

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-14)^2 - 4 \cdot 16 \cdot 3 = 4.$$

Assim,

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 + \sqrt{4}}{32} = \frac{1}{2} \text{ e } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{14 - \sqrt{4}}{32} = \frac{3}{8}.$$

Portanto, as soluções da equação são $x = \frac{3}{8}$ e $x = \frac{1}{2}$ ou

$$S = \left\{ \frac{3}{8}, \frac{1}{2} \right\},$$

pois ambas são compatíveis com a condição $x \geq \frac{1}{3}$.

Exemplo 1.26 *Resolver a equação* $|2 - 3x| = |2x - 1|$.

Solução. Para resolver esse tipo de equação devemos primeiro elevar ao quadrado ambos os membros e usar o item 3 das Propriedades 1.23.

$$\begin{aligned} |2 - 3x| &= |2x - 1| \Leftrightarrow |2 - 3x|^2 = |2x - 1|^2 \Leftrightarrow \\ (2 - 3x)^2 &= (2x - 1)^2 \Leftrightarrow 5x^2 - 8x + 3 = 0. \end{aligned}$$

Portanto, as soluções da equação são $x = \frac{3}{5}$ e $x = 1$ ou

$$S = \left\{ \frac{3}{5}, 1 \right\}.$$

Exemplo 1.27 *Resolver a inequação* $(x^2 - 1)(2x + 1) > 0$.

Solução. Pelo item 9 da propriedade 1.18, há dois casos a ser considerado:
1.^{o} **Caso**. Se $x^2 - 1 > 0$ e $2x + 1 > 0$, então

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow |x|^2 > 1 \Leftrightarrow |x| > 1 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1$$

ou, graficamente,

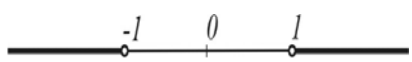

Figura 1.19: Representação gráfica.

e

$$2x + 1 > 0 \Leftrightarrow 2x > -1 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

ou, graficamente,

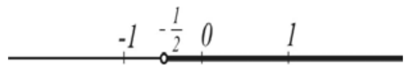

Figura 1.20: Representação gráfica.

Logo,

$$x^2 - 1 > 0 \text{ e } 2x + 1 > 0 \Leftrightarrow x \in \ ]1, +\infty[$$

ou, graficamente,

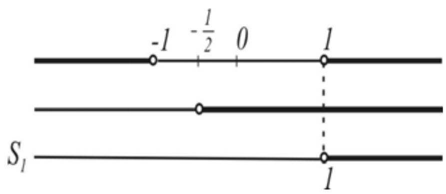

Figura 1.21: Representação gráfica da solução S_1.

2.º **Caso**. Se $x^2 - 1 < 0$ e $2x + 1 < 0$, então

$$x^2 - 1 < 0 \Leftrightarrow |x|^2 < 1 \Leftrightarrow |x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

ou, graficamente,

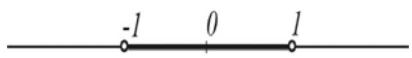

Figura 1.22: Representação gráfica.

e

$$2x + 1 < 0 \Leftrightarrow 2x < -1 \Leftrightarrow x < -\frac{1}{2}$$

ou, graficamente,

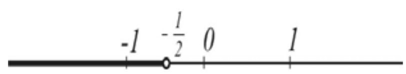

Figura 1.23: Representação gráfica.

Logo,

$$x^2 - 1 < 0 \text{ e } 2x + 1 < 0 \Leftrightarrow x \in \ ]-1, -\frac{1}{2}[$$

ou, graficamente,

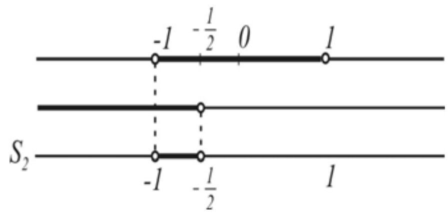

Figura 1.24: Representação gráfica da solução S_2.

Portanto, o conjunto solução da inequação é

$$S = S_1 \cup S_2 = \ ]-1, -\frac{1}{2}[\ \cup\ ]1, +\infty[.$$

Exemplo 1.28 *Resolver a inequação* $\frac{3x+2}{x+1} < 4$.

Solução. Observe que

$$\frac{3x+2}{x+1} < 4 \Leftrightarrow \frac{3x+2}{x+1} - 4 < 0 \Leftrightarrow \frac{x+2}{x+1} > 0.$$

Assim, basta resolver a inequação $(x+2)(x+1) > 0$ com a condição $x+1 \neq 0$, pois $x+1$ não pode ser zero. Seguindo os passos do exemplo acima, temos que o conjunto solução da inequação é

$$S = \ ]-\infty, -2[\ \cup\ ]-1, +\infty[.$$

Exemplo 1.29 *Resolver a inequação* $|7x-3| < 4$.

Solução. Pelo item 5 da propriedade 1.23,

$$|7x-3| < 4 \Leftrightarrow -4 < 7x-3 < 4 \Leftrightarrow -1 < 7x < 7 \Leftrightarrow -\frac{1}{7} < x < 1.$$

Logo, o conjunto solução da inequação é

$$S = \ ]-\frac{1}{7}, 1[.$$

Exemplo 1.30 *Resolver a inequação* $|2x+6| < |4-x|$.

Solução. Para resolver esse tipo de inequação devemos primeiro elevar ao quadrado ambos os membros e usar o item 3 da propriedade 1.23.

$$\begin{aligned} |2x+6| &< |4-x| \Leftrightarrow |2x+6|^2 < |4-x|^2 \Leftrightarrow \\ (2x+6)^2 &< (4-x)^2 \Leftrightarrow 3x^2 + 32x + 20 < 0. \end{aligned}$$

Como

$$3x^2 + 32x + 20 = (x+10)(3x+2) < 0$$

temos dois casos a ser considerado:

1.º **Caso**. Se $x+10>0$ e $3x+2<0$, então

$$x+10>0 \Leftrightarrow x>-10$$

e

$$3x+2<0 \Leftrightarrow 3x<-2 \Leftrightarrow x<-\frac{2}{3}.$$

Logo,

$$x+10>0 \ \text{ e } \ 3x+2<0 \Leftrightarrow x \in \ ]-10,-\frac{2}{3}[.$$

2.º **Caso**. Se $x+10<0$ e $3x+2>0$, então

$$x+10<0 \Leftrightarrow x<-10$$

e

$$3x+2>0 \Leftrightarrow 3x>-2 \Leftrightarrow x>-\frac{2}{3}.$$

Logo, não existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $x+10<0$ e $3x+2>0$, isto é, a solução é o conjunto vazio. Portanto, o conjunto solução da inequação é

$$S = \ ]-10,-\frac{2}{3}[.$$

Para finalizarmos esta seção vamos apresentar um método alternativo para obter o conjunto solução de inequações da forma

$$(ax+b)(cx+d) \ \text{ e } \ \frac{ax+b}{cx+d}.$$

Para resolver esse problema, basta estudar o sinal da equação

$$ax+b=0, \ \ a \neq 0.$$

Como a *raiz* ou o *zero* desta equação é

$$x_0 = -\frac{b}{a}$$

temos que o sinal da equação é dado pela Figura 1.25. Note que o sinal da equação depende do sinal de a, por exemplo, se $a>0$, então

$$ax+b>0 \Leftrightarrow a(x+\frac{b}{a})>0 \Leftrightarrow x+\frac{b}{a}>0 \Leftrightarrow x>-\frac{b}{a}.$$

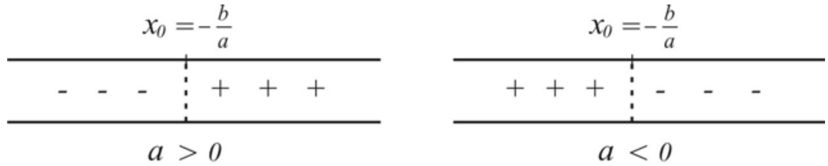

Figura 1.25: Sinal da equação $ax+b=0$.

Exemplo 1.31 *Resolver a inequação* $|2x+6| < |4-x|$.

Solução. Para resolver esse tipo de inequação devemos primeiro elevar ao quadrado ambos os membros

$$\begin{aligned} |2x+6| &< |4-x| \Leftrightarrow |2x+6|^2 < |4-x|^2 \Leftrightarrow \\ (2x+6)^2 &< (4-x)^2 \Leftrightarrow 3x^2+32x+20 < 0. \end{aligned}$$

Assim,

$$|2x+6| < |4-x| \Leftrightarrow 3x^2+32x+20 = (x+10)(3x+2) < 0.$$

Portanto, a solução é dada pela Figura 1.26.

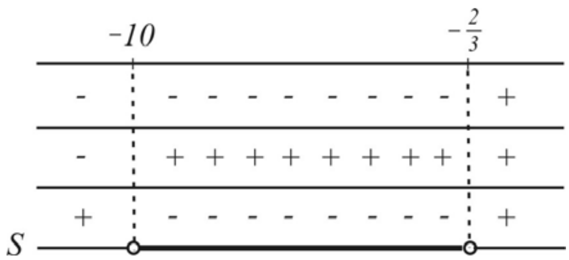

Figura 1.26: Solução da inequação $|2x+6| < |4-x|$.

EXERCÍCIOS

1. Simplificar as expressões:

   (a) $2\sqrt[3]{\frac{a^4b^3}{16c^4}}$

   (b) $\frac{\sqrt[3]{18}\cdot\sqrt[3]{\sqrt{3}}\cdot\sqrt[3]{2}}{\sqrt[4]{27}\cdot\sqrt{18}}$

   (c) $\frac{\sqrt[5]{8}\cdot\left(\sqrt[4]{\sqrt[3]{16}}\right)^3\cdot\sqrt{32}}{\left(\sqrt[3]{\sqrt[12]{2}}\right)^{36}}$

   (d) $\left(\frac{a^{\frac{1}{2}}+1}{a^{\frac{1}{2}}-1}+\frac{a^{\frac{1}{2}}-1}{a^{\frac{1}{2}}+1}-\frac{4}{a-1}\right)^{-3}, a \in \mathbb{R}_+^* - \{1\}.$

2. Resolver as seguintes equações:

   (a) $|2x-6| = 6-2x$

   (b) $\left|\frac{2x-1}{x-3}\right| = 2$

   (c) $\left|\frac{x}{1-5x}\right| = 4$

   (d) $|2x-5| = x+3$

   (e) $|1-2x| = |1-3(x+2)|$

   (f) $\sqrt{2x+5} = x+1$

   (g) $\sqrt{x}+1 = \sqrt{2x+1}$

   (h) $\sqrt{x+6}+2x = 9$

   (i) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+4} = \sqrt{5x+9}$

   (j) $2^x = 512$

   (k) $3^{x+7} = \frac{1}{729}$

   (l) $2^{2x}-9\cdot 2^x+8.$

3. Resolver as seguintes inequações:

(a)	$2 - x < x + 1 < -10x$	(e)	$\|1 - x\| > \|2x - 1\|$
(b)	$\frac{3x-1}{2-x} > -10$	(f)	$\|5x - 4\| \leq \|x + 4\|$
(c)	$\frac{2}{x-3} < \frac{5}{3x-2}$	(g)	$\|2x + 1\| \leq \|3x + 2\|$
(d)	$\frac{x-1}{2x-5} \leq \frac{1+\frac{x}{2}}{x+3}$	(h)	$\|x^2 - 7x + 12\| > x^2 - 7x + 12.$

4. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Mostrar que $a^2 + b^2 = 0$ se, e somente se, $a = b = 0$.

5. Seja $x \in \mathbb{R}$. Se $x^2 \geq 4$, é verdade que $x \geq 2$? Justifique.

6. Determinar o valor de a, de modo que, a equação

$$-3x^2 + 7x + (2 - 3a) = 0$$

admita duas raízes reais e distintas.

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 1.1

1. $A - B = \{b, c\}$; $B - A = \{d\}$; $A \cap B = \{a\}$ e $A \cup B = \{a, b, c, d\}$.

3. (a) $\{f\}$; (b) $\{a, b, d, e\}$; (c) $\{a, b, d, e\}$; (d) $\{a, b\}$; (e). $\{a, b, c, d\}$; (f) $\{c\}$; (g) $\{a, b, c, d\}$; (h) $\{e\}$; (i) $\emptyset$; (j) $\{a, b, c\}$.

5. Faça um digrama de Venn para uma prova geométrica e comprove o seguinte argumento:

$$\begin{aligned} x &\in (A \cup B)' \Leftrightarrow x \notin A \cup B \Leftrightarrow x \notin A \text{ e } x \notin B \Leftrightarrow \\ x &\in A' \text{ e } x \in B' \Leftrightarrow x \in A' \cap B'. \end{aligned}$$

Prova-se, de modo análogo, que $(A \cap B)' = A' \cup B'$.

7. $A = \{2, 4, 7, 8\}$, $B = \{1, 2, 3, 5, 6\}$ e $C = \{2, 5, 6, 7, 9, 10\}$.

Seção 1.2

1. (a) $\frac{5}{6}$; (b) $-\frac{5}{12}$; (c) $\frac{9}{5}$; (d) $-\frac{12}{49}$; (e) $\frac{10}{7}$; (f) $\frac{9}{10}$; (g) $-\frac{5}{9}$; (h) $-\frac{21}{17}$.

3. $0,285714285714\cdots$.

7. Suponha, por absurdo, que $\sqrt{p}$ seja um número racional, digamos

$$\sqrt{p} = \frac{a}{b}$$

com $\mathrm{mdc}(a, b) = 1$. Elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos

$$p = \frac{a^2}{b^2} \text{ ou } pb^2 = a^2.$$

Logo, $p \mid a^2$ implica que $p \mid a$ (prove isto!) e, assim, existe $c \in \mathbb{Z}$ tal que $a = pc$. Assim,

$$pb^2 = p^2c^2 \Leftrightarrow b^2 = pc^2,$$

de modo análogo, $p \mid b$. Portanto,

$$p \mid \mathrm{mdc}(a, b),$$

ou ainda, $p \mid 1$, o que é uma contradição.

11. Dados $a, b \in \mathbb{Z}$, obtemos $a = 2r$ ou $a = 2r + 1$ e $b = 2s$ ou $b = 2s + 1$, pois todo inteiro é par ou ímpar. Logo, $a^2 = 4t$ ou $a^2 = 4t + 1$ e $b^2 = 4u$ ou $b^2 = 4u + 1$. Portanto,

$$a^2 + b^2 = \begin{cases} 4v \\ 4v + 1 \\ 4v + 2, \end{cases}$$

isto é, $a^2 + b^2$ deixa resto 0, 1 ou 2 quando dividido por 4, para todos $a, b \in \mathbb{Z}$.

13. É fácil verificar que $1 = \mathrm{mdc}(71, 83)$ e $1 = (-7) \cdot 71 + 6 \cdot 83$. Logo,

$$1.670 = (-11.690) \cdot 71 + (10.020) \cdot 83.$$

Assim,

$$1.670 = (-11.690 - 83k)71 + (10.020 + 71k)83, \forall k \in \mathbb{Z},$$

é a solução geral. Agora, vamos encontrar as soluções positivas desta equação

$$-11.690 - 83k \geq 0 \text{ e } 10.020 + 71k \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{10.020}{71} \leq k \leq -\frac{11.690}{83}.$$

Portanto, $k = -141$ e, assim, podemos comprar 13 que custa \$71,00 e 9 que custa \$83,00.

14. O lado do quadrado é igual ao $\mathrm{mdc}(2.700, 7.200)$.

16. Seja $n \in \mathbb{N}$. Então $n = 2r + 1$, $n = 3s + 2$, $n = 4t + 3$, $n = 5u + 4$ e $n = 6v + 5$. Logo, $n + 1 = 2(r + 1)$, $n + 1 = 3(s + 1)$, $n + 1 = 4(t + 1)$, $n + 1 = 5(u + 1)$ e $n + 1 = 6(v + 1)$. Assim,

$$n + 1 = \mathrm{mmc}(2, 3, 4, 5, 6) = 60.$$

Portanto, o menor inteiro positivo é igual a 59.

17. Nosso problema é equivalente a resolver a equação

$$15x + 24y + 100z = 590$$

em $\mathbb{N}$. Como o $\mathrm{mdc}(15, 24) = 3$ temos que a equação tem solução se

$$\frac{59 - 10z}{3} \in \mathbb{N} \Rightarrow 59 - 10z > 0 \Rightarrow z \in \{1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Assim, por calculação direta vemos que $z = 2$ e $z = 5$ são as únicas possibilidades. Note que

$$3 = \mathrm{mdc}(15, 24) \Rightarrow 3 = (-3) \cdot 15 + 2 \cdot 24.$$

Assim, se $z = 2$, então

$$390 = (-390) \cdot 15 + 260 \cdot 24 = (-390 + 24k) \cdot 15 + (260 - 15k) \cdot 24, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

Logo,

$$-390 + 24k > 0 \text{ e } 260 - 15k > 0 \Leftrightarrow k = 17.$$

Portanto, $x = 18$, $y = 5$ e $z = 2$. O caso $z = 5$ não tem solução positiva.

19. 180 e 252.

Seção 1.4

1. (a) $\frac{ab}{c}\sqrt[3]{\frac{a}{2c}}$; (b) $\frac{1}{3}\sqrt[6]{2}\,\sqrt[12]{3}$; (c) $8\,\sqrt[10]{2}$; (d) $\frac{1}{8}\left(\sqrt{a}-1\right)^3\frac{\left(\sqrt{a}+1\right)^3}{(a-1)^3}$.

3. (a) $\emptyset$; (b). $]-\infty, 2[\, \cup\,]\frac{19}{7}, +\infty[$; (c) $]-\infty, -11[\, \cup\,]\frac{2}{3}, 3[$; (d) $]-\infty, -3[\, \cup\, [-\frac{4}{5}, \frac{5}{2}[$; (e) $]0, \frac{2}{3}[$; (f) $[0, 2]$; (g) $]-\infty, -1[\, \cup\, [-\frac{3}{5}, +\infty[$; (h) $]3, 4[$.

5. Falso, pois $(-3)^2 = 9 > 4$.

Capítulo 2

Representação gráfica

Neste capítulo apresentaremos o sistema de coordenadas cartesianas, a equação geral da reta e métodos gerais para traçar gráficos de curvas. Também são discutidas algumas aplicações em Ciências Contábeis, na Economia e na Adiministração.

2.1 Sistema de Coordenadas Cartesianas

Dados dois conjuntos não-vazios A e B, o *produto cartesiano* de A por B é o conjunto de todos os pares ordenados (x, y), com $x \in A$ e $y \in B$. Notação

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}.$$

Por exemplo, se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{a, b\}$, então

$$A \times B = \{(1, a), (1, b), (2, a), (2, b), (3, a), (3, b)\}.$$

Seja O um ponto fixado no plano. Com origem em O, consideremos dois eixos perpendiculares entre si, os quais são chamados de *eixo* dos x e dos y, respectivamente (confira Figura 2.1).

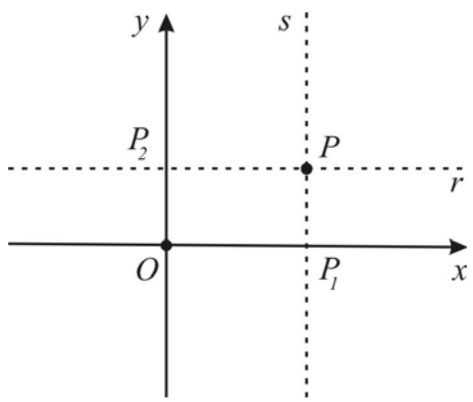

Figura 2.1: Sistema de eixos perpendiculares.

Para cada ponto P do plano tracemos uma paralela ao eixo y, que intercepta o eixo dos x no ponto P_1 cuja coordenada x é chamada de *abscissa* de P. Tracemos, também, por P uma paralela ao eixo x, que intercepta o eixo dos y no ponto P_2 cuja coordenada y é chamada de *ordenada* de P. Portanto, cada ponto P do plano determina um par ordenado de números reais (x, y) e vice-versa. Os pontos P_1 e P_2 são chamados as *projeções ortogonais* de P sobre os eixos dos x e dos y, respectivamente.

Conclusão 2.1 *Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos do plano e os pares ordenados de números reais.*

Para indicar que x e y são a abscissa e a ordenada do ponto P, escreveremos

$$P = (x, y).$$

Vamos usar $\mathbb{R}^2$ para indicar o conjunto dos pares ordenados de números reais, isto é,

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}.$$

O sistema formado pelo dois eixos perpendiculares é chamada de *sistema de coordenadas cartesianas* ou *plano cartesiano* e $O = (0, 0)$ é a *origem* do sistema. Os eixos x e y são chamados de *eixos coordenados*. (Sistema de eixos foi introduzido pelo filósofo e matemático francês Renê de Descartes, 1596 - 1650). Note que eles dividem o plano em quatro partes chamadas de *quadrantes* (confira Figura 2.2).

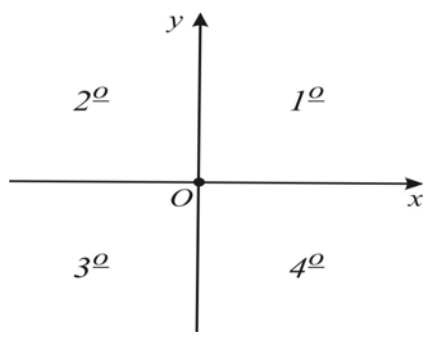

Figura 2.2: Sistema de coordenadas cartesianas.

Exemplo 2.1 *Faça o gráfico dos pontos* $(-4, -3)$, $(-3, 0)$, $(-2, 3)$, $(1, 2)$, $(0, -2)$, $(2, 0)$ *e* $(4, 3)$.

Solução. Para marcar o ponto $(-4, -3)$ no plano cartesiano, devemos andar quatro unidades para à esquerda no eixo dos x e três unidades para baixo no eixo dos y. Os outros pontos são marcados de modo análogo (confira Figura 2.3).

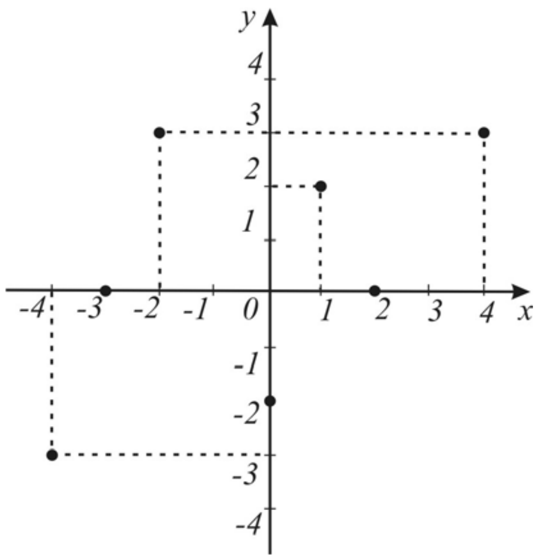

Figura 2.3: Representação gráfica de pontos.

Uma *equação* em $\mathbb{R}^2$ é uma igualdade da forma

$$3x - 6y + 6 = 0 \text{ ou } x^2 - 4y^2 + 3 = 0.$$

O *gráfico* ou (a *curva*) de uma equação em $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem esta equação.

Exemplo 2.2 *Esboçar o gráfico da equação*

$$y^2 - x - 2 = 0.$$

Solução. Como

$$y^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = x + 2 \text{ e } y^2 \geq 0$$

devemos escolher os $x \in \mathbb{R}$ tais que $x \geq -2$. Assim, vamos construir a tabela

x	-2	-1	-1	0	0	1	1	2	2
y	0	1	-1	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	2	-2

para depois esboçar o gráfico (confira Figura 2.4).

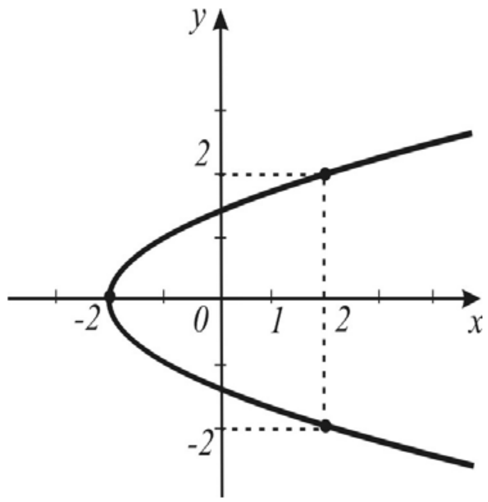

Figura 2.4: O gráfico da equação $y^2 - x - 2 = 0$.

EXERCÍCIOS

---

1. Faça o gráfico dos pontos $(3, 0)$, $(0, -2)$, $(2, 2)$, $(-2, -3)$, $(1, -1)$, $(-3, 4)$ e $(-\frac{3}{2}, 2)$.

2. Todo ponto pertencente ao eixo das abscissas possui uma mesma ordenada. Qual é o valor dessa ordenada?

3. Todo ponto pertencente ao eixo das ordenadas possui uma mesma abscissa. Qual é o valor dessa abscissa?

4. Dê os sinais da abscissa e da ordenada de um ponto, conforme ele pertença ao 1.^{o}, 2.^{o}, 3.^{o} e 4.^{o} quadrante.

5. Determinar x e y de modo que:

   (a) $(2x - 1, y + 2) = (3x + 2, 2y - 6)$;

   (b) $(x + 2, y - 3) = (2x + 1, 3y - 1)$;

   (c) $(2x, x - 8) = (1 - 3y, y)$;

   (d) $(x^2 + x, 2y) = (6, y^2)$;

   (e) $(y^2, |x|) = (3, 2)$.

6. Determinar x de modo que:

   (a) $(3x - 1, 2x - 1)$ pertença ao 1.^{o} quadrante;

(b) $(x+\sqrt{3}, 2x-4)$ pertença ao 4.^{o} quadrante.

7. Dados os pares ordenados $(2,1)$, $(0,1)$, $(-2,3)$, $(1,0)$, $(-1,-2)$, determinar quais deles pertencem ao conjunto
$$A = \{(x,y) : y = x-1\}.$$

8. Se $A = [-2,5[$ e $B =]1,6]$, determinar $A \times B$ e $B \times A$. Representar graficamente.

9. Esboçar o gráfico das equações abaixo:

$(a)\quad y = 2x+5$	$(d)\quad y = 5$	$(g)\quad y = \lvert x\rvert - 5$
$(b)\quad y = -4x+3$	$(e)\quad x = y^2+1$	$(h)\quad y = x^3$
$(c)\quad y^2 = x-3$	$(f)\quad y = \lvert x-5\rvert$	$(i)\quad x^2+y^2 = 4.$

10. Escreva uma equação cujo gráfico é o eixo dos x. Escreva uma equação cujo gráfico é o eixo dos y.

11. Sejam C e D subconjuntos de B. Mostrar que se $B = C \cup D$, então
$$A \times B = (A \times C) \cup (A \times D).$$

2.2 Distância entre Dois Pontos

Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ dois pontos do plano. Então há três casos a ser considerado:

1.^{o} **Caso**. Se o segmento $\overline{P_1P_2}$ é paralelo ao eixo dos y, isto é, $x_1 = x_2$, então a distância entre P_1 e P_2 é
$$d(P_1, P_2) = |y_2 - y_1|.$$

2.^{o} **Caso**. Se o segmento $\overline{P_1P_2}$ é paralelo ao eixo dos x, isto é, $y_1 = y_2$, então a distância entre P_1 e P_2 é
$$d(P_1, P_2) = |x_2 - x_1|.$$

3.^{o} **Caso**. Se o segmento $\overline{P_1P_2}$ não é paralelo ao eixo dos x e nem ao eixo dos y, isto é, $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, então traçando por P_1 uma paralela ao eixo dos x e por P_2 uma paralela ao eixo dos y, obtemos um triângulo retângulo P_1QP_2, com $Q = (x_2, y_1)$, cujos catetes P_1Q e QP_2 têm, pelos casos anteriores, distâncias
$$d(P_1, Q) = |x_2 - x_1| \text{ e } d(P_2, Q) = |y_2 - y_1|,$$
respectivamente. Assim, obtemos pelo Teorema de Pitágoras
$$d(P_1, P_2)^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

ou, equivalentemente,

$$d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(confira Figura 2.5).

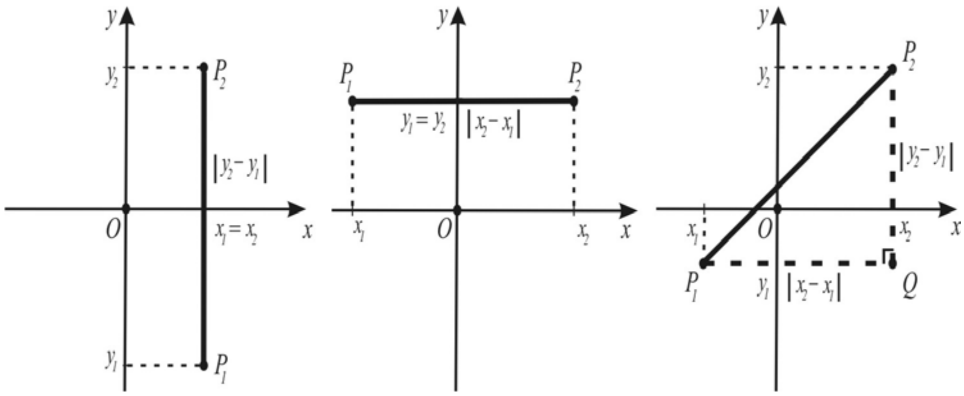

Figura 2.5: Distância entre os pontos P_1 e P_2.

Exemplo 2.3 *Mostrar que o ponto* $P = (1, 2)$ *é eqüidistante dos pontos* $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$ *e* $P_3 = (0, 4)$.

Solução. Basta mostrar que

$$d(P, P_1) = d(P, P_2) = d(P, P_3).$$

Logo,

$$\begin{array}{c} d(P, P_1) = \sqrt{(0-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5} \\ d(P, P_1) = \sqrt{(2-1)^2 + (0-2)^2} = \sqrt{5} \\ d(P, P_1) = \sqrt{(0-1)^2 + (4-2)^2} = \sqrt{5} \end{array}.$$

Portanto, o ponto $P = (1, 2)$ é eqüidistante dos pontos $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (2, 0)$ e $P_3 = (0, 4)$.

EXERCÍCIOS

---

1. Calcular a distância entre:

   (a) $P_1 = (2, -3)$ e $P_2 = (-3, 2)$ (c) $P_1 = (2, 3)$ e $P_2 = (-2, 6)$

   (b) $P_1 = (1, 2)$ e $P_2 = (-3, 4)$ (d) $P_1 = (3, 3)$ e $P_2 = (-1, 7)$.

2. Sejam os pontos $A = (2, 7)$, $B = (6, 4)$ e $C = (-2, 4)$, mostrar que o triângulo ABC é isósceles.

3. Dados os pontos $A = (1, 4)$, $B = (5, 1)$ e $C = (5, 4)$.

(a) Calcular o perímetro do triângulo ABC.

(b) Mostrar que o triângulo ABC é retângulo e calcular sua área.

4. Determinar x de modo que a distância entre $A = (x, 2)$ e $B = (1, -1)$ seja 5 unidades.

5. Determinar um ponto P do eixo das abscissas, sabendo que P é eqüidistante dos pontos $A = (3, 8)$ e $B = (9, 2)$.

6. Determinar x de modo que o ponto $P = (3, x)$ seja eqüidistante dos pontos $P_1 = (0, 4)$ e $P_2 = (6, 0)$.

7. Calcular o raio da circunferência que tem centro em $C = (4, 9)$ e que passa pelo ponto $P = (-2, 1)$.

8. Calcular o comprimento da mediana relativa ao lado BC do triângulo de vértices $A = (2, 17)$, $B = (-6, 1)$ e $C = (-4, -15)$.

2.3 A Reta

O gráfico da equação

$$Ax + By + C = 0, \tag{2.1}$$

onde A, B e C são constantes e pelo menos um dos dois, A ou B, é não-nulo, é uma *reta*. A equação (2.1) é chamada de *equação geral do* $1.^o$ *grau* em x e y ou *equação cartesiana da reta*. (A geometria analítica foi ciriada pelo matemático francês Pierre de Fermat, 1601-1665). Note que a equação

$$\lambda Ax + \lambda By + \lambda C = 0,$$

para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ com $\lambda \neq 0$, representa o mesmo gráfico da equação (2.1).

Uma maneira de esboçar o gráfico de uma reta é determinar as suas interseções com os eixos coordenados: Se $A \neq 0$, então, fazendo $y = 0$, obtemos o ponto

$$P_1 = (-\frac{C}{A}, 0)$$

de interseção da reta com o eixo dos x, o qual é chamado de *intercepto* x. Se $B \neq 0$, então, fazendo $x = 0$, obtemos o ponto

$$P_2 = (0, -\frac{C}{B})$$

de interseção da reta com o eixo dos y, o qual é chamado de *intercepto* y.

Exemplo 2.4 *Esboçar o gráfico da reta*

$$3x + 2y - 6 = 0.$$

Solução. Para esboçar o gráfico de uma reta basta determinar os interceptos x e y, respectivamente. Fazendo $y = 0$, obtemos

$$3x - 6 = 0 \Rightarrow 3x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2.$$

Logo, $P_1 = (2, 0)$ é o ponto de interseção da reta com o eixo dos x. Fazendo $y = 0$, obtemos

$$2y - 6 = 0 \Rightarrow 2y = 6 \Rightarrow y = \frac{6}{2} = 3.$$

Logo, $P_2 = (0, 3)$ é o ponto de interseção da reta com o eixo dos y. Portanto, o gráfico da reta é dado pela Figura 2.6.

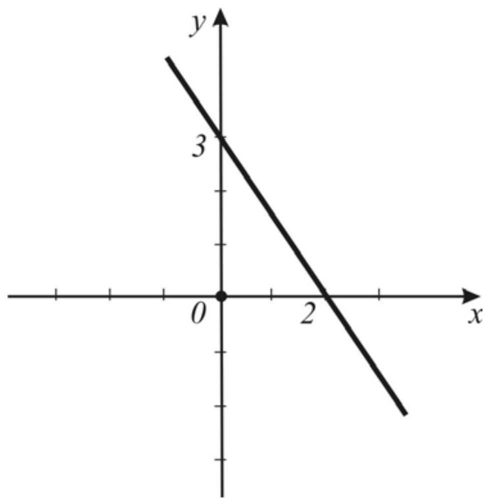

Figura 2.6: Gráfico da reta $3x + 2y - 6 = 0$.

A *inclinação*, *declive* ou *coeficiente angular* de uma reta é a tangente do ângulo que ela faz com o eixo dos x (confira Figura 2.7).

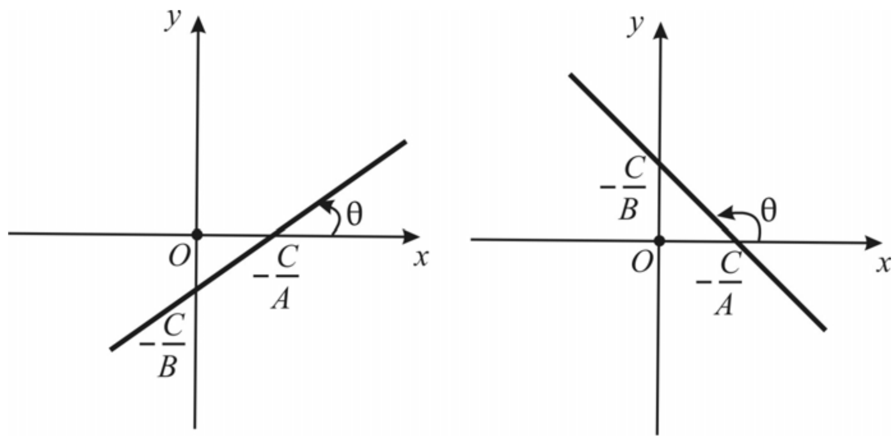

Figura 2.7: Inclinação da reta $Ax + By + C = 0$.

Logo,

$$m = \tan\theta = \left|\frac{A}{B}\right| = \begin{cases} \frac{A}{B} & \text{se } 0 < \theta < \frac{\pi}{2}, \\ -\frac{A}{B} & \text{se } \frac{\pi}{2} < \theta < \pi. \end{cases}$$

Portanto, se $B \neq 0$, a equação (2.1) pode ser escrita sob a forma

$$y = mx + b, \ \text{ onde } \ b = -\frac{C}{B}. \tag{2.2}$$

A equação (2.2) é chamada de *forma inclinação intercepto* (ou *equação reduzida*) da reta e b é chamado de *coeficiente linear* da reta.

Observação 2.5 *Se $B = 0$, então a equação (2.1) é a reta*

$$x = -\frac{C}{A}$$

paralela ao eixo dos y. Neste caso, a inclinação m não está definida.

Exemplo 2.6 *Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (2, 1)$ e tem inclinação $m = -1$.*

Solução. A equação da reta que tem inclinação $m = -1$ é

$$y = -x + b.$$

Como $P = (2, 1)$ é um ponto desta reta temos que

$$1 = -2 + b \Rightarrow b = 3.$$

Portanto, $y = -x+3$ é a equação da reta que passa pelo ponto $P = (2, 1)$ e tem inclinação $m = -1$.

Vamos agora determinar a equação da reta que passa por dois pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$. Há três casos a ser considerado.

1.^{o} **Caso**. Se $x_1 = x_2$, então a reta é paralela ao eixo dos y e, portanto, sua equação é

$$x = x_1.$$

Neste caso, a inclinação m não está definida.

2.^{o} **Caso**. Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 = y_2$, então a reta é paralela ao eixo dos x e, portanto, sua equação é

$$y = y_1.$$

Neste caso, $m = 0$.

3.^{o} **Caso**. Se $x_1 \neq x_2$ e $y_1 \neq y_2$, então a reta tem inclinação

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \left(\text{ou } m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}\right)$$

e, portanto, sua equação é

$$y = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x + b.$$

Como $P_1 = (x_1, y_1)$ (ou $P_2 = (x_2, y_2)$) é um ponto desta reta temos que

$$y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right) x_1 + b.$$

Logo, por subtração, obtemos

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1) \tag{2.3}$$

que é a equação da reta que passa por $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ (confira Figura 2.8)

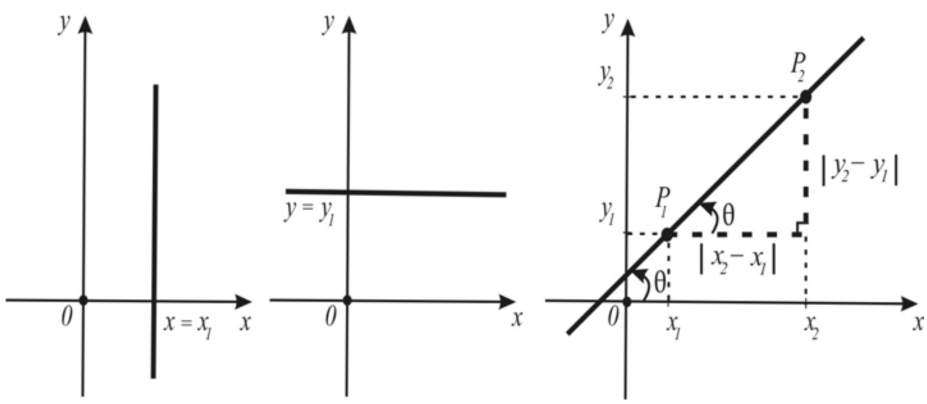

Figura 2.8: Reta determinada por dois pontos.

Exemplo 2.7 *Determinar a equação da reta que passa pelos pontos* $P_1 = (3, 1)$ *e* $P_2 = (-1, 2)$.

Solução. A reta tem inclinação

$$m = \frac{2 - 1}{-1 - 3} = \frac{1}{-4} = -\frac{1}{4}.$$

Logo, a equação da reta é

$$y - 1 = -\frac{1}{4}(x - 3),$$

ou ainda,

$$y = -\frac{1}{4}x + \frac{7}{4}.$$

2.4 Posições Relativas de Duas Retas

Consideremos duas retas, r e s, dadas por suas equações cartesianas

$$Ax + By + C = 0 \text{ e } A'x + B'y + C' = 0.$$

Se r não é paralela ao eixo dos y, então r e s são paralelas se, e somente se, elas têm a mesma inclinação, isto é,

$$-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'} \Leftrightarrow AB' - A'B = 0.$$

Se r é paralela ao eixo dos y, então r e s são paralelas se, e somente se, $B = B' = 0$, de modo que

$$AB' - A'B = 0.$$

Portanto, r e s são *paralelas* se, e somente se,

$$AB' - A'B = 0.$$

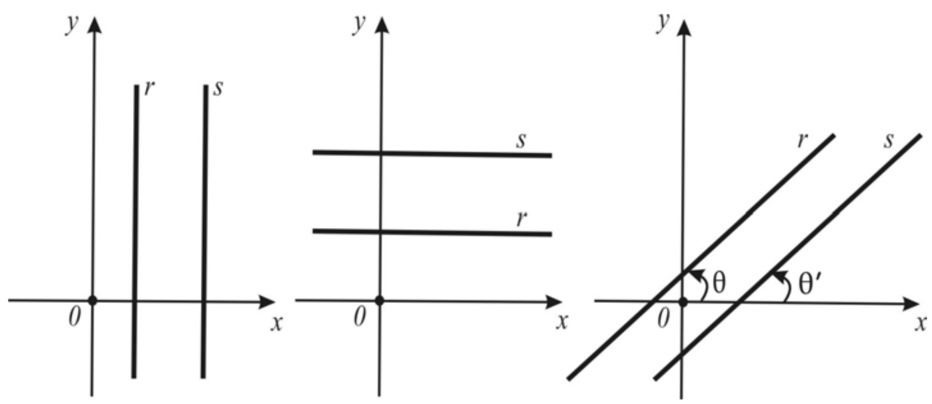

Figura 2.9: Retas paralelas.

Note que, se

$$-\frac{C}{B} = -\frac{C'}{B'} \quad (CB' - BC' = 0) \text{ e } AB' - A'B = 0,$$

então r e s são *coincidentes*. Portanto, r e s são *concorrentes* se, e somente se,

$$AB' - A'B \neq 0.$$

Exemplo 2.8 *Determinar se as retas são paralelas ou concorrentes:*

1. $x - 2y + 5 = 0$ *e* $3x - 6y + 2 = 0$;

2. $x - y + 1 = 0$ *e* $2x - y + 2 = 0$.

Solução. 1. Pelas equações temos que $A = 1$, $B = -2$ e $A' = 3$, $B' = -6$. Logo,

$$AB' - A'B = 1 \cdot (-6) - 3 \cdot (-2) = -6 + 6 = 0.$$

Portanto, as retas são paralelas.

2. Pelas equações temos que $A = 1$, $B = -1$ e $A' = 2$, $B' = -1$. Logo,

$$AB' - A'B = 1 \cdot (-1) - 2 \cdot (-1) = -1 + 2 = 1 \neq 0.$$

Portanto, as retas são concorrentes.

2.5 Perpendicularismo

Consideremos duas retas, r e s, dadas por suas equações cartesianas

$$Ax + By + C = 0 \text{ e } A'x + B'y + C' = 0.$$

Se r não é paralela ao eixo dos y, então a inclinação de r é

$$m = \tan\theta = \left|\frac{A}{B}\right|.$$

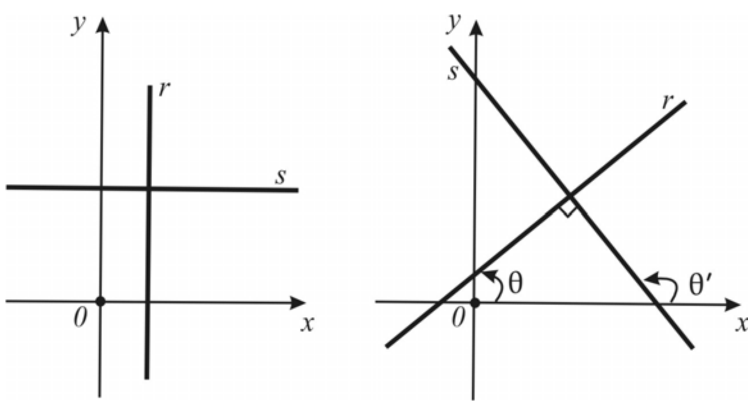

Figura 2.10: Retas perpendiculares.

Assim, pela Figura 2.10, r e s são perpendiculares se, e somente se,

$$\theta' = \theta + \frac{\pi}{2}.$$

Como

$$m' = \tan\theta' = \tan(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\frac{1}{\tan\theta}$$

temos que $m \cdot m' = -1$ ou, equivalentemente,

$$AA' + BB' = 0.$$

Se r é paralela ao eixo dos y, então r e s são perpendiculares se, e somente se, $B = A' = 0$, de modo que

$$AA' + BB' = 0.$$

Portanto, r e s são *perpendiculares* se, e somente se,

$$AA' + BB' = 0.$$

Exemplo 2.9 *Determinar se as retas são perpendiculares ou não*:

1. $3x - y - 1 = 0$ *e* $x + 3y = 0$
2. $x - y = 0$ *e* $x + 2y - 1 = 0$.

Solução. 1. Pelas equações temos que $A = 3$, $B = -1$ e $A' = 1$, $B' = 3$. Logo,

$$AA' + BB' = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 3 - 3 = 0.$$

Portanto, as retas são perpendiculares.

2. Pelas equações temos que $A = 1$, $B = -1$ e $A' = 1$, $B' = 2$. Logo,

$$AA' + BB' = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 3 = 1 - 3 = -2 \neq 0$$

Portanto, as retas não são perpendiculares mas são concorrentes, pois

$$AB' - A'B = 3 \cdot 2 - 1 \cdot (-1) = 6 + 1 = 7 \neq 0.$$

Observação 2.10 *Para estudar a posição relativa de duas retas r e s, basta discutir o sistema*

$$\begin{cases} Ax + By = -C \\ A'x + B'y = -C'. \end{cases}$$

Para finalizar esta seção, vamos expressar a equação da reta que passa em dois pontos, em forma de determinante.

A equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ é, conforme equação (2.3), dada por

$$y - y_1 = \left(\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right)(x - x_1)$$

ou, equivalentemente,

$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1),$$

ou ainda,

$$(y_1 - y_2)x - (x_1 - x_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1) = 0.$$

É fácil verificar que isto é o desenvolvimento, relativo a primeira linha, do determinante da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Portanto, a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pode ser escrita sob a forma de determinante

$$\det(\mathbf{A}) = 0.$$

Exemplo 2.11 *Determinar a equação da reta que passa pelos pontos* $P_1 = (-1, 3)$ *e* $P_2 = (2, 1)$.

Solução. Já vimos que a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (-1, 3)$ e $P_2 = (2, 1)$ é dada por

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow (3-1)x - (-1-2)y + (-1-6) = 0,$$

isto é, $2x + 3y - 7 = 0$. O determinante de uma matriz de ordem três pode, também, ser obtido pela **Regra de Sarrus**.

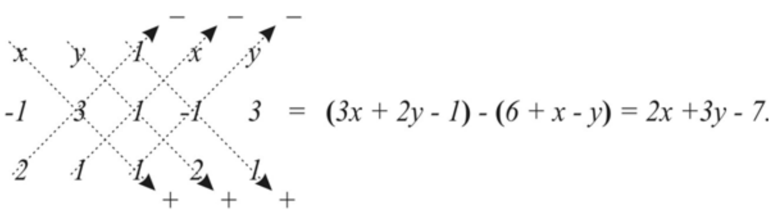

Figura 2.11: Regra de Sarrus.

Observações 2.12 1. *Sejam r e s duas retas, cujas equações cartesianas são*:

$$Ax + By + C = 0 \text{ e } A'x + B'y + C' = 0.$$

Uma condição necessária e suficiente para que r e s sejam paralelas (concorrentes) é que

$$\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A & B & 1 \\ A' & B' & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \quad \left(\det\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ A & B & 1 \\ A' & B' & 1 \end{bmatrix}\right) \neq 0\right).$$

2. *Uma condição necessária e suficiente para que três pontos $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$ e $P_3 = (x_3, y_3)$ estejam alinhados é que*

$$\det\left(\begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0.$$

Exemplo 2.13 *Determinar se os pontos* $P_1 = (2,3)$, $P_2 = (3,5)$ *e* $P_3 = (0,-1)$ *estão alinhados.*

Solução. Os pontos estão alinhados se, e somente se,

$$\det\left(\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = (10+0-3)-(0-2+9) = 7-7 = 0.$$

Portanto, os pontos $P_1 = (2,3)$, $P_2 = (3,5)$ e $P_3 = (0,-1)$ estão alinhados.

Exemplo 2.14 *Determinar a equação da reta que intercepta os eixos coordenados, fora da origem, nos pontos* $A = (p,0)$ *e* $B = (0,q)$.

Solução. Já vimos que a equação da reta que passa pelos pontos $A = (p,0)$ e $B = (0,q)$ é dada por

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ p & 0 & 1 \\ 0 & q & 1 \end{bmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow pq - qx - py = 0.$$

Portanto, dividindo esta equação por pq, obtemos

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1,$$

a qual é chamada de *equação segmetária da reta*.

EXERCÍCIOS

---

1. Determinar a inclinação da reta que passa pelos pontos dados:

   (a) $P_1 = (2,-3)$ e $P_2 = (-4,2)$ (c) $P_1 = (\frac{1}{3},\frac{1}{2})$ e $P_2 = (-\frac{5}{6},-\frac{2}{3})$

   (b) $P_1 = (5,2)$ e $P_2 = (-2,-3)$ (d) $P_1 = (\frac{3}{4},-\frac{3}{2})$ e $P_2 = (-\frac{5}{2},\frac{1}{4})$.

2. Determinar k de modo que a reta de equação $3x - 5y + k = 0$ passe pelo ponto $P = (1,-1)$.

3. Obtenha a equação reduzida de cada uma das retas. Em cada caso, determinar a inclinação e o coeficiente linear.

   (a) $5x - y + 3 = 0$ (c) $x - 2y + 4 = 0$ (e) $5x - 6y - 14 = 0$

   (b) $2x + 3y - 7 = 0$ (d) $6x + 3y - 1 = 0$ (f) $7x + 5y + 9 = 0$.

4. Determinar, se existir, o ponto de interseção das retas

   (a) $2x + y + 2 = 0$ e $3x - y - 17 = 0$;

(b) $6x + 4y - 1 = 0$ e $3x + 2y + 5 = 0$.

5. Determinar a equação da reta que tem inclinação 4 e passa pelo ponto $P = (2, -3)$.

6. Determinar a equação da reta que passa pelos pontos $P_1 = (3, 1)$ e $P_2 = (-5, 4)$.

7. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (1, 4)$ e é paralela à reta cuja equação é $2x - 5y + 7 = 0$.

8. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (-2, 3)$ e é perpendicular à reta cuja equação é $2x - y - 2 = 0$.

9. Determinar a equação da reta que intercepta o eixo dos y no ponto -4 e é perpendicular à reta cuja equação é $3x - 4y - 2 = 0$.

10. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (-3, -4)$ e é paralela ao eixo dos y.

11. Determinar a equação da reta que passa pelo ponto $P = (1, -7)$ e é paralela ao eixo dos x.

12. Determinar se as retas $3x + 5y + 7 = 0$ e $5x - 3y - 2 = 0$ são perpendiculares ou não.

13. Determinar se as retas $3x + 5y + 7 = 0$ e $6x + 10y - 5 = 0$ são paralelas ou não.

14. Considere as retas $k^2x - y + 3 = 0$ e $(3k + 4)x - y - 5 = 0$.

    (a) Determinar k para que elas sejam paralelas;

    (b) Determinar k para que elas sejam concorrentes;

    (c) Existe algum valor de k para que elas sejam coincidentes?

15. Determinar se os pontos dados estam alinhados ou não:

    (a) $P_1 = (2, 3)$, $P_2 = (-4, -7)$ e $P_3 = (5, 8)$;

    (b) $P_1 = (2, -1)$, $P_2 = (1, 1)$ e $P_3 = (3, 4)$;

    (c) $P_1 = (4, 6)$, $P_2 = (1, 2)$ e $P_3 = (-5, -4)$;

    (d) $P_1 = (-3, 6)$, $P_2 = (3, 2)$ e $P_3 = (9, -2)$.

16. Mostrar que a distância de um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ a uma reta r, cuja equação cartesiana é $Ax + By + C = 0$, é dada por

$$d(P_0, r) = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

17. Calcular a distância entre o ponto P e a reta r nos seguintes casos:

    (a) $P = (0,0)$ e $12x + 5y + 26 = 0$;

    (b) $P = (3,-2)$ e $3x - 4y + 3 = 0$;

    (c) $P = (5,-2)$ e $x + 2y - 1 = 0$;

    (d) $P = (-3,7)$ e $y = 11 - x$;

    (e) $P = (1,1)$ e $\frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 1$.

18. Calcular a distância do ponto $P = (1,2)$ à reta definida por $A = (5,7)$ e $B = (-1,-1)$.

19. Calcular a distância entre as retas r e s nos seguintes casos:

    (a) $7x + 24y - 1 = 0$ e $7x + 24y + 49 = 0$;

    (b) $2x + y - 11 = 0$ e $4x + 2y - 17 = 0$;

    (c) $Ax + By + C = 0$ e $Ax + By + C' = 0$.

20. Calcular a altura AH do triângulo ABC, dados $A = (1,1)$, $B = (-1,-3)$ e $C = (2,-7)$.

21. Calcular a altura do trapézio $ABCD$, dados $A = (0,0)$, $B = (8,1)$, $C = (16,4)$ e $D = (0,2)$.

22. Determinar as equações das retas paralelas a reta r, cuja equação é $12x - 5y + 1 = 0$, e distantes 3 unidades de r.

23. Sejam $A = (x_1, y_1)$, $B = (x_2, y_2)$ e $C = (x_3, y_3)$ três vértices de um triângulo. Mostrar que área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2} \cdot |\mathbf{D}| \text{ onde } \mathbf{D} = \det(\mathbf{A}) \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

24. Calcular a área do triângulo ABC nos seguintes casos:

    (a) $A = (9,2)$, $B = (1,10)$ e $C = (-3,-8)$;

    (b) $A = (0,0)$, $B = (3,0)$ e $C = (0,5)$;

    (c) $A = (-2,6)$, $B = (8,-4)$ e $C = (11,11)$;

    (d) $A = (x, x+3)$, $B = (x-1, x)$ e $C = (x+1, x+1)$.

25. Calcular a área do quadrilátero $ABCD$, dados $A = (1,2)$, $B = (5,0)$, $C = (7,10)$ e $D = (1,6)$.

26. Calcular a área do pentágono $ABCDE$, dados $A = (0,0)$, $B = (2,0)$, $C = (4,2)$, $D = (1,6)$ e $E = (0,4)$.

27. Dados $A = (5,1)$, $B = (7,3)$ e $C = (-1,x)$, determinar x, de modo que, o triângulo ABC tenha área igual a 4 unidades.

28. Dados $A = (-3,0)$ e $B = (0,-3)$, determinar C, de modo que, o triângulo ABC tenha área igual a 9 unidades, sabendo-se que pertence à reta $y = 2x$.

29. Considere os pontos $A = (2,0)$ e $B = (0,1)$. Determinar o ponto $P = (x,y)$ pertencente ao terceiro quadrante, de modo que, as retas AB e BP sejam perpendiculares e o triângulo ABP tenha área igual a 10 unidades.

30. De um triângulo ABC são dados:

$$B = (1,0),\ \ d(A,C)^2 = 45,\ \ d(B,C)^2 = 89 \ \text{ e } \ M = (-\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}).$$

Sendo M o ponto médio do segmento AB, determinar as coordenadas do ponto C, sabendo que estas são números inteiros.

2.6 Aplicações

Nesta seção apresentaremos algumas aplicações da equação da reta.

Exemplo 2.15 *Suponhamos que um equipamento seja comprado por um preço P e sofra uma depreciação linear até zero, após um período de N anos.*

1. *Determinar uma equação que relacione o valor do equipamento (contábil) e o tempo.*

2. *Calcular o valor contábil após 5 anos, quando $P = \$3.000,00$ e $N = 12$.*

Solução. 1. Sejam x o tempo e y o valor contábil do equipamento. Como $x = 0$ e $y = P$, $x = N$ e $y = 0$, temos que a reta passa pelos pontos $P_1 = (0,P)$ e $P_2 = (N,0)$. Logo, sua inclinação é dada por

$$m = \frac{0-P}{N-0} = -\frac{P}{N}.$$

Assim, a equação da reta é

$$y - P = -\frac{P}{N}(x-0),$$

ou ainda,

$$y = -\frac{P}{N}x + P,\ \ 0 \le x \le N.$$

2. Como $P = \$3.000,00$ e $N = 12$ temos que

$$y = -250x + 3.000,\ \ 0 \le x \le 12.$$

Quando $x = 5$, obtemos

$$y = -250 \cdot 5 + 3.000 = 1.750.$$

Portanto, o valor contábil do equipamento ao fim de 5 anos é \$1.750, 00.

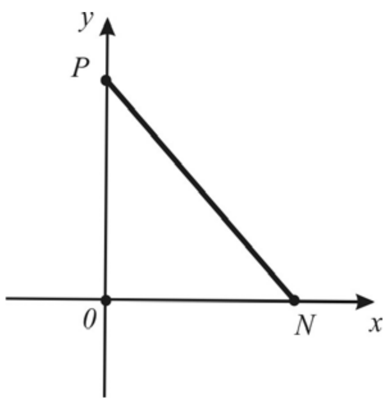

Figura 2.12: Reta de depreciação.

Exemplo 2.16 *Desde o início do ano o preço do pãozinho tem aumentado* 2% *ao mês. Em abril, o pãozinho já custava* \$0, 12 *cada.*

1. *Determinar uma equação que relacione o preço e o tempo.*

2. *Determinar o preço cobrado no início do ano.*

Solução. 1. Sejam x o número de meses desde o início do ano e y o preço do pãozinho. Como a variação de y com relação à variação de x é constante temos que a equação que relaciona x e y é uma reta, cuja inclinação é igual a 2, pois y varia de 2 quando x varia de 1 unidade.

Desde que $x = 4$ e $y = 12$, temos que a reta passa pelo ponto $P = (4, 12)$ e tem inclinação 2. Logo, a equação da reta é

$$y - 12 = 2(x - 4),$$

ou ainda,

$$y = 2x + 4.$$

2. No início do ano $x = 0$ e $y = 4$. Portanto, o preço do pãozinho no início do ano era \$0.04.

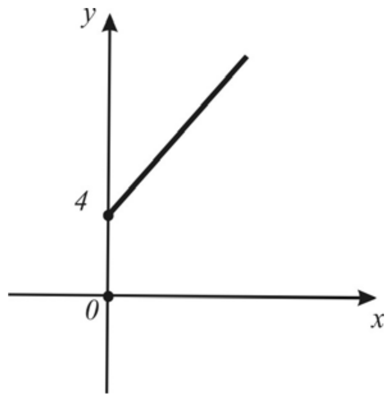

Figura 2.13: Reta de custo.

Exemplo 2.17 *A média de pontos em um teste psicotécnico efetuado em uma empresa nos últimos anos tem sofrido um decréscimo constante. Em* 1994*, a média foi* 582*, enquanto que, em* 1999*, foi de apenas* 552 *pontos.*

1. *Determinar uma equação que relacione a média de pontos e o tempo.*

2. *Qual será a média em* 2002?

Solução. 1. Sejam x o número de anos a partir de 1994 e y a média de pontos. Como a variação de y com relação à variação de x é constante temos que a equação que relaciona x e y é uma reta.

Desde que $x = 0$ e $y = 582$, $x = 5$ e $y = 552$, temos que a reta passa pelos pontos $P_1 = (0, 582)$ e $P_2 = (5, 552)$. Logo, sua inclinação é dada por

$$m = \frac{552 - 582}{5 - 0} = -\frac{30}{5} = -6.$$

Assim, a equação da reta é

$$y - 582 = -6(x - 0),$$

ou ainda,

$$y = -6x + 582.$$

2. Em 2002 obtemos $x = 8$ e

$$\begin{aligned} y &= -6 \cdot 8 + 582 \\ &= 534. \end{aligned}$$

Portanto, a média em 2002 será de 534.

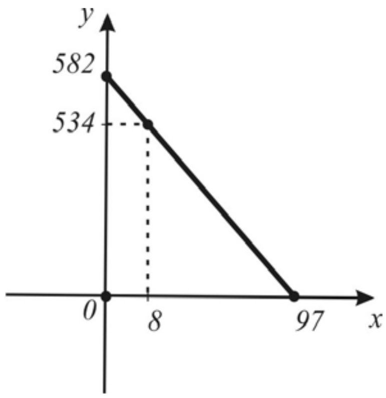

Figura 2.14: Reta de teste psicotécnico.

EXERCÍCIOS

---

1. Uma propriedade comercial foi comprada em 1973 por \$750.000, 00, sendo que o terreno foi avaliado em \$150.000, 00, enquanto as benfeitorias foram avaliadas em \$600.000, 00. As benfeitorias são depreciadas pelo método da linha reta em 20 anos. Qual o valor das benfeitorias em 1981?

2. Suponhamos que uma maquinaria tenha sido adquirida pelo preço de A e seu valor residual seja de B em N anos. Além disso, a maquinaria é depreciada pelo método da linha reta do valor A para B em N anos. Se o valor da maquinaria é y ao fim de x anos, determinar uma equação que expresse a relação entre x e y.

3. O fabricante de determinada mercadoria tem um custo total consistindo de despesas gerais semanais de \$3.000, 00 e um custo de manufatura de \$25, 00 por unidade.

   (a) Se x unidades são produzidas por semana e y é o custo total por semana, escreva uma equação relacionando x e y.

   (b) Faça um esboço do gráfico da equação obtida no item anterior.

4. Para a economia como um todo, o consumo está linearmente relacionado com a renda nacional disponível, como segue: a cada nível da renda disponível, o consumo é igual a \$3, 5 (bilhões) mais 75% da renda disponível.

   (a) Se x é a renda disponível e y é o consumo total, escreva uma equação relacionando x e y.

   (b) Qual é o consumo total quando a renda disponível é de \$50 (bilhões)?

5. Em certo banco, cobram $\$200,00$ por talão de cheques e $\$5,00$ por cheques utilizados. Em outro banco, cobram $\$100,00$ por talão de cheques e $\$9,00$ por cheques utilizados.

   (a) Determinar uma equação que relacione o serviço e os cheques utilizados, para cada banco.

   (b) Qual o banco que oferece o melhor serviço?

6. O gráfico de uma equação relacionando as leituras de temperaturas em graus Celsius e Fahrenheit é uma reta. A água congela a $0°$ Celsius e $32°$ Fahrenheit, e ferve a $100°$ Celsius e $212°$ Fahrenheit.

   (a) Se y graus Fahrenheit corresponde x graus Celsius, escreva uma equação relacionando x e y.

   (b) Faça um esboço do gráfico da equação obtida no item anterior.

   (c) Qual a temperatura Fahrenheit correspondente a $20°$ Celsius?

   (d) Qual a temperatura Celsius correspondente a $86°$ Fahrenheit?

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 2.1

3. Sim. O valor da abscissa igual a 0.

5. (a) $x = -3$ e $y = 8$; (b) $x = 1$ e $y = -1$; (c) $x = 5$ e $y = -3$; (d) $x = -3$ ou 2 e $y = 0$ ou 2; (e) $x = -2$ ou 2 e $y = -\sqrt{3}$ ou $\sqrt{3}$.

7. $(2, 1) \in A$; $(0, 1) \notin A$; $(-2, 3) \notin A$; $(1, 0) \in A$ e $(-1, -2) \in A$.

11. Seja $(x, y) \in A \times B$. Então $x \in A$ e $y \in B$. Como $B = C \cup D$ e $y \in B$ temos que $y \in C$ ou $y \in D$. Logo, $x \in A$ e $y \in C$ ou $x \in A$ e $y \in D$. Assim, $(x, y) \in A \times C$ ou $(x, y) \in A \times D$. Portanto,

$$(x, y) \in (A \times C) \cup (A \times D),$$

ou seja, $A \times B \subseteq (A \times C) \cup (A \times D)$. A recíproca prova-se de modo análogo.

Seção 2.2

1. (a) $5\sqrt{2}$ u c; (b) $2\sqrt{5}$ u c; (c) 5 u c.

3. (a) Como $d(A,B) = 5$, $d(A,C) = 4$ e $d(B,C) = 3$ são os comprimentos dos lados do triângulo ABC temos que o perímetro é igual
$$p = 3 + 4 + 5 = 12;$$
(b) Como
$$d(A,B)^2 = d(A,C)^2 + d(B,C)^2$$
temos que o triângulo ABC é retângulo e sua área é igual a 6 u a.

5. $P = (1, 0)$.

7. O raio da circunferência que tem centro em $C = (4, 9)$ e que passa pelo ponto $P = (-2, 1)$ é dado por
$$r = d(A,B) = 10.$$

Seção 2.5

1. (a) $m = \frac{5}{6}$; (b) $m = \frac{5}{7}$; (c) $m = 1$; (d) $m = -\frac{7}{13}$.

3. (a) $y = 5x + 3$, $m = 5$ e $b = 3$; (b) $y = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$, $m = -\frac{2}{3}$ e $b = \frac{7}{3}$; (c) $y = \frac{1}{2}x + 2$, $m = \frac{1}{2}$ e $b = 2$; (d) $y = -2x + \frac{1}{3}$, $m = -2$ e $b = \frac{1}{3}$.

5. $y = 4x - 11$.

7. $2x - 5y + 18 = 0$.

9. $4x + 3y + 12 = 0$.

11. $y = -7$.

13. Sim.

15. (a) Sim; (b) Não; (c) Não; (d) Sim.

17. (a) 2 u c; (b) 4 u c; (c) 0 u c; (d) $\frac{7\sqrt{2}}{2}$ u c; (e) $3\sqrt{2}$ u c.

19. (a) 2 u c; (b) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ u c; (c) $\frac{|C'-C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ u c.

21. $\frac{16\sqrt{65}}{65}$ u a.

23. Sabemos que área do triângulo ABC é dada por

$$S = \frac{1}{2}(\text{base} \cdot \text{altura}).$$

Fixando um dos vértices, digamos A, obtemos que o comprimento da base é igual a $d(B, C)$ e da altura é igual a $d(A, r)$, onde r é a reta que passa pelos pontos B e C, isto é,

$$(y_3 - y_2)x + (x_2 - x_3)y + (x_3y_2 - x_2y_3) = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} d(A, r) &= \frac{|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (x_3y_2 - x_2y_3)|}{\sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}} \\ &= \frac{|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (x_3y_2 - x_2y_3)|}{d(B, C)} \end{aligned}$$

temos que

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}d(B, C) \cdot d(A, r) \\ &= \frac{1}{2}\left|(y_3 - y_2)x_1 + (x_2 - x_3)y_1 + (x_3y_2 - x_2y_3)\right| \\ &= \frac{1}{2}\left|\mathbf{D}\right|, \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{D} = \det(\mathbf{A}) \text{ e } \mathbf{A} = \begin{bmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{bmatrix}.$$

25. 32 u a.

27. $x = -9$ ou $x = -1$.

29. $P = (-4, -7)$.

Seção 2.6

1. $\$360.000,00$.

3. (a) $y = 25x + 3.000$.

5. (a) Sejam x o número de cheques e y o serviço. Então

$$y = 5x + 200 \text{ e } y = 9x + 100$$

são as equações que relaciona o serviço e os cheques utilizados, para cada banco. (b) O ponto de equilíbrio é $x = 25$. Se $x < 25$, então o melhor serviço é oferecido pelo segundo banco. Se $x > 25$, então o melhor serviço é oferecido pelo primeiro banco.

Capítulo 3

Funções

O principal objetivo deste capítulo é levar o aluno a entender o conceito de função, suas representações e aplicá-lo a diferentes problemas relacionados às áreas científicas e tecnológicas.

3.1 Funções

O conceito de função é um dos mais básicos em toda a Matemática (O conceito de função foi introduzido pelo matemático suíço Jean Bernoulli, 1667 - 1748). Uma função é, geralmente, definida como segue:

Definição 3.1 *Uma função consiste do seguinte:*

1. *Um conjunto X, chamado o domínio da função;*

2. *Um conjunto Y, chamado o contradomínio da função;*

3. *Uma regra (ou correspondência) f, que associa a cada elemento x de X um único elemento y de Y.*

Para indicar a conexão entre x e y usualmente escreve-se $y = f(x)$. A notação utilizada é:

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & Y \\ & x & \mapsto & f(x). \end{array}$$

O elemento $y \in Y$ é o *valor* de f em x. O domínio X da função f será donotado por $\operatorname{Dom} f = X$. A *imagem* da função f, denotada por $\operatorname{Im} f$, é o subconjunto de Y que consiste em todos os valores possíveis $f(x)$, para cada $x \in X$, isto é,

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{y \in Y : y = f(x), \text{ para algum } x \in X\} \\ &= \{f(x) : x \in X\} \\ &= f(X). \end{aligned}$$

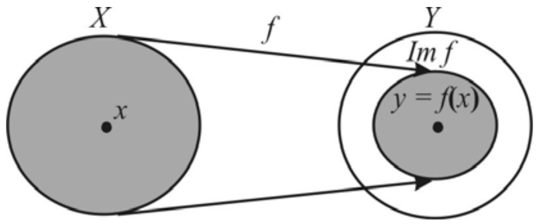

Figura 3.1: Função como uma transformação.

Uma outra maneira de visualizar uma função é como uma máquina (confira Figura 3.2), que aceita elementos do domínio $\operatorname{Dom} f$ como entradas e produz elementos da imagem $\operatorname{Im} f$ como saída.

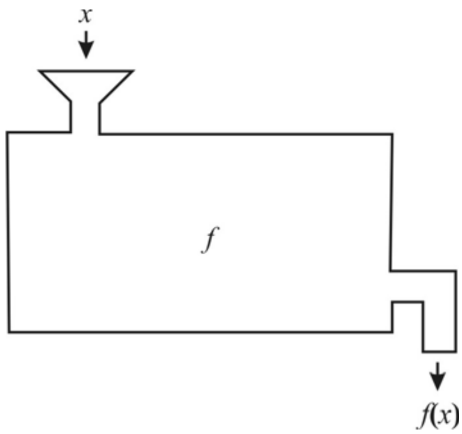

Figura 3.2: Função como uma máquina.

Observações 3.2 *1. Note que a cada elemento $x \in X$ corresponde a um único elemento $y \in Y$, isto é, $y = f(x)$ é unicamente determinado por x, não obstante, diferentes elementos de X podem originar o mesmo valor da função em Y.*

2. Se uma função f é definida por uma equação, então compreende-se que o domínio de f consiste naqueles valores de x para os quais a equação faz associar um único y. Por exemplo, se f é definida por

$$f(x) = \frac{5x-2}{x+4},$$

então $x \neq -4$, pois o quociente não é definido para $x = -4$. Logo, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{-4\}$.

Exemplo 3.3 *Se $f(x) = \sqrt{x-2}$, determinar, se existir, $f(27)$, $f(5)$, $f(2)$, $f(1)$ e*

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}, h \neq 0.$$

Solução.

$$\begin{aligned}
f(27) &= \sqrt{27-2} = \sqrt{25} = 5,\\
f(5) &= \sqrt{5-2} = \sqrt{3},\\
f(2) &= \sqrt{2-2} = 0,\\
f(1) &= \sqrt{1-2} = \sqrt{-1}.
\end{aligned}$$

Note que o valor $f(1)$ não é difinido, pois não existe raiz quadrada de número real negativo. Assim, f não é definida em $x = 1$. Finalmente,

$$\begin{aligned}
\frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{\sqrt{x+h-2}-\sqrt{x-2}}{h}\\
&= \frac{\sqrt{x+h-2}-\sqrt{x-2}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h-2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x+h-2}+\sqrt{x-2}}\\
&= \frac{(x+h-2)-(x-2)}{h\left(\sqrt{x+h-2}+\sqrt{x-2}\right)}\\
&= \frac{1}{\sqrt{x+h-2}+\sqrt{x-2}}.
\end{aligned}$$

Exemplo 3.4 *Se $f(x) = \frac{x^2-4}{x-1}$, determinar o domínio e calcular, se existir, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(-2)$, $f(2)$ e $f(1)$.*

Solução. Note que a função f só não é definida em $x = 1$, assim, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$.

$$\begin{aligned}
f(0) &= \frac{0^2-4}{0-1} = \frac{-4}{-1} = 4,\\
f(\frac{1}{2}) &= \frac{(\frac{1}{2})^2-4}{(\frac{1}{2})-1} = \frac{\frac{1}{4}-4}{\frac{1}{2}-1} = \frac{-\frac{15}{4}}{-\frac{1}{2}} = \frac{15}{2}.
\end{aligned}$$

$f(-2) = f(2) = 0$ e $f(1)$ não existe.

Exemplo 3.5 *Determinar o domínio da função $f(x) = \sqrt{9-x^2}$.*

Solução. Como a raiz quadrada é definida apenas para números reais positivos temos que f é definida se $9 - x^2 \geq 0$. Portanto,

$$\operatorname{Dom} f = [-3, 3].$$

Exemplo 3.6 *Determinar o domínio da função $f(x) = \sqrt{3+x} + \sqrt{7-x}$.*

Solução. f é definida se $3 + x \geq 0$ e $7 - x \geq 0$. Portanto,

$$\operatorname{Dom} f = [-3, 7].$$

Exemplo 3.7 *Determinar o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x}{x+1}}$.*

Solução. f é definida se $\frac{x}{x+1} \geq 0$ e $x+1 \neq 0$. Portanto,

$$\operatorname{Dom} f =]-\infty, -1[\ \cup\ [0, +\infty[.$$

Muitas fórmulas que ocorrem em matemática determinam funções. Por exemplo, a fórmula $C = 2\pi r$ do comprimento de um círculo de raio r associa a cada número real positivo r um único valor de C. Como o valor de C é determinado pelo número arbitrário r, chamamos C de *variável dependente* e r de *variável independente*.

Observação 3.8 *Uma função pode ser definida por mais de uma equação. Por exemplo,*

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & se\ x < 0, \\ x^2 & se\ 0 \leq x < 2, \\ 1 & se\ x \geq 2. \end{cases}$$

Neste caso, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$*.*

3.2 Gráficos de Funções

O gráfico de uma função $f : X \to Y$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) do produto cartesiano $X \times Y$ tais que $y = f(x)$, isto é,

$$\operatorname{Graf}(f) = \{(x, y) \in X \times Y : y = f(x)\}.$$

Observação 3.9 *Para esboçar o gráfico de uma função f devemos determinar, se existir, as interseções com os eixos coordenados, isto é,*

$$(0, f(0))\ \ ou\ \ (x, f(x) = 0).$$

Exemplo 3.10 *Sejam* $X = \{-1, 0, 1, 2\}$*,* $Y = \{0, 1, 2\}$ *e f a função definida pela tabela*

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0	0	2	1

Então o gráfico de f é

$$\operatorname{Graf}(f) = \{(-1, 0), (0, 0), (1, 2), (2, 1)\}$$

(*confira Figura* 3.3).

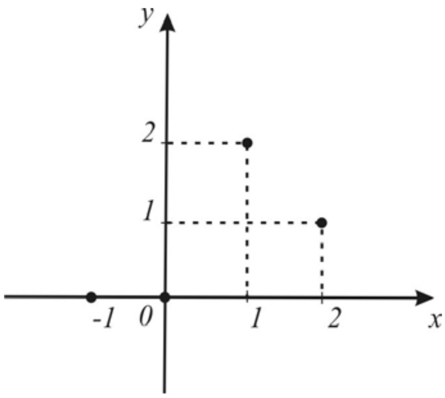

Figura 3.3: Gráfico da função f.

Claramente, podemos usar as informações contidas na tabela para construir o gráfico de f e usar as informações contidas no gráfico para construir a tabela de f. Assim, uma função determina completamente seu gráfico e, reciprocamente, seu gráfico determina completamente a função. Logo, não existe necessidade de distinguir entre uma função e seu gráfico. Portanto, o domínio da função é a projeção do gráfico sobre o eixo dos x e a imagem da função é a projeção do gráfico sobre o eixo dos y.

Observações 3.11 *1. Para transladar o gráfico de uma função $y = f(x)$ para cima (baixo), adicione uma constante positiva (negativa) k do lado direito da equação $y = f(x)$, isto é,*

$$y = f(x) + k.$$

2. Para transladar o gráfico de uma função $y = f(x)$ para à direita (à esquerda), adicione uma constante negativa (positiva) k a x, isto é,

$$y = f(x + k).$$

Exemplo 3.12 *Esboçar o gráfico da função $f(x) = \sqrt{5 - x}$.*

Solução. É fácil verificar que $\text{Dom}\, f = \,]-\infty, 5]$, a interseção com o eixo dos y é

$$f(0) = \sqrt{5 - 0} = \sqrt{5},$$

isto é, a interseção com o eixo dos y ocorre no ponto $(0, \sqrt{5})$ e com o eixo dos x é

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 5,$$

isto é, a interseção com o eixo dos x ocorre no ponto $(5, 0)$. Façamos uma tabela de alguns valores de $f(x)$.

x	5	4	3	2	1	-4
$f(x)$	0	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2	3

O gráfico da função $f(x) = \sqrt{5-x}$ é a metade de uma parábola (confira Figura 3.4).

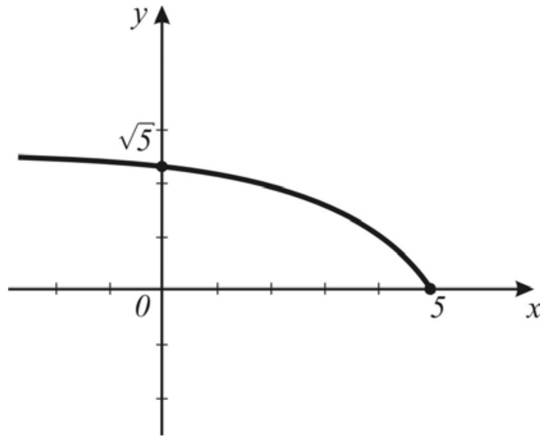

Figura 3.4: Gráfico da função $f(x) = \sqrt{5-x}$.

Exemplo 3.13 *Esboce o gráfico da função* $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$, a interseção com o eixo dos y é

$$f(0) = \frac{0}{0-1} = 0,$$

isto é, a interseção com o eixo dos y ocorre no ponto $(0,0)$ e com o eixo dos x é

$$f(x) = 0 \Rightarrow x = 0,$$

isto é, a interseção com o eixo dos x ocorre, também, em $(0,0)$. Façamos uma tabela de alguns valores de $f(x)$.

x	-1.000	-2	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	2	3	1.000
$f(x)$	$\frac{1.000}{1.001}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	3	2	$\frac{3}{2}$	$\frac{1.000}{999}$

O gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ é uma hipérbole (confira Figura 3.5).

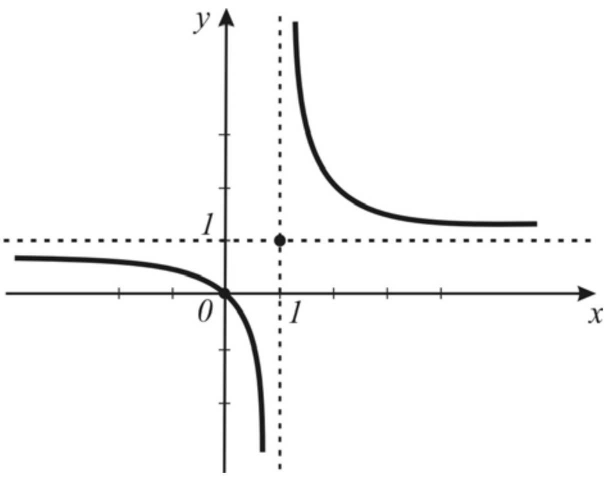

Figura 3.5: Gráfico da função $f(x) = \frac{x}{x-1}$.

Mais geralmente, o gráfico da função $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$, com $ad - bc \neq 0$, é uma hipérbole, pois

$$\begin{aligned} y &= \frac{ax+b}{cx+d} \\ &= \frac{\frac{a}{c}x + \frac{b}{c}}{x + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{\frac{a}{c}x + \frac{ad}{c^2} + \frac{b}{c} - \frac{ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} \\ &= \frac{a}{c} + \frac{-\frac{ad-bc}{c^2}}{x + \frac{d}{c}} \end{aligned}$$

ou, equivalentemente,

$$Y = \frac{k}{X},$$

onde

$$Y = y - \frac{a}{c}, \;\; X = x + \frac{d}{c} \;\text{ e }\; k = -\frac{ad - bc}{c^2}.$$

As retas

$$x = -\frac{d}{c} \;\text{ e }\; y = \frac{a}{c}$$

são chamadas *assíntotas* vertical e horizontal ao gráfico da função

$$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}.$$

3.3 Propriedades de Funções

Seja X um subconjunto não-vazio de $\mathbb{R}$. A função $I_X : X \to X$ definida por

$$I_X(x) = x, \;\; \forall x \in X$$

é chamada de *função identidade*.

Sejam X, Y, Z e W subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$ e $f : X \to Y$, $g : Z \to W$ duas funções. Dizemos que f e g são *iguais* e escreveremos $f = g$, se $X = Z$, $Y = W$ e $f(x) = g(x)$, para todo $x \in X$.

Exemplo 3.14 *As funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *e* $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & |x|^2 \end{array}$$

são iguais, no entanto, as funções

$$\begin{array}{rcccl} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x^2 \end{array} \quad e \quad \begin{array}{rcccl} g & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

não são iguais.

Propriedade 3.15 *Sejam X, Y, Z e W subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$ e $f : X \to Y$, $g : Z \to W$ duas funções. Então:*

1. $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$, *para todo* $x \in X \cap Z = \mathrm{Dom}(f + g)$;

2. $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$, *para todo* $x \in X \cap Z = \mathrm{Dom}(f - g)$;

3. $(cf)(x) = cf(x)$, *para todo* $x \in X$ *e* $c \in \mathbb{R}$ *constante*;

4. $(f \cdot g)(x) = f(x)g(x)$, *para todo* $x \in X \cap Z = \mathrm{Dom}(f \cdot g)$;

5. $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, *para todo* $x \in \mathrm{Dom}(\frac{f}{g}) = \{x : x \in X \cap Z,\ \ g(x) \neq 0\}$.

Exemplo 3.16 *Sejam $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ e $g(x) = x^2 - 1$ duas funções. Determinar a soma, a diferença, o produto e o quociente de f e g, e ache o domínio de cada um.*

Solução. É claro que $\mathrm{Dom}\, f = [-3, 3]$ e $\mathrm{Dom}\, g = \mathbb{R}$. Assim,

$$\mathrm{Dom}\, f \cap \mathrm{Dom}\, g = [-3, 3]$$

e

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= \sqrt{9-x^2} + x^2 - 1,\ \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f+g) = [-3,3] \\
(f-g)(x) &= \sqrt{9-x^2} - (x^2 - 1),\ \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f-g) = [-3,3] \\
(f \cdot g)(x) &= \left(\sqrt{9-x^2}\right)(x^2 - 1),\ \ \forall x \in \mathrm{Dom}(f \cdot g) = [-3,3] \\
\left(\frac{f}{g}\right)(x) &= \frac{\sqrt{9-x^2}}{x^2-1},\ \ \forall x \in \mathrm{Dom}(\frac{f}{g}) = [-3,3] - \{-1, 1\}.
\end{aligned}$$

Sejam X, Y e Z subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$ e $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ duas funções. Então, podemos construir uma nova função, denotada por $g \circ f$, cujo valor em $x \in X$ é

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

isto é, primeiro determina o valor de f em x para depois detereminar o valor de g em $f(x)$. A função $g \circ f$ é chamada a *função composta* de f com g e

$$\mathrm{Dom}\, g \circ f = \{x \in X : f(x) \in Y\} \subseteq \mathrm{Dom}\, f \ \text{ e } \ \mathrm{Im}\, g \circ f \subseteq \mathrm{Im}\, g.$$

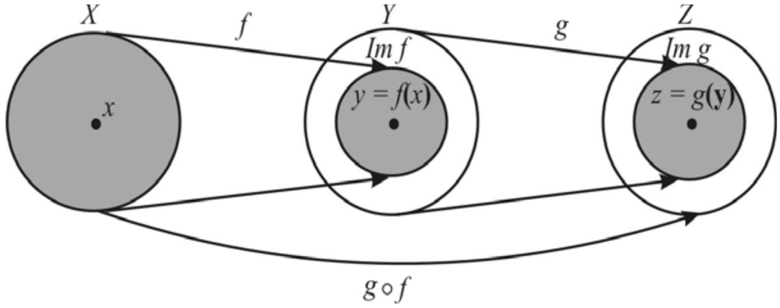

Figura 3.6: Função composta de f com g.

Dizemos que f é a função *interna* e que g é a função *externa*.

Exemplo 3.17 *Sejam* $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ *e* $g(x) = x^2 - 1$ *funções. Determinar* $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *e o domínio de cada uma delas.*

Solução. Note que

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(x^2 - 1) \\ &= \sqrt{9 - (x^2 - 1)^2} \\ &= \sqrt{8 - x^4 + 2x^2} \end{aligned} \quad \text{e} \quad \begin{aligned} (g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(\sqrt{9 - x^2}) \\ &= \left(\sqrt{9 - x^2}\right)^2 - 1 \\ &= 8 - x^2. \end{aligned}$$

Como $\operatorname{Dom} f = [-3, 3]$ e $\operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$ temos que

$$\operatorname{Dom} f \circ g = \{x \in \mathbb{R} : g(x) \in [-3, 3]\} = [-2, 2]$$

e

$$\operatorname{Dom} g \circ f = \{x \in [-3, 3] : f(x) \in \mathbb{R}\} = [-3, 3].$$

Seja $f : X \to Y$ uma função, com X e Y subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Dizemos que f é *par* se

$$f(x) = f(-x), \ \ \forall x \in X.$$

e que é *ímpar* se

$$-f(x) = f(-x), \ \ \forall x \in X.$$

Exemplo 3.18 *Sejam* $f(x) = 5x^3 + 2x$, $g(x) = x^2 - 1$ *e* $h(x) = x(x - 2)$ *três funções. Determinar se* f, g *e* h *são pares, ímpares ou nem pares nem ímpares.*

Solução. Como

$$\begin{aligned} f(-x) &= 5(-x)^3 + 2(-x) \\ &= -5x^3 - 2x \\ &= -(5x^3 + 2x) = -f(x) \end{aligned}$$

temos que f é ímpar. Faça o mesmo com g e h.

Observação 3.19 *O gráfico de uma função par (ímpar) é simétrico com relação ao eixo dos* y *(à origem* 0*), pois se* f *é par e* $(x, y) \in \operatorname{Graf}(f)$*, então* $(-x, y) \in \operatorname{Graf}(f)$ *(pois se* f *é ímpar e* $(x, y) \in \operatorname{Graf}(f)$*, então* $(-x, -y) \in \operatorname{Graf}(f)$*).*

Seja $f : X \to Y$ uma função, com X e Y subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Dizemos que f é *injetora* se

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2, \ \ \forall x_1, x_2 \in X$$

ou, equivalentemente,

$$x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2), \ \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

Exemplo 3.20 *Sejam $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x^2 - 4x + 3$ duas funções. Determinar se f e g são injetoras ou não.*

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 3x_1 + 1 = 3x_2 + 1 \Rightarrow x_1 = x_2.$$

Portanto, f é injetora. Note que, para $x_1 = 1$ e $x_2 = 3$ temos que $g(x_1) = g(x_2) = 0$ com $x_1 \neq x_2$. Portanto, g não é injetora.

Seja $f : X \to Y$ uma função, com X e Y subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Dizemos que f é *sobrejetora* se dado $y \in Y$, existir $x \in X$ tal que $y = f(x)$, isto é,

$$\operatorname{Im} f = Y.$$

Exemplo 3.21 *Sejam $f(x) = 3x + 1$ e $g(x) = x^2 - 4x + 3$ duas funções. Determinar se f e g são sobrejetoras ou não.*

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Dom} g = \mathbb{R}$. Dado $y \in \mathbb{R}$, existe

$$x = \frac{y-1}{3} \in \mathbb{R}$$

tal que

$$f(x) = f(\frac{y-1}{3}) = 3(\frac{y-1}{3}) + 1 = y - 1 + 1 = y.$$

Portanto, f é sobrejetora. Note que, para $y = -3$ não existe nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $y = g(x)$, isto é, existe $y = -3 \in \mathbb{R}$ tal que $y \neq f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$, isto é, $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}$. Portanto, g não é sobrejetora.

Seja $f : X \to Y$ uma função, com X e Y subconjuntos não-vazios de $\mathbb{R}$. Dizemos que f é *bijetora* se ela é injetora e sobrejetora. Pelos exemplos acima, a função $f(x) = 3x + 1$ é bijetora. Se $f : X \to Y$ é uma função bijetora, então existe uma função $g : Y \to X$ tal que

$$f \circ g = I_Y \text{ e } g \circ f = I_X.$$

Notação: $g = f^{-1}$ e f^{-1} é chamada de *função inversa* de f, isto é,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

Assim, $\operatorname{Dom} f = \operatorname{Im} f^{-1}$ e $\operatorname{Dom} f^{-1} = \operatorname{Im} f$.

Observação 3.22 *O gráfico da função f e de sua inversa f^{-1} são simétricos com relação à reta $y = x$, pois se $(a, b) \in \operatorname{Graf}(f)$, então $b = f(a)$ e*

$$f^{-1}(b) = f^{-1}(f(a) = (f^{-1} \circ f)(a) = I_X(a) = a,$$

isto é, $(b, a) \in \operatorname{Graf}(f^{-1})$ (confira Figura 3.7).

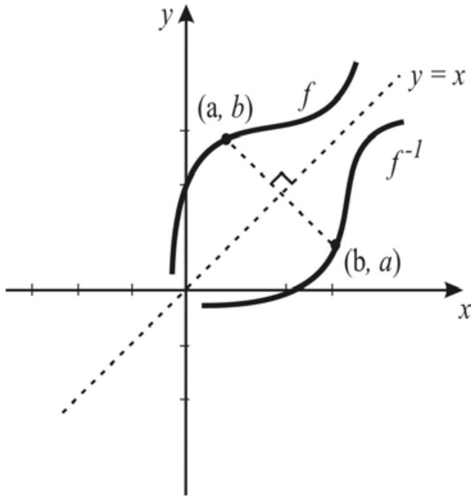

Figura 3.7: Gráficos das funções f e f^{-1}.

Exemplo 3.23 *Seja* $f :]1, +\infty[\to]1, +\infty[$ *definida por* $f(x) = \frac{x}{x-1}$. *Determinar* f^{-1}.

Solução. Primeiro devemos mostrar que f é bijetora. É claro que $\operatorname{Dom} f =]1, +\infty[$. Assim, dados $x_1, x_2 \in]1, +\infty[$,

$$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \frac{x_1}{x_1 - 1} = \frac{x_2}{x_2 - 1} \Rightarrow (x_2 - 1)x_1 = (x_1 - 1)x_2 \Rightarrow x_1 = x_2,$$

pois $x_1 - 1 > 0$ e $x_2 - 1 > 0$. Portanto, f é injetora. Agora, dado $y \in]1, +\infty[$,

$$y = \frac{x}{x-1} \Leftrightarrow (x-1)y = x \Leftrightarrow x = \frac{y}{y-1},$$

existe $x = \frac{y}{y-1} \in]1, +\infty[$ tal que

$$f(x) = f(\frac{y}{y-1}) = \frac{\frac{y}{y-1}}{\frac{y}{y-1} - 1} = \frac{\frac{y}{y-1}}{\frac{y-(y-1)}{y-1}} = \frac{\frac{y}{y-1}}{\frac{1}{y-1}} = y.$$

Portanto, f é sobrejetora. Assim, f^{-1} existe e é definida por $f^{-1}(x) = \frac{x}{x-1}$.

EXERCÍCIOS

---

1. Seja $f(x) = \sqrt{6 + 2x}$ uma função. Determinar $f(\sqrt{5}) \cdot f(-\sqrt{5})$.

2. Para cada função abaixo

   (a) $f(x) = 5x - 2$ (b) $f(x) = 2x^2 + 3x - 7$ (c) $f(x) = 3 - 4x$.

   Determinar e simplificar: $f(a)$, $f(-a)$, $-\ f(a)$, $f(a+h)$, $f(a)+\ f(h)$ e $\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$ com $h \neq 0$.

3. A função $f(x) = \frac{x}{|x|} - \frac{|x|}{x}$ é uma função nula? Justifique

4. Seja $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$ uma função. Determinar
$$y = \frac{f(x) - f(-x)}{1 + f(x) \cdot f(-x)}.$$

5. Sabendo que k e m são as raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 2cx + c^2 - 2c - 1$, determinar todos os valores reais de c tais que
$$\frac{(k-m)^2 - 2}{(k+m)^2 + 2}$$
seja um número inteiro.

6. Sejam $f(x) = x - 4k$ e $g(x) = x^2 - k$ duas funções. Determinar o valor de k sabendo-se que $(f \circ g)(1) = 16$.

7. Determinar o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \frac{x+1}{x^3-4x}$ (b) $f(x) = \frac{4x}{6x^2+13x-5}$ (c) $f(x) = \frac{\sqrt{2x-3}}{x^2-5x+4}$.

8. Determinar se as funções abaixo são pares, ímpares ou nem pares nem ímpares:

   (a) $f(x) = 5x^3 - 2x$ (c) $f(x) = (8x^3 - 3x^2)^3$ (e) $f(x) = \sqrt{3x^4 + 2x^2 - 5}$
   (b) $f(x) = |x| - 3$ (d) $f(x) = x(x-5)$ (f) $f(x) = (x-2)(x-3)$.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Mostrar que:

   (a) A função $g(x) = f(x) + f(-x)$ é par;

   (b) A função $h(x) = f(x) - f(-x)$ é ímpar;

   (c) f pode ser escrita como a soma de uma função par e uma função ímpar.

10. Esboçar, no mesmo plano cartesiano, os gráficos das funções abaixo, para os valores dados de c:

    (a) $f(x) = |x| + c$ e $c = 0, 1, -3$ (d) $f(x) = -2(x-c)^2$ e $c = 0, 1, -2$
    (b) $f(x) = |x - c|$ e $c = 0, 2, -3$ (e) $f(x) = c\sqrt{4 - x^2}$ e $c = 1, 3, -2$
    (c) $f(x) = 2\sqrt{x} + c$ e $c = 0, 3, -2$ (f) $f(x) = (x-1)^{\frac{1}{3}} - c$ e $c = 0, 2, -1$.

11. Sabendo que o gráfico de uma função f, com Dom $f = [0, 4]$, é a parábola de vértice em $(2, 0)$ e concavidade voltada para cima, esboçar o gráfico de:

    (a) $y = f(x+3)$ e $y = f(x-3)$;

    (b) $y = f(x) - 3$ e $y = f(x) + 3$;

    (c) $y = -3f(x)$, $y = -f(x+2) - 3$ e $f(x-2) + 3$.

12. Esboçar o gráfico das seguintes funções:

$$(a)\quad f(x) = \begin{cases} x+2 & \text{se } x \leq -1 \\ x^3 & \text{se } |x| < 1 \\ -x+3, & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad (c)\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1} & \text{se } x \neq 1 \\ 2, & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

$$(b)\quad f(x) = \begin{cases} x-3 & \text{se } x \leq -2 \\ -x^2 & \text{se } -2 < x < 1 \\ -x+4, & \text{se } x \geq 1 \end{cases} \qquad (d)\quad f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+1}{x+1} & \text{se } x \neq -1 \\ 3, & \text{se } x = -1 \end{cases}$$

13. Determinar a soma, a diferença, o produto, o quociente e seus domínios, de cada função abaixo:

   (a) $f(x) = \sqrt{x+5}$ e $g(x) = \sqrt{x+5}$;

   (b) $f(x) = \frac{2x}{x-4}$ e $g(x) = \frac{x}{x+5}$;

   (c) $f(x) = \frac{x}{x-2}$ e $g(x) = \frac{3x}{x+4}$.

14. Determinar no exercício acima $f \circ g$ e $g \circ f$. Determinar também os domínios.

15. Sendo $f(2x-3) = x^2$, determinar $f(x)$.

16. Seja $f : \mathbb{R} - \{-\frac{5}{3}\} \to \mathbb{R} - \{-\frac{2}{3}\}$ a função definida pela regra $f(x) = \frac{2x-7}{3x+5}$. Determinar $f^{-1}(2)$.

17. Determinar uma forma funcional composta para y:

   $(a)\quad y = (x^2+3x)^{\frac{1}{3}} \qquad (b)\quad y = \frac{1}{(x-3)^4} \qquad (c)\quad y = \sqrt[4]{x^4-16} \qquad (d)\quad y = \frac{\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[3]{x}}$.

18. Determinar a função inversa e seu domínio, de cada função abaixo:

   $(a)\quad f(x) = \frac{1}{3x-2},\ \forall x \in \,]\frac{2}{3}, +\infty[\qquad (c)\quad f(x) = 5x^2+2,\ \forall x \in [0, +\infty[$

   $(b)\quad f(x) = \frac{3x+2}{2x-5},\ \forall x \in \,]\frac{5}{2}, +\infty[\qquad (d)\quad f(x) = \sqrt[3]{x}+1,\ \forall x \in \mathbb{R}$.

19. Verificar se as seguintes funções f são bem definidas:

   (a) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Z}$ definida por $f(\frac{m}{n}) = m$;

   (b) $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ definida por $f(\frac{m}{n}) = \frac{m^2}{n^2}$.

20. Defina $f : [0,1] \to [a,b]$ pela fórmula $f(x) = a(1-x)+bx$. Mostrar que f é bijetora.

21. Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que

   (a) seja injetora mas não seja sobrejetora;

   (b) seja sobrejetora mas não seja injetora.

22. Para $a, b \in \mathbb{R}$, defina $f_{ab} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ pela fórmula $f_{ab}(x) = ax+b$ para cada $x \in \mathbb{R}$. Mostrar que:

(a) $f_{1b} \circ f_{a0} = f_{ab}$;

(b) Se $a \neq 0$, então f_{ab} é bijetora. Obtenha f_{ab}^{-1}.

23. Sejam $f : X \to Y$ e $g : Y \to Z$ duas funções. Mostrar que:

    (a) Se $g \circ f$ é sobrejetora, então g também o é;

    (b) Se $g \circ f$ é injetora, então f também o é;

    (c) Se f e g são ambas bijetoras, então $g \circ f$ também o é e, além disso, $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

24. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ duas funções tais que

$$g(x) = x - \frac{1}{x} \;\text{ e }\; (f \circ g)(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}.$$

    Determinar $f(4)$.

25. Determinar $k \in \mathbb{R}$, de modo que a função

$$f(x) = \frac{2x+6}{x+k}$$

    com $x \neq -k$, tenha como inversa a função

$$f^{-1}(x) = \frac{5x+6}{x-2}.$$

26. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ uma função tal que

$$f(x+y) = f(x) \cdot f(y), \;\; \forall \; x, y \in \mathbb{R}, \;\text{ e }\; f(1) = 9.$$

    Determinar $f(2)$, $f(0)$ e $f(\frac{1}{2})$. Agora, determine $f(n)$ e $f(\frac{1}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 3.3

1. 4.

3. Não, pois o domínio de f é igual a $\mathbb{R} - \{0\}$ e o da função nula é igual a $\mathbb{R}$.

4. $\frac{-2x}{x^2-1}$.

5. Como k e m são as raízes da função quadrática $f(x) = x^2 - 2cx + c^2 - 2c - 1$ temos que
$$k + m = 2c \text{ e } km = c^2 - 2c - 1.$$
Logo,
$$(k+m)^2 + 2 = 4c^2 + 2$$
e
$$\begin{aligned}(k-m)^2 - 2 &= (k+m)^2 - 4km - 2\\ &= 8c + 2.\end{aligned}$$
Assim,
$$\frac{(k-m)^2 - 2}{(k+m)^2 + 2} = \frac{8c+2}{4c^2+2} = \frac{4c+1}{2c^2+1} \in \mathbb{Z}$$
se, e somente se, existe $n \in \mathbb{Z}$ tal que
$$4c + 1 = (2c^2+1)n \Leftrightarrow 2nc^2 - 4c + n - 1 = 0.$$
Como $c \in \mathbb{R}$ devemos ter
$$\Delta = (-4)^2 - 4(2n)(n-1) \geq 0 \Leftrightarrow n^2 - n - 2 \leq 0 \Leftrightarrow n \in \{-1, 0, 1, 2\}.$$
Para $n = -1$, obtemos $c = -1$. Continue.

6. $k = -3$.

7. (a) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{0, 4\}$;

   (b) $\text{Dom}\, f = \mathbb{R} - \{-\frac{5}{2}, \frac{1}{3}\}$;

   (c) $\text{Dom}\, f = [\frac{3}{2}, +\infty[\ -\{1, 4\}$;

   (d) $\text{Dom}\, f = [\frac{3}{4}, +\infty[\ -\{-2, 2\}$;

   (e) $\text{Dom}\, f = \ ]-\infty, 0]$;

   (f) $\text{Dom}\, f = [-\frac{1}{2}, +\infty[$;

   (g) $\text{Dom}\, f = \ ]-1, +\infty[$;

   (h) $\text{Dom}\, f = \ ]\frac{2}{3}, +\infty[$;

   (i) $\text{Dom}\, f = \ ]-\infty, -1[\ \cup\ ]1, +\infty[$;

   (j) $\text{Dom}\, f = \ ]-\infty, 1[\ \cup\ ]2, +\infty[$.

9. (a) Como
$$g(-x) = f(-x) + f(-(-x)) = f(-x) + f(x) = g(x)$$
temos que g é uma função par;

   (b) Como
$$h(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) = -h(x)$$

temos que g é uma função ímpar;

(c) Note que

$$g(x) + h(x) = 2f(x) \Rightarrow f(x) = \frac{1}{2}(g(x) + h(x)).$$

Portanto, f pode ser escrita como a soma de uma função par e uma função ímpar.

15. $f(x) = \frac{1}{4}(x^2 + 6x + 9)$.

16. $f^{-1}(2) = -\frac{17}{4}$.

17. (a) $y = u^{\frac{1}{3}}$, onde $u = x^2 + 3x$; (b) $y = \frac{1}{u^4}$, onde $u = x - 3$; (c) $y = \sqrt[4]{u}$, onde $u = x^4 - 16$; (d) $y = \frac{u}{1+u}$, onde $u = \sqrt[3]{x}$.

19. (a) Não, pois $\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ mas $f(\frac{1}{2}) = 1 \neq 3 = f(\frac{3}{6})$; (b) Sim.

21. (a) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 0, \\ -x & \text{se } x < 0, \end{cases}$$

é injetora mas não é sobrejetora.

(b) A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \geq 1 \\ 2 & \text{se } 0 \leq x < 1 \\ x+2 & \text{se } x < 0 \end{cases}$$

é sobrejetora mas não é injetora.

25. $k = -5$.

Capítulo 4

Tipos Especiais de Funções

Nesta capítulo apresentaremos as principais funções que são usadas nas aplicações elementares da matemática tais como: funções polinomiais, exponenciais, trigonométricas, etc.

4.1 Funções Polinomiais

Sejam $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{Z}_+$. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

é chamada de *função polinomial*. Se $a_n \neq 0$, dizemos que f tem *grau* n. Em particular, quando $n = 0$, dizemos que

$$f(x) = a_0$$

é uma *função constante*, quando $n = 1$, dizemos que

$$f(x) = a_1 x + a_0$$

é uma *função afim* e quando $n = 2$, dizemos que

$$f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

é uma *função quadrática*, e assim por diante.

Uma função $r : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$r(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

onde $f(x)$ e $g(x)$ são funções polinomiais e $g(x) \neq 0$, é chamada de *função racional*. Por exemplo, a função definida por

$$f(x) = \frac{2x^2 - x + 10}{3x^3 - 4x^2 + 5}$$

é racional.

Usando o algoritmo da divisão, obtemos

$$\frac{x^n - a^n}{x - a} = x^{n-1} + x^{n-2}a + \cdots + xa^{n-2} + a^{n-1}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e $a \in \mathbb{R}$, com $x \neq a$. Em particular, fazendo $x = \sqrt[n]{y}$ e $a = \sqrt[n]{b}$, obtemos

$$\frac{\sqrt[n]{y} - \sqrt[n]{b}}{y - b} = \frac{1}{\sqrt[n]{y^{n-1}} + \sqrt[n]{y^{n-2}b} + \cdots + \sqrt[n]{yb^{n-2}} + \sqrt[n]{b^{n-1}}}.$$

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ uma intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é *convexa* em X, se para todos $a, b \in X$, com $a < b$, temos que

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \geq f(x), \ \ \forall x \in \ ]a, b[$$

ou

$$f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) \geq f(x), \ \ \forall x \in \ ]a, b[.$$

Dizemos que f é *côncava* em X, se para todos $a, b \in X$, com $a < b$, temos que

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \leq f(x), \ \ \forall x \in \ ]a, b[$$

ou

$$f(b) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - b) \leq f(x), \ \ \forall x \in \ ]a, b[$$

(confira Figura 4.1), onde o primeiro gráfico é uma função convexa e o segundo côncava.

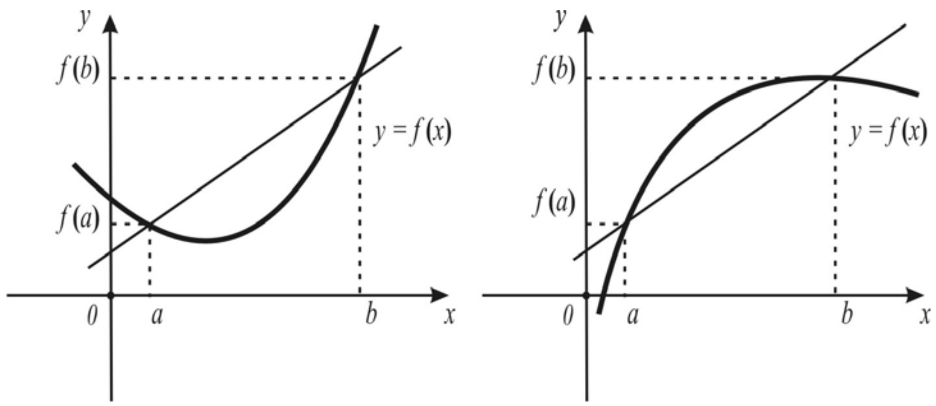

Figura 4.1: Representação gráfica de uma função convexa e côncava.

Exemplo 4.1 *Determinar os intervalos de convexidade e concavidade da função* $f(x) = ax^2 + bx + c$, *com* $a \neq 0$.

Solução. Note que, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x \in\ ]x_1, x_2[$, temos que

$$\begin{aligned}
f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) - f(x) &= a[(x_1^2 - x^2) + (x_2 + x_1)(x - x_1) \\
&= a(x - x_1)[(x_2 + x_1) - (x + x_1)] \\
&= a(x - x_1)(x_2 - x).
\end{aligned}$$

Portanto, f é convexa em $\mathbb{R}$ se $a > 0$ e é côncava em $\mathbb{R}$ se $a < 0$.

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ uma intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é *crescente* se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

Dizemos que f é *decrescente* se

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2), \ \forall x_1, x_2 \in X.$$

Exemplo 4.2 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 4$ é crescente.*

Solução. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Se $x_1 < x_2$, então

$$\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) &= (3x_2 + 4) - (3x_1 + 4) \\
&= 3(x_2 - x_1) > 0,
\end{aligned}$$

isto é, $f(x_1) < f(x_2)$.

Exemplo 4.3 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = ax + b$, com $a \neq 0$. Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de f.*

Solução. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$, temos que

$$\begin{aligned}
f(x_2) - f(x_1) &= ax_2 + b - (ax_1 + b) \\
&= a(x_2 - x_1).
\end{aligned}$$

Logo, se $a > 0$, então f é crescente em todo $\mathbb{R}$. Se $a < 0$, então f é decrescente em todo $\mathbb{R}$.

Exemplo 4.4 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$. Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de f.*

Solução. Note que,

$$\begin{aligned}
f(x) &= ax^2 + bx + c \\
&= a(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}) \\
&= a(x^2 + \frac{2b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}) \\
&= a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.
\end{aligned}$$

Assim, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, com $x_1 < x_2$, temos que

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \left[a(x_2 + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right] - \left[a(x_1 + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}\right] \\ &= a\left[(x_2 + \frac{b}{2a})^2 - (x_1 + \frac{b}{2a})^2\right] \\ &= a(x_2 - x_1)(x_2 + x_1 + \frac{b}{a}). \end{aligned}$$

Logo, se $a > 0$, então f é crescente se, e somente se,

$$x_2 + x_1 + \frac{b}{a} > 0 \Leftrightarrow \frac{x_2 + x_1}{2} > -\frac{b}{2a}.$$

Portanto, se $a > 0$ o intervalo de crescimento é $]-\frac{b}{2a}, +\infty[$ e de decrescimento é $]-\infty, -\frac{b}{2a}[$. Analogamente, se $a < 0$ o intervalo de crescimento é $]-\infty, -\frac{b}{2a}[$ e de decrescimento é $]-\frac{b}{2a}, +\infty[$.

Exemplo 4.5 *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + 3x + 5$ é crescente.*

Solução. Dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$. Se $x_1 < x_2$, então

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (x_2^3 + 3x_2 + 5) - (x_1^3 + 3x_1 + 5) \\ &= (x_2^3 - x_1^3) + 3(x_2 - x_1) \\ &= (x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2 + 3) \\ &= (x_2 - x_1)[(x_2 + \frac{x_1}{2})^2 + \frac{3x_1^2}{4} + 3] > 0, \end{aligned}$$

isto é, $f(x_1) < f(x_2)$. Portanto, f é crescente.

Exemplo 4.6 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função crescente. Então f admite uma função inversa $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ também crescente.*

Solução. Primeiro vamos provar que f admite uma função inversa g, isto é, dado $y_1 \in \mathbb{R}$ existe um único $x_1 \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 = f(x_1)$.

Suponhamos, por absurdo, que exista um $x_2 \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 = f(x_1) = f(x_2)$ e $x_1 \neq x_2$. Como $x_1 \neq x_2$ temos que $x_1 < x_2$ ou $x_1 > x_2$. Se $x_1 < x_2$, então, por hipótese, $f(x_1) < f(x_2)$ ou se $x_1 > x_2$, então $f(x_1) > f(x_2)$, que é uma contradição. Neste caso,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = g(y).$$

Finalmente, dados y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$, com $y_1 < y_2$, queremos provar que $g(y_1) < g(y_2)$. Suponhamos, por absurdo, que $g(y_1) \geq g(y_2)$. Então

$$y_1 = (f \circ g)(y_1) = f(g(y_1)) \geq f(g(y_2)) = (f \circ g)(y_2) = y_2,$$

isto é, $y_1 \geq y_2$, que é uma contradição.

Exemplo 4.7 *Determinar se a função* $f : [0, +\infty[\; \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$$

admite inversa.

Solução. Dados $x_1, x_2 \in [0, +\infty[$, com $x_1 < x_2$, temos que

$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= \frac{x_2^2}{x_2^2+1} - \frac{x_1^2}{x_1^2+1} \\ &= \frac{x_2^2(x_1^2+1) - x_1^2(x_2^2+1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} \\ &= \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} \\ &= \frac{(x_2-x_1)(x_2+x_1)}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)} > 0, \end{aligned}$$

pois $x_2 + x_1 > 0$, $x_1^2 + 1 > 0$ e $x_2^2 + 1 > 0$. Logo, f é crescente em $[0, +\infty[$ e, portanto, f admite inversa.

EXERCÍCIOS

---

1. Determinar os valores de k, de modo que as funções abaixo sejam crescentes.

   (a) $f(x) = (k+5)x - 2$ (b) $f(x) = -2kx + 3$ (c) $f(x) = \left(\frac{k+1}{2}\right)x - \frac{3}{8}k$.

2. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida pela regra $f(x) = -x^2 + 4$. Determinar a imagem de f.

3. Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$ e $x \in [-\frac{b}{2a}, +\infty[$. Determinar f^{-1} e seu domínio.

4. Determinar os valores de k, de modo que a equação

   $$x^2 + kx + (k^2 - 4k + 3) = 0$$

   tenha uma raiz nula.

5. Considere a função $f : [0, +\infty[\; \to [12, +\infty[$ dada por $f(x) = x^2 + 2kx + k^2 - 4$, onde a constante real k faz com que a função f admita inversa. Sabendo-se que g é a função inversa de f, calcular $g(21)$.

6. Determinar se cada função abaixo admite inversa. Caso afirmativo, exiba a fórmula explicita da inversa, seu domínio e o gráfico.

(a)	$f(x) = x^2 + 2x - 3,\ \forall x \in [0, +\infty[$	(d)	$f(x) = \sqrt{x-1},\ \forall x \in [1, +\infty[$
(b)	$f(x) = x^3 + 4x - 5,\ \forall x \in \mathbb{R}$	(e)	$f(x) = x^2 - 4,\ \forall x \in [0, +\infty[$
(c)	$f(x) = \frac{3x}{x+2},\ \forall x \in\ ]-2, +\infty[$	(f)	$f(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.$

7. Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de cada função.

(a)	$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$	(d)	$f(x) = x^3 + x - 2$
(b)	$f(x) = x^2 - x + 5$	(e)	$f(x) = -x^3 + 2x + 1$
(c)	$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$	(f)	$f(x) = 2x^3 + 5.$

8. Determinar o domínio da função

$$f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 6x}{x^2 - 3x + 2}}.$$

9. Determinar os intervalos de convexidade e concavidade de cada função abaixo.

(a)	$f(x) = -x^3 + 3x - 5$	(c)	$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$
(b)	$f(x) = x + \frac{1}{x}$	(d)	$f(x) = \frac{x}{x^2-1}.$

4.2 Funções Exponenciais e Logarítmicas

Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = a^x$$

é chamada de *função exponencial de base a*. Note que

$$\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} \ \text{ e } \ \operatorname{Im} f =\ ]0, +\infty[.$$

Exemplo 4.8 *Esboçar o gráfico da função $f(x) = 2^x$.*

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, a interseção com o eixo dos y é

$$f(0) = 2^0 = 1,$$

isto é, a interseção com o eixo dos y ocorre no ponto $(0, 1)$. Note que f não intercepta o eixo dos x. Façamos uma tabela de alguns valores de $f(x)$ e o gráfico de f é a Figura 4.2.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8

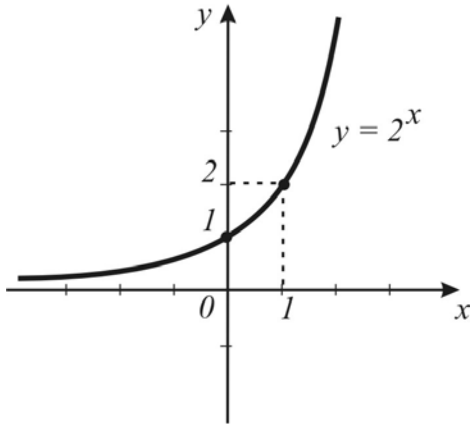

Figura 4.2: Gráfico da função 2^x.

Exemplo 4.9 *Esboçar o gráfico da função* $f(x) = 2^{-x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$.

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$, a interseção com o eixo dos y é

$$f(0) = 2^{-0} = 1,$$

isto é, a interseção com o eixo dos y ocorre no ponto $(0, 1)$. Note que f não intercepta o eixo dos x. Façamos uma tabela de alguns valores de $f(x)$ e o gráfico de f é a Figura 4.3.

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	4	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$

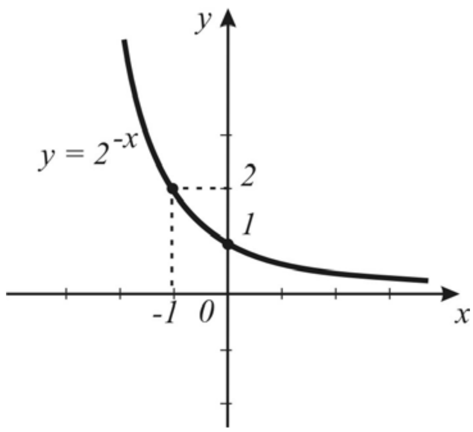

Figura 4.3: Gráfico da função 2^{-x}.

Se $f(x) = a^x$, então o gráfico de f é o primeiro se $0 < a < 1$ e é o segundo se $a > 1$ (confira Figura 4.4). Note que f é decrescente se $0 < a < 1$ e f é crescente se $a > 1$.

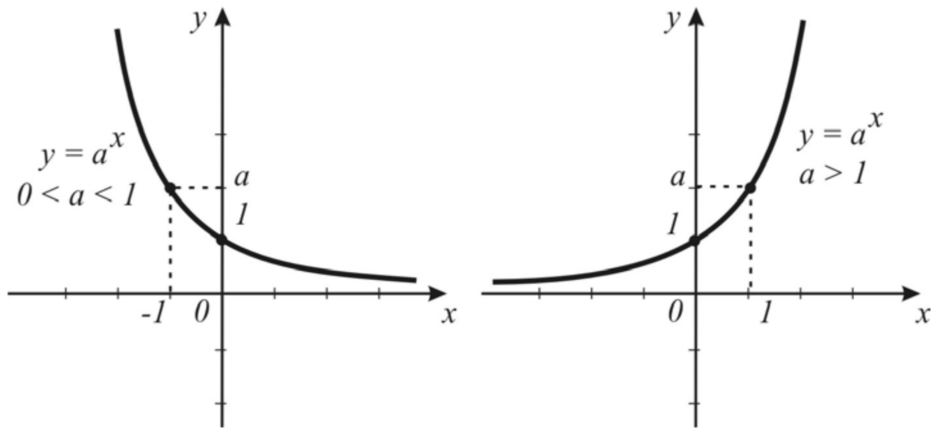

Figura 4.4: Gráfico da função a^x.

Quando a for o número irracional e ($e \approx 2,718$), dizemos que $f(x) = e^x$ é a *função exponencial natural*. Usa-se, também, a notação

$$f(x) = \exp(x).$$

O número irracional e pode ser definido como o valor que a função $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ assume quando x se torna arbitrariamente grande.

Propriedade 4.10 *Sejam* $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ *e* $x, y \in \mathbb{R}$. *Então*:

1. $a^{x+y} = a^x a^y$;

2. $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$;

3. $(a^x)^y = a^{xy}$;

4. $(ab)^x = a^x b^x$;

5. $(\frac{a}{b})^x = \frac{a^x}{b^x}$;

6. *Se* $x \leq y$ *e* $a > 1$, *então* $a^x \leq a^y$;

7. *Se* $x \leq y$ *e* $0 < a < 1$, *então* $a^y \leq a^x$.

Sejam $a, x \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. O *logaritmo de* x *na base* a é um número $b \in \mathbb{R}$ tal que

$$a^b = x$$

e denotamos por

$$b = \log_a x.$$

(O conceito de logaritmo foi proposto pelo matemático escocês John Neper, 1550 - 1617).

Seja $a \in \mathbb{R}$ com $a > 0$ e $a \neq 1$. A função $f :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \log_a x$$

é chamada de *função logarítmica de base* a.

Exemplo 4.11 *Esboçar o gráfico da função* $f(x) = \log_2 x$.

Solução. É claro que $\mathrm{Dom}\, f = \,]0, +\infty[$, a interseção com o eixo dos x é

$$x = 2^0 = 1, \text{ pois } x = 2^y,$$

isto é, a interseção com o eixo dos x ocorre no ponto $(1, 0)$. Note que f não intercepta o eixo dos y. Façamos uma tabela de alguns valores de $f(x)$ e o gráfico de f é a Figura 4.5.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	-2	-1	0	1	2	3

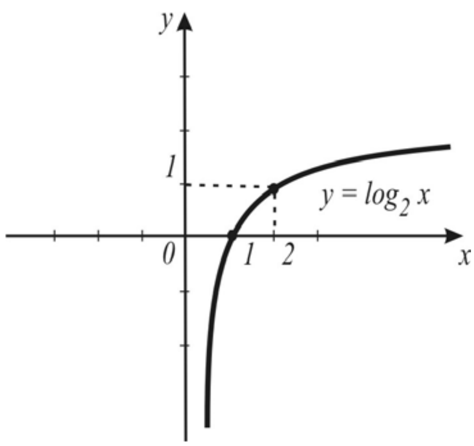

Figura 4.5: Gráfico da função $\log_2 x$.

Exemplo 4.12 *Esboçar o gráfico da função* $f(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$.

Solução. É claro que $\mathrm{Dom}\, f = \,]0, +\infty[$, a interseção com o eixo dos x é

$$x = \left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1, \text{ pois } x = \left(\frac{1}{2}\right)^y,$$

isto é, a interseção com o eixo dos x ocorre no ponto $(1, 0)$. Note que f não intercepta o eixo dos y. Façamos uma tabela de alguns valores de $f(x)$ e o gráfico de f é a Figura 4.6.

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	4	8
$f(x)$	2	1	0	-1	-2	-3

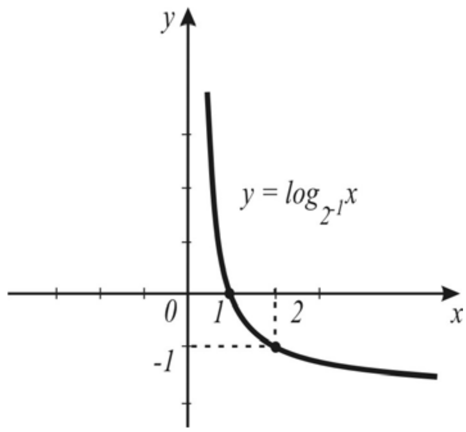

Figura 4.6: Gráfico da função $\log_{2^{-1}} x$.

Se $f(x) = \log_a x$, então o gráfico de f é o primeiro se $0 < a < 1$ e é o segundo se $a > 1$ (confira Figura 4.7). Note que f é decrescente se $0 < a < 1$ e f é crescente se $a > 1$.

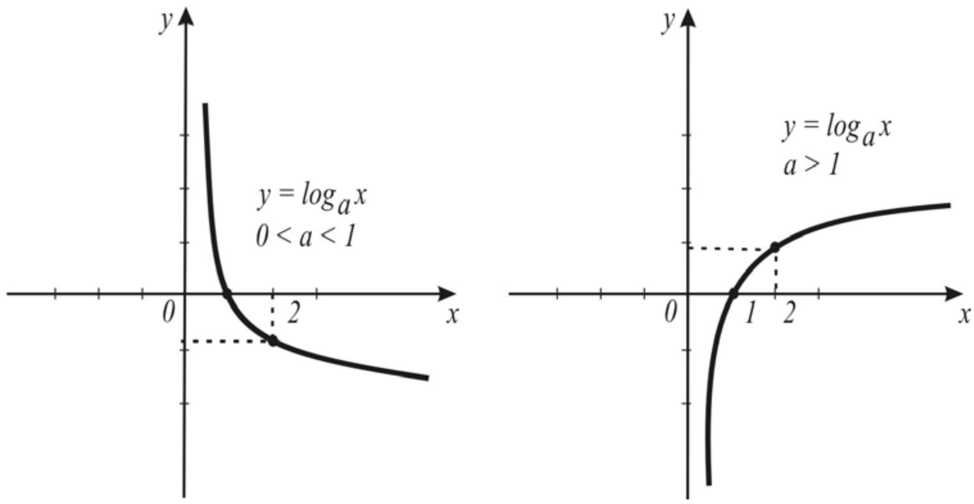

Figura 4.7: Gráfico da função $\log_a x$.

Seja $y = g(x) = \log_a x$. Então

$$\mathrm{Dom}\, g = \;]0, +\infty[, \;\; \mathrm{Im}\, g = \mathbb{R} \;\text{ e }\; y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y.$$

Assim, se $f(x) = a^x$, então $(f \circ g)(x) = x$ e $(g \circ f)(x) = x$ (confira Figura 4.8).

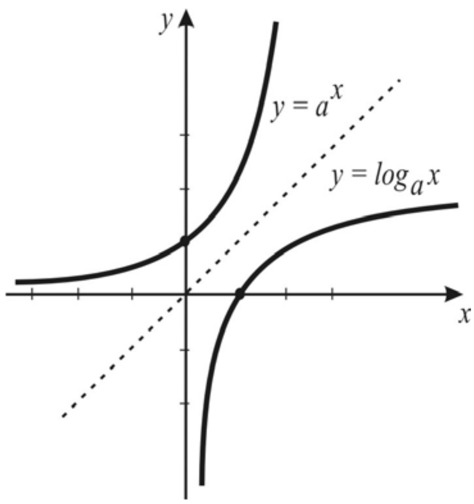

Figura 4.8: Gráficos das funções a^x e $\log_a x$.

Quando a for o número irracional e, dizemos que $f(x) = \log x$ é a *função logaritmo natural*. Usa-se, também, a notação

$$f(x) = \ln x.$$

Propriedade 4.13 *Sejam* $a, b, r \in \mathbb{R}$ *com* $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, *e* $x, y \in\ ]0, +\infty[$. *Então*:

1. $\log_a a = 1$;
2. $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$;
3. $\log_a(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$;
4. $\log_a x^r = r \log_a x$;
5. $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$;
6. $x^x = e^{x \log x}$;
7. *Se* $x \leq y$ *e* $a > 1$, *então* $\log_a x \leq \log_a y$;
8. *Se* $x \leq y$ *e* $0 < a < 1$, *então* $\log_a x \geq \log_a y$.

EXERCÍCIOS

1. Use logaritmo de base 10, para desenvolver as expressões:

   (a) $x = \frac{3a^2\sqrt{b}}{cd^2}$ (c) $x = \frac{\sqrt[3]{2ab^2}}{2}$ (e) $x = 3a\sqrt[3]{ab^2}$

   (b) $x = \frac{2a^2b^3}{3c}$ (d) $x = \frac{1}{3}a\sqrt{\frac{ab}{c}}$ (f) $x = 10a^3\sqrt[5]{a^3b^7}$.

2. Esboçar o gráfico das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \log_2(x+1)$ (b) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x+1)$.

3. Resolva as seguintes equações:

   (a) $\sqrt[x]{81} = 3$ (g) $2 \cdot 3^{3-x} - \frac{5}{3^{x-2}} = 3$

   (b) $3^{2-x} + 3^{1+x} = 28$ (h) $6 + 4^{x+2} = 70(5 - 2^{x+1})$

   (c) $2^{\sqrt{x}} = 8 \cdot 2^{-x}$ (i) $\log_2(4 - x^2) = \log_2 3x$

   (d) $(0,01)^x = 10$ (j) $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{\frac{1}{2}} x^2$

   (e) $4^{\sqrt{x+1}} = 1024 \cdot 2^{\sqrt{x+1}}$ (k) $\log_3(x^2+1) = \log_3(x+1)$

   (f) $2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$ (l) $\log_{\frac{1}{3}}(3x+2) = \log_{\frac{1}{3}}(x-1)$.

4. Resolva as seguintes inequações:

   (a) $a^{x^2-1} > 1, 0 < a < 1$ (d) $x^{2-x^2} > x^x$

   (b) $a^{x^2-x} > 0, a > 1$ (e) $\log_2(x-3) + \log_2(x-2) < 1$

   (c) $x^{x^2-2x+1} > x$ (f) $\log_{\frac{1}{2}}(x+2) + \log_{\frac{1}{2}}(x-3) > 2$.

5. Determinar m, de modo que a equação

$$2^x + 2^{-x} = 2m$$

   tenha raízes reais.

6. Determinar o domínio das seguintes funções:

   (a) $f(x) = \sqrt{1 - 2^x}$ (e) $f(x) = \log_{\frac{1}{2}}(x^2 - 1)$

   (b) $f(x) = \sqrt{2^{x+1} - 2^{-x}}$ (f) $f(x) = \log_2(2 - 3x + x^2)$

   (c) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2-2^{-x}}}$ (g) $f(x) = \log_x(3x - 6)$

   (d) $f(x) = \log_2(3x - 2)$ (h) $f(x) = \log_{x-3}(4x^2 - 16)$.

7. Sabendo que $5^{0,35} = k$, determinar $5^{1,7}$.

4.3 Funções Trigonométricas

Nesta seção apresentaremos as principais funções trigonométricas e suas propriedades.

Ângulo é a figura geométrica formada por duas semi-retas com a mesma origem e denotado por $\theta = \angle AOB$ (confira Figura 4.9). A origem é o *vértice* do ângulo e as semi-retas são os lados. O ângulo θ é *positivo* para uma rotação anti-horário e *negativo* para uma rotação horário. No cálculo, a unidade de medida é o *radiano*. Conversão: 1 grau $= \frac{\pi}{180}$ rad e 1 rad $= \frac{180}{\pi}$ graus.

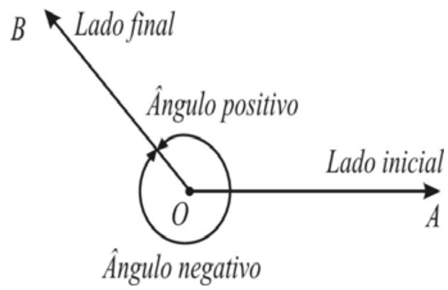

Figura 4.9: Ângulo θ.

Em um sistema de coordenadas cartesianas, a *posição padrão* de um ângulo θ é obtida tomando a origem como vértice e o lado inicial ao longo do eixo dos x (confira Figura 4.10).

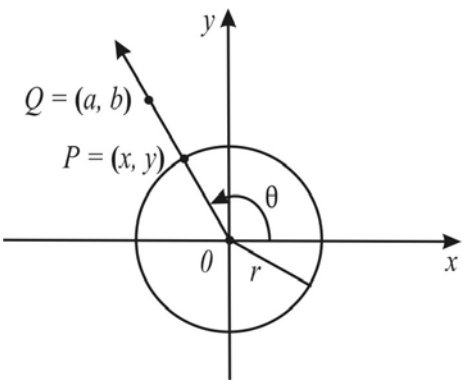

Figura 4.10: Ângulo padrão.

Seja θ um ângulo na posição padrão. Sobre o lado final de θ, escolhemos um ponto $P = (x, y)$ com $x \neq 0$. Seja

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Então r é a distância de P a origem $O = (0, 0)$. Definimos

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \theta &= \frac{y}{r}, \ \cos \theta = \frac{x}{r}, \ \tan \theta = \frac{y}{x} \\ \csc \theta &= \frac{r}{y}, \ \sec \theta = \frac{r}{x} \ \text{ e } \ \cot \theta = \frac{x}{y}. \end{aligned}$$

Vamos mostrar que $\operatorname{sen}\theta$ não depende das coordenadas do ponto P.

De fato, seja $Q = (a, b)$ qualquer ponto sobre o lado final de θ. Então existe $c \in \mathbb{R}$, com $c > 0$, tal que $a = cx$ e $b = cy$. Logo,

$$\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{cy}{\sqrt{(cx)^2+(cy)^2}} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Note que, como

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2+y^2} = r$$

temos que

$$\left|\frac{y}{r}\right| \leq 1, \text{ ou seja, } -1 \leq \frac{y}{r} \leq 1.$$

Portanto,

$$-1 \leq \operatorname{sen}\theta \leq 1,$$

ou ainda, $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$, para todo ângulo θ. De modo similar, mostra-se que $|\cos\theta| \leq 1$, $|\csc\theta| \geq 1$ e $|\sec\theta| \geq 1$, etc.

Finalmente, vamos definir a seguinte função

$$\begin{array}{rccl} \operatorname{sen}: & \mathbb{R} & \to & [-1,1] \\ & x & \mapsto & \operatorname{sen} x \end{array}$$

que será chamada de *função seno*. De modo similar, define-se a *função cosseno*, *tangente*, etc.

Propriedade 4.14 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então*:

1. $\operatorname{sen} x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$ *ou* $\cos x = \operatorname{sen}(x + \frac{\pi}{2})$;

2. $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$;

3. $\operatorname{sen}(x \pm y) = \operatorname{sen} x \cos y \pm \operatorname{sen} y \cos x$;

4. $\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y$;

5. $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$ *e* $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$;

6. $\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$;

7. $\operatorname{sen} x \cos x = \frac{1}{2}\left(\cos(\frac{x+y}{2}) + \cos(\frac{x-y}{2})\right)$.

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ uma intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é *periódica* se existir $T \in \mathbb{R}$, $T > 0$, tal que

$$f(x+T) = f(x),$$

para todo $x \in X$, com $x + T \in X$. O menor número T (se existir) com esta propriedade é chamado o *período* da função f.

Exemplo 4.15 *A função $f : \mathbb{R} \to [-1,1]$ definida por $f(x) = \cos x$ é periódica com período 2π.*

Solução. Note que
$$f(x+2\pi) = \cos(x+2\pi) = \cos x = f(x).$$
Agora, seja $T \in \mathbb{R}$, com $T > 0$, tal que
$$f(x+T) = f(x).$$
Logo,
$$\cos(x+T) = \cos x \Rightarrow (x+T) \pm x = 2k\pi, \ \ \forall k \in \mathbb{Z}.$$
Portanto, $T = 2k\pi$, pois o lado esquerdo desta igualdade é uma função contínua de x.

Exemplo 4.16 *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é periódica com período T, então a função $f(ax+b)$, onde $a > 0$, é periódica com período $\frac{T}{a}$.*

Solução. Note que
$$f(a(x+\frac{T}{a})+b) = f(ax+b+T) = f(ax+b),$$
pois T é o período de f. Agora, seja $T_1 \in \mathbb{R}$, com $T_1 > 0$, tal que
$$f(a(x+T_1)+b) = f(ax+b).$$
Logo,
$$\begin{aligned} f(x) &= f(x-b+b) \\ &= f(a(\frac{x-b}{a})+b) \\ &= f(a(\frac{x-b}{a}+T_1)+b) \\ &= f(x+aT_1). \end{aligned}$$
Portanto, $T \leq aT_1$, isto é, $\frac{T}{a} \leq T_1$ e $\frac{T}{a}$ é o período da função $f(ax+b)$.

EXERCÍCIOS

---

1. Determinar os intervalos de crescimento e decrescimento de cada função.

   (a) $f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$;

   (b) $f(x) = \operatorname{sen}(2x)$, $\forall \in [0, 2\pi]$.

2. Determinar se as funções abaixo são periódica ou não. Em caso afirmativo, determinar o seu período.

   (a) $f(x) = 4\cos(3x + \frac{\pi}{4})$;

   (b) $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(\frac{x}{2}) + 4\cos(\frac{x}{2})$, (Sugestão: Veja o item a do exercício anterior);

   (c) $f(x) = \tan(2x)$;

   (d) $f(x) = \mathrm{sen}^4 x + \cos^4 x$, (Sugestão: Mostre que $f(x) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\,\mathrm{sen}(4x + \frac{\pi}{2})$);

   (e) $f(x) = |\cos x|$;

   (f) $f(x) = \cos(x^2)$;

   (g) $f(x) = 2\cos(\frac{x-\pi}{3})$;

   (h) $f(x) = x + \mathrm{sen}\, x$;

   (i) $f(x) = \cos(\sqrt{x})$.

3. Sejam a, b e c os lados do triângulo ABC e θ o ângulo oposto a C. Mostrar que

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta.$$

4. Sejam a, b e c os lados opostos aos ângulos α, β e γ de um triângulo ABC. Mostrar que

$$\frac{\mathrm{sen}\,\alpha}{a} = \frac{\mathrm{sen}\,\beta}{b} = \frac{\mathrm{sen}\,\gamma}{c}.$$

5. Mostrar que

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y} \ \text{ e } \ \tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}.$$

6. Mostrar que

$$\frac{1 + \cos x}{1 + \mathrm{sen}\, x} = \frac{2}{(1 + \tan\frac{x}{2})^2}.$$

4.4 Regiões no Plano Cartesiano

Já vimos que uma inequação em $\mathbb{R}^2$ é uma desigualdade da forma

$$3x - 6y + 6 \geq 0 \ \text{ ou } \ x^2 - 4y^2 + 3 < 0.$$

Uma *região* determinada por uma inequação em $\mathbb{R}^2$ é o conjunto de todos os pontos (x, y) que satisfazem esta inequação.

Exemplo 4.17 *Esboçar a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $x > 0$.*

Solução. Seja R a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $x > 0$. Então

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$$

(confira Figura 4.11).

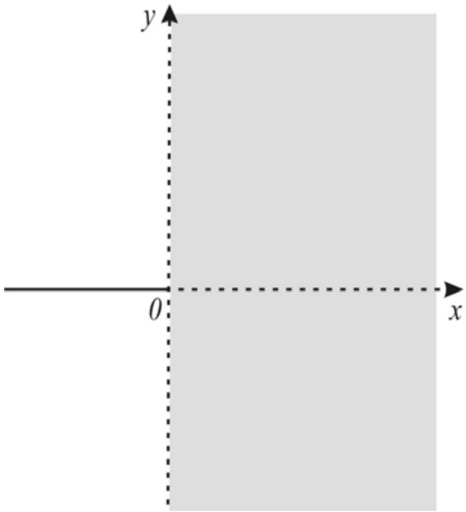

Figura 4.11: Região determinada pela inequação $x > 0$.

Exemplo 4.18 *Esboçar a região em* $\mathbb{R}^2$ *determinada pela inequação* $y + x - 1 > 0$.

Solução. Seja R a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pela inequação $y + x - 1 > 0$. Então

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > -x + 1\}$$

(confira Figura 4.12).

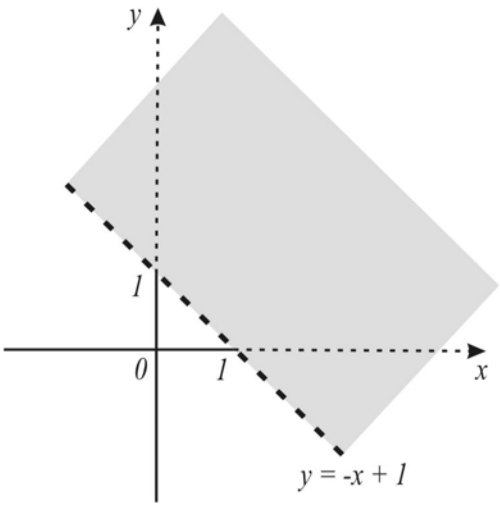

Figura 4.12: Região determinada pela inequação $y + x - 1 > 0$.

Exemplo 4.19 *Esboçar a região em* $\mathbb{R}^2$ *determinada pelas inequações*

$$1 < x^2 + y^2 \leq 4.$$

Solução. Seja R a região em $\mathbb{R}^2$ determinada pelas inequações $1 < x^2 + y^2 \leq 4$. Então

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 < x^2 + y^2 \leq 4\}$$

(confira Figura 4.13).

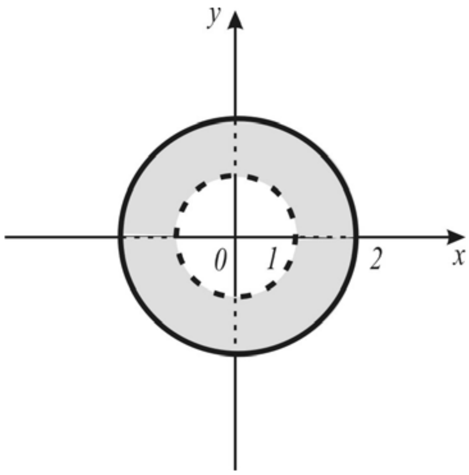

Figura 4.13: Região determinada pelas inequações $1 < x^2 + y^2 \leq 4$.

4.5 Funções como Modelos Matemáticos

Muitos problemas de matemáticas envolvem conjuntos de pares ordenados de números reais. Por exemplo, a representação da demanda por um dado artigo envolve pares de números que especificam a quantidade demandada e o preço correspondente. Nesta seção usaremos o conceito de função para modelar esse tipo de problema.

Sejam x e y duas variáveis. Dizemos que y é *diretamente proporcional* a x se

$$y = kx$$

e *inversamente proporcional* a x se

$$y = \frac{k}{x},$$

onde k é uma constante não-nula. A constante k é chamada de *constante de proporcionalidade.*

Exemplo 4.20 *O peso aproximado do cérebro de uma pessoa é diretamente proporcional ao seu peso corporal, e uma pessoa com* 68 kg *tem um cérebro com um peso aproximado de* $1,8$ kg.

1. *Expressar o número de quilos do peso aproximado do cérebro de uma pessoa como função do seu peso corporal.*

2. *Determinar o peso aproximado do cérebro de uma pessoa, cujo peso corporal é* $80\ kg$.

Solução. 1. Sejam x o peso corporal de uma pessoa e $y = f(x)$ o peso aproximado do seu cérebro. Então

$$y = kx.$$

Como $x = 68$ e $y = 1,8$ temos que

$$1,8 = k68 \Rightarrow k = \frac{1,8}{68} = \frac{9}{340} \approx 0,025.$$

Logo,

$$f(x) = \frac{9}{340}x.$$

2. Quando $x = 80$, obtemos

$$\begin{aligned} f(80) &= \frac{9}{340}80 \\ &= 2,1. \end{aligned}$$

Portanto, o peso aproximado do cérebro de uma pessoa que pesa $80\ kg$ é $2,1\ kg$.

Exemplo 4.21 *A intensidade de luz de uma dada fonte é inversamente proporcional ao quadrado da distância dela.*

1. *Expressar o número de velas na intensidade da luz como função da distância em metros da fonte, sabendo que a intensidade é* 225 *velas a uma distância de* $5\ m$ *da fonte.*

2. *Determinar a intensidade num ponto distante* $12\ m$ *da fonte.*

Solução. 1. Sejam x distância em metros da fonte e $y = f(x)$ o número de velas na intensidade da luz. Então

$$y = \frac{k}{x^2}.$$

Como $x = 5$ e $y = 225$ temos que

$$225 = \frac{k}{5^2} \Rightarrow k = 25 \cdot 225 = 5.625.$$

Logo,

$$f(x) = \frac{5.625}{x^2}.$$

2. Quando $x = 12$, obtemos

$$\begin{aligned} f(12) &= \frac{5.625}{12^2} \\ &= \frac{625}{16}. \end{aligned}$$

Portanto, a intensidade num ponto a $12\ m$ da fonte é $\frac{625}{16}$ velas.

Exemplo 4.22 *Um barco B encontra-se a 65 km a leste de outro, A, sendo que ambos partem simultaneamente às 9 h. Sabendo que B se dirige para oeste, a 10 km/h, enquanto que A, para o sul a 15 km/h. Determinar uma fórmula para a distância entre eles em função do tempo.*

Solução. Seja y a distância entre eles após um tempo t.

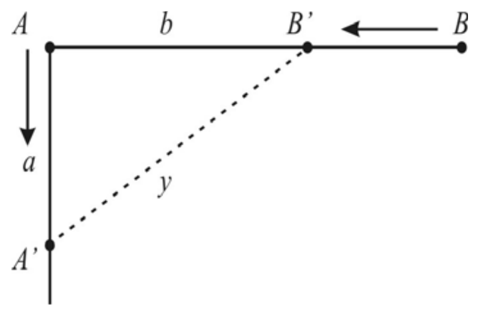

Figura 4.14: Visão geométrica do problema.

Pela Figura 4.14, temos que o triângulo $A'AB'$ é retângulo em A. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$y^2 = a^2 + b^2.$$

Como $a = 15t$ e $b = 65 - 10t$ temos que

$$y^2 = (15t)^2 + (65 - 10t)^2.$$

Resolvendo, fica

$$y = \sqrt{325t^2 - 1.300t + 4.225}.$$

Exemplo 4.23 *Dado um quadrado de lado a, marcam-se sobre os lados, a partir de cada vértice, no mesmo sentido, quatro segmentos congruentes. Unem-se as extremidades desses segmentos, obtendo-se um quadrado inscrito no primeiro.*

1. *Determinar o comprimento do lado desse quadrado em função do comprimento de cada segmento.*

2. *Determinar a área desse quadrado em função do comprimento de cada segmento.*

Solução. 1. Sejam y o comprimento do lado desse quadrado e x o comprimento de cada segmento.

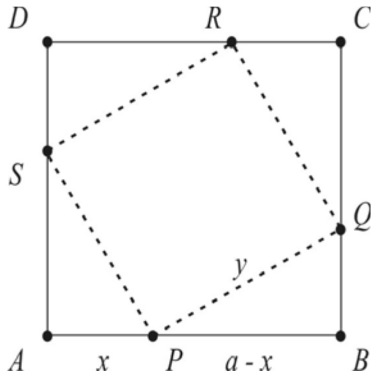

Figura 4.15: Visão geométrica do problema.

Pela Figura 4.15, temos que o triângulo PBQ é retângulo em B. Assim, pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$y^2 = x^2 + (a - x)^2.$$

Resolvendo, fica

$$y = \sqrt{a^2 - 2ax + 2x^2}.$$

2. Seja S a área do quadrado. Então

$$S = y^2 = a^2 - 2ax + 2x^2.$$

Exemplo 4.24 *Um fazendeiro calcula que sua colheita de batatas no presente momento deverá atingir a* 120 *sacos, no valor de* \$25,00 *por saco. Se esperar mais tempo, sua colheita aumentará de* 20 *sacos por semana, mas o preço baixará de* \$2,50 *por saco e por semana. Determinar o rendimento em função do número de semanas.*

Solução. Sejam y o rendimento e x o número de semanas. Como a quantidade de sacos de batatas é

$$120 + 20x$$

e o preço por saco e por semana é

$$25 - 2,5x$$

temos que

$$y = (120 + 20x)(25 - 2,5x),$$

ou ainda,

$$y = 3.000 + 200x - 50x^2.$$

Exemplo 4.25 *Um fabricante produz determinado produto ao preço unitário de* \$2,00 *e os vende a* \$5,00 *cada. Com esse preço a demanda mensal do produto é de* 4.000 *unidades. O fabricante pensa em elevar o preço do produto e calcula que, para cada real aumentado, deixará de vender* 400 *unidades mensalmente. Expressar o lucro mensal do fabricante em função do preço de venda do produto.*

Solução. Seja x o preço de venda de cada objeto e L_t o lucro total correspondente. Como lucro total é igual ao número de objetos vendido

$$R = 4.000 - 400(x - 5)$$

vezes o lucro por unidade

$$L_u = x - 2$$

temos que

$$\begin{aligned} L_t(x) &= R \cdot L_u \\ &= [4.000 - 400(x-5)](x-2) \\ &= 400(15 - x)(x - 2). \end{aligned}$$

Sejam y o preço de uma unidade de mercadoria e x o número de unidades demandadas. Uma *equação de demanda* é uma equação da forma

$$y = f(x) \text{ ou } x = g(y).$$

A função $y = f(x)$ é chamada de *função preço* e a função $x = g(y)$ é chamada de *função de demanda*. O gráfico da função de demanda é chamado de *curva de demanda*. A equação de demanda mais simples é linear, isto é,

$$y = mx + b, \text{ com } m < 0.$$

Exemplo 4.26 *Uma companhia de turismo tomou conhecimento de que o preço de uma visita a pontos turísticos é* \$6,00*, a média do número de passagens vendidas por viagem é* 30*, e quando o preço passa a* \$10,00*, o número médio de passagens vendidas é somente* 18*. Supondo linear a equação de demanda, encontre-a e trace um esboço da curva de demanda.*

Solução. Sejam x o número de passagens vendidas (demandadas) e y a quantia de dinheiro correspondente a cada passagem (preço). Como $x = 30$ e $y = 6$, $x = 18$ e $y = 10$ temos que a reta passa pelos pontos $P_1 = (30, 6)$ e $P_2 = (18, 10)$. Logo, sua inclinação é dada por

$$m = \frac{10 - 6}{18 - 30} = -\frac{4}{12} = -\frac{1}{3}.$$

Assim, a equação da reta é

$$y - 6 = -\frac{1}{3}(x - 30),$$

ou ainda,

$$y = -\frac{1}{3}x + 16.$$

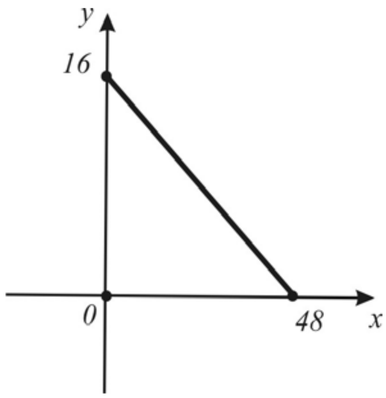

Figura 4.16: O gráfico da função $y = -\frac{1}{3}x + 16$.

Sejam y o preço de uma unidade de mercadoria e x o número de unidades ofertadas. Uma *equação de oferta* é uma equação da forma

$$y = f(x) \text{ ou } x = g(y).$$

A função $y = f(x)$ é chamada de *função preço* e a função $x = g(y)$ é chamada de *função de oferta*. O gráfico da função de oferta é chamado de *curva de oferta*. A equação de oferta mais simples é linear, isto é,

$$y = mx + b, \text{ com } m > 0.$$

Exemplo 4.27 *A não ser que o preço de uma determinada TV supere* $250, 00*, nenhuma TV estará disponível no mercado. Contudo,* 200 *TV's estarão disponíveis no mercado, quando o preço é* $350, 00*. Supondo linear a equação de oferta, encontre-a e trace um esboço da curva de oferta.*

Solução. Sejam x o número de TV's fornecidas (ofertadas) e y o preço por TV. Como $x = 0$ e $y = 250$, $x = 200$ e $y = 350$ temos que a reta passa pelos pontos $P_1 = (0, 250)$ e $P_2 = (200, 350)$. Logo, sua inclinação é dada por

$$m = \frac{350 - 250}{200 - 0} = \frac{100}{200} = \frac{1}{2}.$$

Assim, a equação da reta é

$$y - 250 = \frac{1}{2}(x - 0),$$

ou ainda,

$$y = \frac{1}{2}x + 250.$$

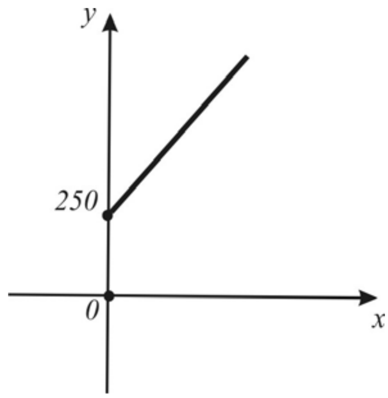

Figura 4.17: O gráfico da função $y = \frac{1}{2}x + 250$.

Se a quantidade de mercadoria demandada, a um dado preço, é igual a quantidade de mercadoria ofertada àquele preço, dizemos que ocorreu um *equilíbrio de mercado.* Quando ocorre o equilíbrio de mercado, a quandidade de mercadoria produzida é chamada *quantidade de equilíbrio* e o preço da mercadoria é chamado *preço de equilíbrio.* O ponto de interseção das curvas de demanda e oferta é chamado o *ponto de equilíbrio.*

Exemplo 4.28 *As equações de demanda e oferta são*:

$$x + 2y - 15 = 0 \text{ e } x - 3y + 3 = 0,$$

repectivamente, onde y é o preço e x é a quantidade. Determinar a quantidade, o preço e o ponto de equilíbrio e trace um esboço das curvas num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Solução. Para resolver esse tipo de problema basta encontrar a solução do sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 15 \\ x - 3y = -3 \end{cases}.$$

Assim, o quantidade de equilíbrio é $7,8$, o preço de equilíbrio é $\$3,60$ e $P = (\frac{78}{10}, \frac{36}{10})$ é o ponto de equilíbrio.

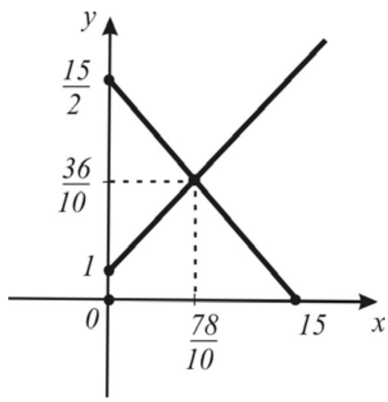

Figura 4.18: Ponto de equilíbrio.

Exemplo 4.29 *As equações de demanda e oferta são*:

$$x^2 + y^2 - 25 = 0 \ \ e \ 2x - y + 2 = 0,$$

repectivamente, onde y é o preço e x é a quantidade. Determinar a quantidade, o preço e o ponto de equilíbrio e trace um esboço das curvas num mesmo sistema de coordenadas cartesianas.

Solução. Para resolver esse tipo de problema basta substituir $y = 2x + 2$ na equação

$$x^2 + y^2 - 25 = 0.$$

Resolvendo, obtemos $x = 1,4$ e $y = 4,8$. Portanto, o quantidade de equilíbrio é $1,4$, o preço de equilíbrio é \$4,80 e $P = (\frac{14}{10}, \frac{48}{10})$ é o ponto de equilíbrio.

A função $y = C_0 e^{kx}$, onde $C_0, k \in \mathbb{R}^*$, é um modelo para *crescimento exponencial* se $k > 0$ e para *decaimento exponencial* se $k < 0$.

Exemplo 4.30 *As companhias de investimentos freqüentemente usam o modelo de juros compostos continuamente para calcular o rendimento de um investimento. Use esse modelo para rastrear o rendimento de* \$1.000,00 *investidos em* 1998 *com uma taxa anual de* 13%*, em composição contínua.*

Solução. Sejam x é o tempo decorrido desde o início do investimento e y o rendimento no período. Então, pode ser mostrado, que o modelo para rastrear o rendimento é dado por

$$f(x) = C_0 e^{kx},$$

onde $C_0 = 1.000$ é o investimento (capital) inicial e $k = 0,13$ é a taxa anual de juros expressa em decimais. Assim, para predizer o total na conta em 2003, devemos tomar $x = 5$ e calculamos

$$\begin{aligned} f(5) &= 1.000 e^{0,13 \cdot 5} \\ &= 1.000 e^{0,65} \\ &\approx 1.916. \end{aligned}$$

Portanto, o rendimento após 5 anos é \$1.916,00.

Exemplo 4.31 *Uma pessoa investiu* \$1.000,00 *em uma aplicação que rende* 15% *de juros compostos ao ano. Quanto tempo será necessário para que seu saldo atinja* \$5.000,00?

Solução. Pode ser provado que devemos resolver a equação

$$1.000(1 + 0,15)^x = 5.000.$$

Simplificando, obtemos

$$(1,15)^x = 5.$$

Logo, aplicando o logaritmo aos dois lados da equação, obtemos

$$x\log(1,15) = \log 5 \Rightarrow x = \frac{\log 5}{\log(1,15)} \approx 11,5.$$

Portanto, a pessoa terá \$5.000,00 em sua aplicação, em aproximadamente 11 anos e 6 meses

---

EXERCÍCIOS

---

1. Uma fabrica de equipamentos eletrônicos está colocando um novo produto no mercado. Durante o primeiro ano o custo fixo para iniciar a nova produção é \$140.000,00 e o custo variável para produzir cada unidade é \$25,00. Durante o primeiro ano o preço de venda é \$65,00 por unidade.

   (a) Expressar o lucro do primeiro ano como função de x unidades.

   (b) Determinar o lucro do primeiro ano, se 23.000 foram vendidas.

   (c) Determinar quantas unidades precisam ser vendidas durante o primeiro ano para que a fabrica não ganhe e nem perca.

2. O peso aproximado dos músculos de uma pessoa é diretamente proporcional ao seu peso corporal, e uma pessoa com 68 kg tem seus músculos com um peso aproximado de 27 kg.

   (a) Expressar o número de quilos do peso aproximado dos músculos de uma pessoa como função do seu peso corporal.

   (b) Determinar o peso aproximado dos músculos de uma pessoa, cujo peso corporal é 60 kg.

3. O peso de um corpo é inversamente proporcional à sua distância do centro da Terra. Suponha que o raio da Terra seja 6.400 km.

   (a) Se um corpo pesa 91 kg na superfície da Terra, expressar o número de quilos de seu peso como função do número de quilômetros do centro da Terra.

   (b) Quanto pesará um corpo a uma distância de 640 km acima da superfície da Terra?

4. Em um pais a renda de um indivíduo é isenta de imposto até $\$900,00$, é taxada em 15% de $\$900,00$ até $\$1.800,00$ e em $27,5\%$ acima de $\$1.800,00$. Determinar uma função T para o imposto total sobre a renda de x reais.

5. Um fabricante de CD tem uma despesa fixa mensal de $\$100.000,00$, um custo de produção de $\$3,00$ por unidade e um preço de venda de $\$5,00$ por unidade. Expressar o custo C, a receita R e o lucro L como função de x unidades. Quantas unidades devem ser fabricas para manter o equilíbrio?

6. Suponha que o custo fixo de produção de um artigo seja de $\$5.000,00$; o custo variável seja de $\$7,50$ por unidade e o artigo seja vendido a $\$10,00$ por unidade. Qual a quantidade vendida necessária para atingir o ponto de equilíbrio?

7. A equação de demanda de um artigo é
$$x = A - By,$$
onde A e B são constantes positivas, y representa o preço e x representa a quantidade demandada.
   (a) Determinar o preço, se a quantidade demandada é $\frac{A}{3}$.
   (b) Determinar a quantidade demandada, se o preço é $\frac{A}{2B}$.
   (c) Determinar a quantidade demandada, se o artigo for oferecido gratuitamente.
   (d) Qual é o preço mais baixo pelo qual esse artigo pode ser ofertado?

8. A equação de oferta de um artigo é
$$x = ay - b,$$
onde a e b são constantes positivas, y representa o preço e x representa a quantidade ofertada.
   (a) Determinar o preço, se a quantidade ofertada é
      i. $5a - b$,
      ii. $a + 2b$.
   (b) Determinar a quantidade ofertada, se o preço é
      i. $\frac{3b}{a}$,
      ii. $\frac{5b}{a}$.
   (c) Qual é o preço mais baixo pelo qual esse artigo pode ser ofertado?

9. Ao preço de $\$5,00$ por unidade, uma firma ofertará mensalmente 5.000 lanternas de pilha; a $\$3,50$ por unidade ela ofertará 2.000 unidades. Determinar a equação linear da função de oferta para esse produto. Esboce o gráfico desta equação.

10. Uma firma analizou suas vendas e concluiu que seus clientes irão comprar 20 por cento a mais de unidades dos seus produtos para cada redução de $\$2,00$ no preço unitário. Quando o preço é $\$12,00$, a firma vende 500 unidades. Qual é a equação linear da função de demanda para esse produto? Esboce o gráfico desta equação.

11. Deve-se construir uma caixa aberta com um pedaço retangular de cartolina de $50 \times 76\ cm$, cortando-se uma área x^2 em cada canto e dobrando-se os lados. Expressar o volume V da caixa como função de x.

12. Um retângulo deve ter uma área de $25\ cm^2$. Se um lado tem comprimento x, expressar o perímetro p como função de x.

13. Um retângulo deve ter um perímetro de $1000\ m$. Se um lado tem comprimento x, expressar a área A como função de x.

14. Um aquário aberto em cima, de $45\ cm$ de altura, deve ter um volume de $170\ l$. Sejam x o comprimento e y a largura. O material para o fundo custo $\$4,00$ por cm^2 e para os lados custa $\$2,00$ por cm^2.

    (a) Expressar y como função de x;

    (b) Expressar a área total de vidro como função de x.

    (c) Expressar o custo total como função de x

15. Um balão de ar quente é liberado à $1\ h$ da tarde e sobe verticalmente à razão de $2\ m/s$. Um ponto de observação está situado a $100\ m$ do ponto do chão diretamente debaixo do balão. Sendo t o tempo em segundos, após $1\ h$ da tarde, expressar a distância d do balão ao ponto de observação em função de t. (Lembre-se que $s = vt$.)

16. Deve-se construir um tanque de aço em forma de um cilindro circular reto de $3\ cm$ de altura e raio r, com dois hemisférios nos extremos. Expressar a área S da superfície do tanque em função de r.

17. Determinar a distância d do ponto $P = (0, 6)$ a um ponto do gráfico da hipérbole $x^2 - y^2 = 16$, como função de x.

18. Determinar a distância d do ponto $P = (x_0, y_0)$ a um ponto do gráfico da reta $ax + by + c = 0$, como função de x.

19. De um ponto exterior P que está a h unidades de um círculo de raio r, traça-se uma tangente ao círculo. Seja y a distância do ponto P ao ponto de tangência T. Expressar y como função de h.

20. O triângulo ABC está inscrito em um semicírculo de diâmetro $AB = 15\ cm$.

(a) Se x é o comprimento do lado AC, expressar o comprimento y do lado BC como função de x e indicar o domínio;

(b) Expressar a área do triângulo como função de x.

21. Uma pista de aeroporto tem uma torre de controle de 6 m de altura. A cabeceira da pista está a uma distância perpendicular de 100 m da base da torre. Se x é a distância percorrida na pista por um avião, expressar a distância d entre o avião e a torre de controle como função de x.

22. Uma pessoa parte de um ponto P em direção a leste a uma velocidade de 3 m/s. Um minuto depois, outra pessoa parte de P em direção ao norte a uma velocidade de $2,5$ m/s. Expressar a distância d entre elas como função do tempo t.

23. Um carro A está a 65 km a leste de um carro B e está viajando para o sul a 85 km/h, enquanto o carro B está indo para o leste a uma velocidade 80 km/h. Se os carros contínuam seus cursos respectivos, determinar a distância entre eles como função do tempo t.

24. A primeira astronave do programa Apolo tinha a forma de um tronco de cone circular reto de altura $y+h$, onde h é a altura do tronco. Os raios das bases são a e b fixados com $a > b$.

    (a) Expressar y como função de h.

    (b) Expressar o volume do tronco como função de h.

25. Um cilindro circular reto de raio r e altura h está inscrito em um cone de altura 12 e raio da base 4.

    (a) Expressar h como função de r.

    (b) Expressar o volume do cilindro como função de r.

26. Um raio luminoso, com velocidade constante c, partindo do ponto $(0, 1)$ no eixo dos y encontra um espelho horizontal disposto ao longo do eixo dos x no ponto $(x, 0)$ e é refletido para o ponto $(4, 1)$. Determinar o tempo total do percurso T como função de x.

27. Se uma pessoa investe $\$1.200,00$ numa conta de poupança com taxa de juros anual 12%, quanto tempo levará para que a poupança desta pessoa tenha um saldo de $\$6.000,00$?

28. Determinar quanto tempo é necessário para dobrar o valor de um investimento com uma taxa de juros de $12,25\%$ computada:

    (a) Anualmente;

(b) Continuamente.

29. Determinar quanto tempo é necessário para que um investimento de \$6.000, 00 dobre de valor em uma aplicação que rende 15% de juros compostos ao ano.

30. A despesa mensal de uma empresa com encargos sociais é dada pela função

$$f(x) = 20 + \frac{x}{10},$$

onde f é a despesa em milhares e x é o número de funcionários.

(a) Qual será a despesa quando a empresa tiver 100 funcionários?

(b) Qual será o número de funcionários quando a despesa for \$50.000, 00?

31. Uma fórmula para expressar o peso ideal do corpo humano em função da altura é dada por:

$$P = (H - 100) - \left(\frac{H - 150}{K}\right),$$

onde P é o peso em quilos, H é a altura em centímetros, $K = 4$ para homens e $K = 2$ para mulheres. Se uma mulher pesa 54 quilos, calcule a altura desta mulher.

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 4.1

1. (a) $k > -5$; (b) $k < 0$; (c) $k > -1$.

3. Como $a \neq 0$ temos dois casos a ser considerado: Se $a > 0$, então f é crescente em $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$ e, portanto, admite inversa
$$f^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a}$$
com domínio igual a
$$[-\frac{b^2 - 4ac}{4a}, +\infty[.$$
Se $a < 0$, então f é decrescente em $[-\frac{b}{2a}, +\infty[$ e, portanto, admite inversa
$$f^{-1}(x) = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac + 4ax}}{2a}$$
com domínio igual a
$$]-\infty, -\frac{b^2 - 4ac}{4a}].$$

5. Como $a = 1 > 0$ temos que f é crescente em $[-k, +\infty[$ e, assim, $f(0) = 12$. Logo,
$$k^2 - 4 = 12 \Rightarrow k = 4.$$
Portanto, $f(x) = x^2 + 8x + 12$ e
$$g(21) = f^{-1}(21) = \frac{-8 + \sqrt{64 - 48 + 84}}{2} = 1.$$

7. (a) Crescente em $]-\infty, \frac{1}{2}[\cup [\frac{3}{2}, +\infty[$ e decrescente em $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$;
(b) Crescente em $]\frac{19}{4}, +\infty[$ e decrescente em $[-\infty, \frac{19}{4}]$;
(c) Crescente em $[-\sqrt{\frac{3}{2}}, 0] \cup [\sqrt{\frac{3}{2}}, +\infty[$ e decrescente em $]-\infty, -\sqrt{\frac{3}{2}}] \cup [0, \sqrt{\frac{3}{2}}]$;
(d) Crescente em todo $\mathbb{R}$;
(e) Crescente em $[-\sqrt{\frac{2}{3}}, \sqrt{\frac{2}{3}}]$ e decrescente em $]-\infty, -\sqrt{\frac{2}{3}}] \cup [\sqrt{\frac{2}{3}}, +\infty[$;
(f) Crescente em todo $\mathbb{R}$.

9. (a) Convexa em $]-\infty, 0]$ e côncava em $[0, +\infty[$;
(b) Convexa em $]0, +\infty[$ e côncava em $]-\infty, 0[$;
(c) Convexa em $[-\sqrt{3}, 0] \cup [\sqrt{3}, +\infty[$ e côncava em $]-\infty, -\sqrt{3}] \cup [0, \sqrt{3}]$;
(d) Convexa em $]-1, 0] \cup]1, +\infty[$ e côncava em $]-\infty, -1[\cup [0, 1]$.

Seção 4.2

1. (a) $\log_{10} x = \log_{10} 3 + 2\log_{10} a + \frac{1}{2}\log_{10} b - \log_{10} c - 2\log_{10} d$;

   (b) $\log_{10} x = \log_{10} 2 - \log_{10} 3 + 2\log_{10} a + 3\log_{10} b - \log_{10} c$;

   (c) $\log_{10} x = -\frac{2}{3}\log_{10} 2 + \frac{1}{3}\log_{10} a + \frac{2}{3}\log_{10} b$;

   (d) $\log_{10} x = -\log_{10} 3 + \frac{3}{2}\log_{10} a - \frac{1}{2}\log_{10} c + \frac{1}{2}\log_{10} b$;

   (e) $\log_{10} x = \log_{10} 3 + \frac{4}{3}\log_{10} a + \frac{2}{3}\log_{10} b$;

   (f) $\log_{10} x = 1 + \frac{18}{5}\log_{10} a + \frac{7}{5}\log_{10} b$.

3. (a) $S = \{4\}$; (b) $S = \{0, 2\}$; (c) $S = \{1\}$; (d) $S = \{-\frac{1}{2}\}$; (e) $S = \{99\}$; (f) $S = \{-1, 2\}$; (g) $S = \{1\}$; (h) $S = \{1\}$; (i) $S = \{1\}$; (j) $S = \emptyset$; (k) $S = \{0, 1\}$; (l) $S = \emptyset$.

5. Condição de existência $m > 0$. A equação tem raízes reais se $\Delta = 4m^2 - 4 \geq 0$, isto é, $m \in\ ]-\infty, -1] \cup [1, +\infty[$. Logo, $m \in [1, +\infty[$.

Seção 4.3

1. (a) Como $f(x) = \sqrt{2}\cos(x - \frac{\pi}{4})$ temos que f é crescente em $[\frac{\pi}{4} + k\pi, \frac{\pi}{4} + (k+1)\pi]$, para todo $k \in \mathbb{Z}$, e decrescente em $[\frac{\pi}{4} + (k+1)\pi, \frac{\pi}{4} + (k+2)\pi]$, para todo $k \in \mathbb{Z}$;

   (b) Crescente em $[0, \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{4}, \pi]$ e decrescente em $[\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}]$.

3. Seja θ o ângulo na posição padrão com $C = (0, 0)$, $B = (b, 0)$ e $A = (a\cos\theta, a\,\mathrm{sen}\,\theta)$. Então

$$\begin{aligned} c^2 &= d(A, B)^2 \\ &= (b - a\cos\theta)^2 + a^2\,\mathrm{sen}^2\,\theta \\ &= a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta. \end{aligned}$$

Seção 4.5

1. (a) $L(x) = 40x - 140.000$; (c) \$780.000,00 (c) 3.500.

3. (a) Sejam x a distância e y o peso. Então

$$y = \frac{k}{x}.$$

   Quando $x = 6.400$ e $y = 91$, obtemos $k = 582.400$. Portanto,

$$y = \frac{582.400}{x}.$$

   (b) Quando $x = 7.040$, obtemos $y \approx 83$. Portanto, o corpo pesará aproximadamente 83 kg a uma distância de 640 km acima da superfície da Terra.

5. $C(x) = 3x + 100.000$, $R(x) = 5x$ e $L(x) = 2x - 100.000$. O ponto de equilíbrio corresponde a $L(x) = 0$, isto é, $x = 50.000$.

7. (a) $y = \frac{2A}{3B}$; (b) $x = \frac{A}{2}$; (c) $x = A$; (d) $y = \frac{A}{B}$.

9. $y = 2.000x - 5.000$, onde x representa o preço e y a quantidade ofertada.

11. $V(x) = 4x^3 - 140x^2 + 3.500x$, $0 \leq x \leq 50$.

13. $A(x) = 1.000x - x^2$.

15. $d(t) = 2\sqrt{2.500 + t^2}$.

17. $d(x) = \sqrt{2x^2 \pm 12\sqrt{x^2 + 16} + 52}$.

19. $y(h) = \sqrt{h^2 + 2hr}$.

21. $d(x) = \sqrt{x^2 + 10.036}$.

23. $d(t) = \sqrt{13.625t^2 - 10.400t + 4.225}$.

25. (a) $h = \frac{1}{3}r$; (b) $V(r) = \frac{1}{9}\pi r^3$.

27. Aproximadamente 14 anos, 2 meses e 12 dias.

29. Aproximadamente 5 anos.

31. 164 cm.

Capítulo 5

Limites e Continuidade

Neste capítulo apresentaremos, de um ponto de vista intuitivo, as idéias básicas sobre limites que serão necessárias na formulação das difinições de continuidade, diferenciabilidade e integrabilidade de uma função real.

5.1 Limites

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $2x + 1$, isto é, $f(x) = 2x + 1$. O gráfico de f é uma reta que intercepta o eixo dos y no ponto $(0, 1)$ e intercepta o eixo dos x no ponto $(-\frac{1}{2}, 0)$ (confira Figura 5.1).

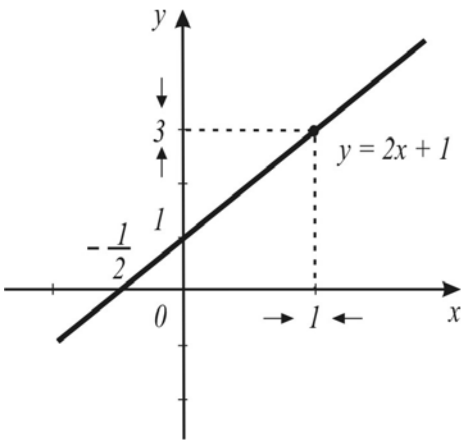

Figura 5.1: Gráfico da função $f(x) = 2x + 1$.

Vamos considerar as tabelas

x	$0,5$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$
$f(x)$	2	$2,8$	$2,98$	$2,998$	$2,9998$

e

x	$1,5$	$1,1$	$1,01$	$1,001$	$1,0001$
$f(x)$	4	$3,2$	$3,02$	$3,002$	$3,0002$

.

Pelas tabelas, notamos que, quando x se aproxima de 1, notação $x \to 1$, tanto pela esquerda quanto pela direita temos que $f(x)$ se aproxima de 3. Neste caso, dizemos que $f(x)$ tende ao limite 3 quando x se aproxima de 1, em símbolos

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 3.$$

Mais geralmente, seja f uma função qualquer. Se f aproxima-se de uma constante L, quando x se aproxima de x_0 tanto pela esquerda quanto pela direita, dizemos que f tende ao limite L. Neste caso, escreveremos

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

O número real L é chamado de *limite* de f no ponto x_0 (confira Figura 5.2). A notação $x \to x_0$ significa que x está muito próximo de x_0 mas $x \neq x_0$. Formalmente, dizemos que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L,$$

se dado um número real $\epsilon > 0$, arbitrariamente pequeno, existe em correspondência um $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathbb{R},\ \ 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon.$$

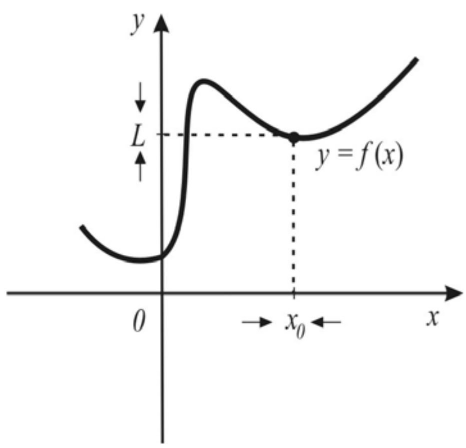

Figura 5.2: Representação gráfica de $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$.

Exemplo 5.1 *Se $f(x) = c$ é a função constante, então*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = c.$$

Solução. Pelo gráfico de f (confira Figura 5.3),

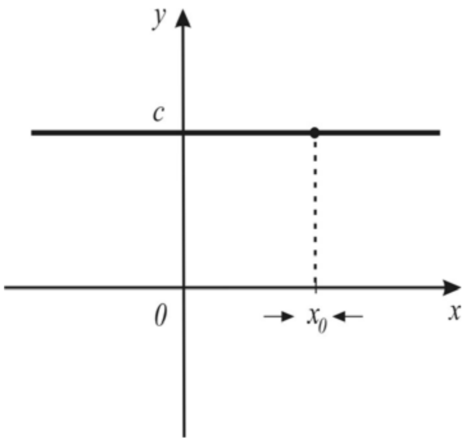

Figura 5.3: Gráfico da função $f(x) = c$.

temos que o limite de f é igual a c, em qualquer ponto x_0.

Exemplo 5.2 *Se $f(x) = x$ é a função identidade, então*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = x_0.$$

Solução. Pelo gráfico de f (confira Figura 5.4),

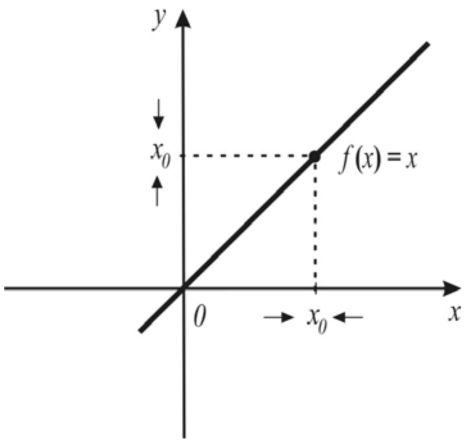

Figura 5.4: Gráfico função $f(x) = x$.

temos que o limite de f é igual a x_0, em qualquer ponto x_0.

Exemplo 5.3 *Se f é a função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} x + 1 & se\ x \leq 1, \\ -x & se\ x > 1, \end{cases}$$

então $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe.

Solução. Pelo gráfico de f (confira Figura 5.5),

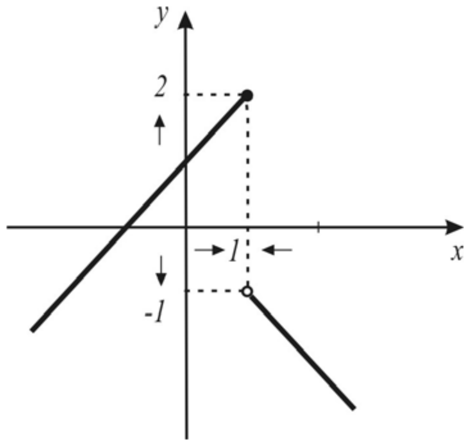

Figura 5.5: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{se } x \leq 1, \\ -x & \text{se } x > 1. \end{cases}$

temos que o limite de f é igual a -1 quando x se aproxima de 1 pela direita e é igual a 2 quando x se aproxima de 1 pela esquerda. Assim, o limite de f não existe no ponto $x_0 = 1$, pois ele depende de como x se aproxima de $x_0 = 1$.

Propriedade 5.4 *Sejam f, g funções quaisquer e c uma constante. Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, *então*:

1. $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = L + M$;
2. $\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = L - M$;
3. $\lim_{x\to x_0}(cf)(x) = cL$;
4. $\lim_{x\to x_0}(fg)(x) = LM$;
5. $\lim_{x\to x_0}(\frac{f}{g})(x) = \frac{L}{M}$, *com* $M \neq 0$;
6. $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L|$;
7. $\lim_{x\to x_0}[f(x)]^n = L^n$, $\forall\ n \in \mathbb{Z}$ *e* $L \neq 0$;
8. $\lim_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \begin{cases} \sqrt[n]{L} & \textit{se } L \geq 0, \\ \sqrt[n]{L} & \textit{se } L < 0 \textit{ e } n \textit{ ímpar}. \end{cases}$ ■

Exemplo 5.5 *Calcular o limite* $\lim_{x\to x_0}(ax+b)$.

Solução. Pelos Exemplos acima e as Propriedades 1 e 3, temos que

$$\lim_{x\to x_0}(ax+b) = \lim_{x\to x_0}(ax) + \lim_{x\to x_0} b = a \lim_{x\to x_0} x + b = ax_0 + b.$$

Mais geralmente,

$$\lim_{x\to x_0}(a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0)=a_nx_0^n+\cdots+a_1x_0+a_0.$$

Exemplo 5.6 *Calcular o limite*

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x+1}{3x+2}.$$

Solução. Pelas Propriedades e o Exemplo anterior, temos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+x+1}{3x+2}=\frac{\lim_{x\to 1}(2x^2+x+1)}{\lim_{x\to 1}(3x+2)}=\frac{4}{5}.$$

Mais geralmente,

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0}=\frac{a_nx_0^n+\cdots+a_1x_0+a_0}{b_mx_0^m+\cdots+b_1x_0+b_0}$$

se $b_mx_0^m+\cdots+b_1x_0+b_0\neq 0$.

Exemplo 5.7 *Calcular o limite*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}.$$

Solução. Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\frac{\lim_{x\to 2}(x^2-4)}{\lim_{x\to 2}(x^2-3x+2)}=\frac{0}{0},$$

o que é uma "*forma indeterminada*." Neste caso, devemos primeiro manipular algebricamente a expressão

$$\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}.$$

Como

$$x^2-4=(x-2)(x+2)\ \text{ e }\ x^2-3x+2=(x-2)(x-1)$$

temos que

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)(x-1)}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+2)}{(x-1)}=\frac{\lim_{x\to 2}(x+2)}{\lim_{x\to 2}(x-1)}=\frac{4}{1}=4,$$

pois $x\to 2$ significa que $(x-2)\neq 0$. Note que, esse exemplo mostra que, para uma função ter limite L quando x tende x_0, não é necessário que seja definida em x_0.

Exemplo 5.8 *Calcular o limite*

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}.$$

Solução. Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^3-1)}{\lim_{x\to 1}(x-1)}=\frac{1^3-1}{1-1}=\frac{0}{0},$$

o que é uma indeterminação. Neste caso, devemos primeiro manipular algebricamente a expressão

$$\frac{x^3-1}{x-1}.$$

Como

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

temos que

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+x+1)}{(x-1)}=\lim_{x\to 1}(x^2+x+1)=1+1+1=3,$$

pois $x\to 1$ significa que $(x-1)\neq 0$. Mais geralmente,

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}=n.$$

Exemplo 5.9 *Calcular o limite*

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}.$$

Solução. Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{\lim_{x\to 1}(\sqrt[3]{x}-1)}{\lim_{x\to 1}(x-1)}=\frac{\sqrt[3]{1}-1}{1-1}=\frac{0}{0},$$

o que é uma indeterminação. Neste caso, devemos primeiro manipular algebricamente a expressão

$$\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}.$$

Como

$$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$$

temos, fazendo $a=\sqrt[3]{x}$ e $b=1$, que

$$x-1=(\sqrt[3]{x}-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1),\ \text{ ou ainda, }\ \sqrt[3]{x}-1=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}\\ &= \frac{1}{\lim_{x\to 1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}=\frac{1}{\sqrt[3]{1^2}+\sqrt[3]{1}+1}=\frac{1}{3},\end{aligned}$$

pois $x\to 1$ significa que $(x-1)\neq 0$. Mais geralmente,

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[n]{x}-1}{x-1}=\frac{1}{n}.$$

Observação 5.10 *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $L \neq 0$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ *não existe.*

Exemplo 5.11 *Mostrar que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

não existe.

Solução. Como

$$\lim_{x\to 1}(x^2+x+1) = 3 \neq 0 \text{ e } \lim_{x\to 1}(x^2-1) = 0$$

temos, pelo Observação, que

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x+1}{x^2-1}$$

não existe.

Exemplo 5.12 *Mostrar que*

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{\frac{x+3}{(x-1)^2}}$$

não existe.

Solução. Como

$$\lim_{x\to 1}(x+3) = 4 \neq 0 \text{ e } \lim_{x\to 1}(x-1)^2 = 0$$

temos, pelo Observação, que

$$\lim_{x\to 1} \sqrt[4]{\frac{x+3}{(x-1)^2}}$$

não existe.

Exemplo 5.13 *Mostrar, usando a definição formal de limite, que*

$$\lim_{x\to 2}(2x-3) = 1$$

Solução. Devemos mostrar que, para todo $\epsilon > 0$, dado arbitrariamente, podemos encontrar um $\delta > 0$ tal que

$$x \in \mathbb{R},\ 0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(2x-3)-1| < \epsilon.$$

Na resolução deste tipo de desigualdade podemos, em geral, obter $\delta > 0$ desenvolvendo a afirmação envolvendo ϵ. De fato,

$$|(2x-3)-1| = |2x-4| = 2\,|x-2| < \epsilon \Rightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Assim, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta \leq \frac{\epsilon}{2}$ tal que

$$0 < |x-2| < \delta \Rightarrow |(2x-3)-1| < \epsilon,$$

pois

$$|x-2| < \delta \Rightarrow |x-2| < \frac{\epsilon}{2} \Rightarrow 2\,|x-2| < \epsilon \Rightarrow |(2x-3)-1| = 2\,|x-2| < \epsilon.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Determinar, se existir, os limites abaixo:

(a) $\lim\limits_{x\to 4}(5x^2-9x-8)$	(e) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^3+8}{x^4-16}$	(i) $\lim\limits_{h\to 0}\frac{4-\sqrt{16+h}}{h}$
(b) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\frac{4x^2-6x+3}{16x^3+8x-7}$	(f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$	(j) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2-7x+10}{x^6-64}$
(c) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x-2}{x^3-8}$	(g) $\lim\limits_{x\to 16}\frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$	(k) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\lvert x\rvert}{\sqrt{x^4+4x^2+7}}$
(d) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6}$	(h) $\lim\limits_{x\to -3}\left\lvert\frac{x^2+4x+3}{x+3}\right\rvert$	(l) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{-x}-e^{2x}}{3}$.

2. Sabendo-se que

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1,$$

calcular os seguintes limites:

(a) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{x}$	(e) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{x}$	(i) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 5x}{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}$
(b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x}{\operatorname{sen} 2x}$	(f) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x}$	(j) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} 3x+\operatorname{sen} x}{x\cos x}$
(c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$	(g) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a}$	(k) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\sec x-\sec a}{x-a}$
(d) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}$	(h) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\cos x-\cos a}{x-a}$	(l) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\tan x-\tan a}{x-a}$.

3. Calcular o limite

$$\lim_{x\to -\frac{b}{a}}\frac{\operatorname{sen}(ax+b)}{ax+b},$$

para todos $a,b\in\mathbb{R}$ com $a\neq 0$.

5.2 Limites Laterais

Seja $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x)=\begin{cases} x-1 & \text{se } x>0,\\ x+1 & \text{se } x<0.\end{cases}$$

O gráfico de f é mostrado na Figura 5.6.

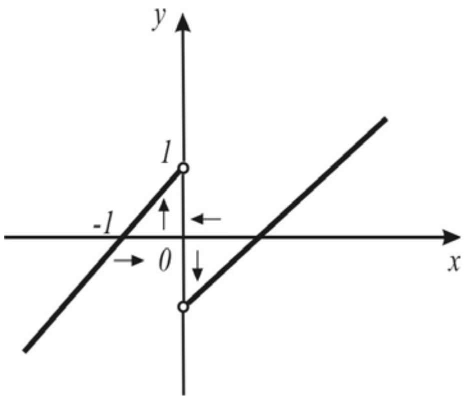

Figura 5.6: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} x-1 & \text{se } x > 0, \\ x+1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$

Vamos considerar as tabelas

x	$0,5$	$0,1$	$0,01$	$0,001$	$0,0001$
$f(x)$	$-0,5$	$-0,9$	$-0,99$	$-0,999$	$-0,9999$

e

x	$-0,5$	$-0,1$	$-0,01$	$-0,001$	$-0,0001$
$f(x)$	$0,5$	$0,9$	$0,99$	$0,999$	$0,9999$

.

Pelas tabelas, notamos que, quando x se aproxima de 0 pela esquerda, notação $x \to 0^-$, $f(x)$ se aproxima de 1 e quando x se aproxima de 0 pela direita, notação $x \to 0^+$, $f(x)$ se aproxima de -1. Logo,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = 1 \text{ e } \lim_{x \to 0^+} f(x) = -1.$$

A notação

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = L \quad \left(\lim_{x \to x_0^+} f(x) = L \right)$$

significa que: f aproxima-se do limite L, quando x se aproxima pela esquerda (direita) de x_0. O número real L é chamado de *limite lateral* à esquerda (direita) de f (confira Figura 5.7).

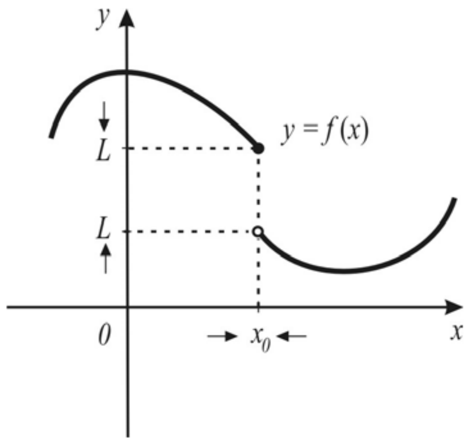

Figura 5.7: Gráfico da função f.

Observação 5.14 $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ *se, e somente se,*

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = L.$$

Exemplo 5.15 *Seja f a função definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 5x+5 & se\ x \leq -1, \\ \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} & se\ x > -1. \end{cases}$$

Determinar $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ *e* $\lim_{x\to -1^+} f(x)$.

Solução. Como $x \to -1^-$ significa que $x < -1$, temos que $f(x) = 5x+5$ e, pelas propriedades de limites (que, pela Observação, continuam válidas para limites laterais), obtemos

$$\lim_{x\to -1^-} (5x+5) = 5(-1)+5 = 0.$$

Como $x \to -1^+$ significa que $x > -1$, temos que

$$f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+4x+3}.$$

Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \frac{\lim_{x\to -1^+}(x^2-1)}{\lim_{x\to -1^+}(x^2+4x+3)} = \frac{0}{0},$$

o que é uma indeterminação. Neste caso, devemos primeiro manipular algebricamente a expressão

$$\frac{x^2-1}{x^2+4x+3}.$$

Como

$$x^2-1 = (x-1)(x+1) \text{ e } x^2+4x+3 = (x+1)(x+3)$$

temos que

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{x^2-1}{x^2+4x+3} = \lim_{x\to -1^+} \frac{(x-1)(x+1)}{(x+1)(x+3)} = \lim_{x\to -1^+} \frac{x-1}{x+3} = -1.$$

Note que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) \neq \lim_{x\to -1^+} f(x).$$

Portanto, $\lim_{x\to -1} f(x)$ não existe.

EXERCÍCIOS

---

1. Determinar, se existir, os limites abaixo:

   (a) $\lim\limits_{x\to 5^+} (\sqrt{x^2-25}+3)$

   (b) $\lim\limits_{x\to 3^-} x\sqrt{9-x^2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 3^+} \frac{\sqrt{(x-3)^2}}{x-3}$

   (d) $\lim\limits_{x\to -10^-} \frac{x+10}{\sqrt{(x+10)^2}}$

   (e) $\lim\limits_{x\to 5^+} \frac{1+\sqrt{2x-10}}{x+3}$

   (f) $\lim\limits_{x\to 4^-} \frac{\sqrt[4]{x^2-16}}{x+4}$

   (g) $\lim\limits_{x\to 16^+} \frac{x-16}{\sqrt{x}-4}$

   (h) $\lim\limits_{x\to 7^-} \sqrt{7-x}$

   (i) $\lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{8-x^3}$

   (j) $\lim\limits_{x\to 1^-} \sqrt[3]{x^3-1}$

   (k) $\lim\limits_{x\to -8} x^{\frac{2}{3}}$

   (l) $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} (5+|6x-3|)$.

2. Sejam $P=(c,d)$ um ponto pertencente ao gráfico da hipérbole $xy=1$ e $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 2dx+2c & \text{se } x<2, \\ 5cx-4d & \text{se } x\geq 2. \end{cases}$$

   Determinar os valores c e d de modo que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista.

3. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2+2 & \text{se } x\geq -1, \\ x+c^2 & \text{se } x<-1. \end{cases}$$

   Determinar o valor c de modo que $\lim_{x\to -1} f(x)$ exista.

4. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -x^2+x & \text{se } x<1, \\ c & \text{se } x=1, \\ x^2-3x+2 & \text{se } x>1. \end{cases}$$

   Determinar o valor c de modo que $\lim_{x\to 1} f(x)$ exista.

5. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-c & \text{se } x\geq 2, \\ x^2+cx-5 & \text{se } x<2. \end{cases}$$

   Determinar o valor c de modo que $\lim_{x\to 2} f(x)$ exista.

6. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} d - 2x & \text{se } x \geq 2, \\ cx^2 + d & \text{se } -2 < x < 2, \\ x - c & \text{se } x \leq -2. \end{cases}$$

Determinar os valores c e d de modo que o limite de $f(x)$ exista em todo $\mathbb{R}$.

7. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} dx^2 - 3c & \text{se } x \geq 3, \\ (c + d)x & \text{se } 1 \leq x < 3, \\ -8x^2 - 2c & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Determinar os valores c e d de modo que o limite de $f(x)$ exista em todo $\mathbb{R}$.

5.3 Limites Infinitos e no Infinito

Seja $f : \mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}.$$

O gráfico de f é mostrado na Figura 5.8.

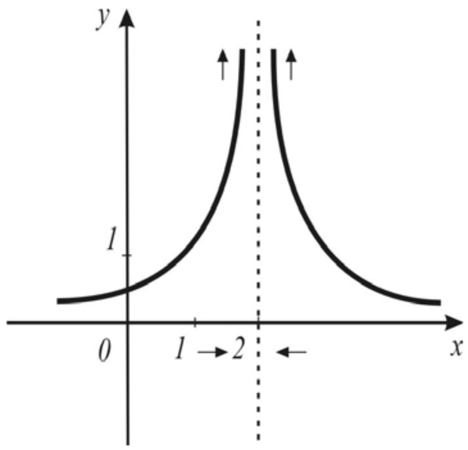

Figura 5.8: Gráfico da função $f(x) = \frac{3}{(x-2)^2}$.

Vamos considerar as tabelas

x	1	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{7}{4}$	$\frac{19}{10}$
$f(x)$	3	12	27	48	300

e

x	3	$\frac{5}{2}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{21}{10}$
$f(x)$	3	12	27	48	300

.

Pelas tabelas, notamos que, quando x se aproxima de 2 tanto pela esquerda quanto pela direita temos que $f(x)$ cresce sem limite. Neste caso, dizemos que $f(x)$ tende ao infinito $(+\infty)$ quando x se aproxima de 2, em símbolos

$$\lim_{x \to 2} f(x) = +\infty.$$

A notação

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = +\infty \quad \left(\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty\right)$$

significa que: f cresce sem limite (decresce sem limite) quando x se aproxima de x_0. Neste caso, dizemos que f tem *limite infinito* ou, equivalentemente, o limite de f quando x se aproxima de x_0 não existe.

Exemplo 5.16 *Mostrar que*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{(x-1)^4} = +\infty.$$

Solução. Pelo gráfico de $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$ (confira Figura 5.9),

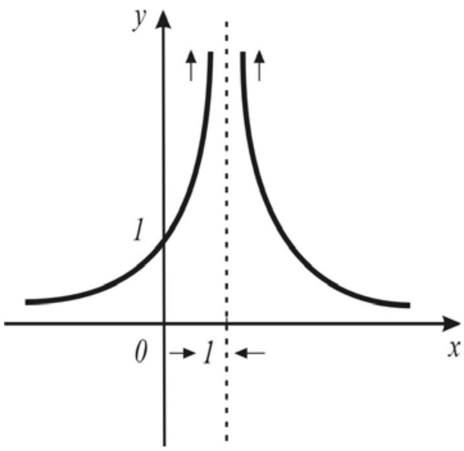

Figura 5.9: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{(x-1)^4}$.

temos que o limite de f tende ao infinito no ponto $x_0 = 1$.

A reta $x = x_0$ é uma *assíntota vertical* do gráfico de f se pelo menos uma das seguintes condições for satisfeita:

1. $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$;

2. $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$ ou $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$.

Observação 5.17 *Se* $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, $L \neq 0$ *e* $\lim_{x\to x_0} g(x) = 0$, *então* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ *ou* $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty$, *isto é, o limite não existe.*

Exemplo 5.18 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2 - 4x + 3}.$$

Solução. É claro que $\lim_{x\to 1} x = 1$. Se $1 < x < 3$, então $x - 1 > 0$ e $x - 3 < 0$. Assim,

$$x \to 1^+ \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \to 0^-.$$

Logo, pela Observação,

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x}{x^2 - 4x + 3} = -\infty.$$

Se $0 < x < 1$, então $x - 1 < 0$ e $x - 3 < 0$. Assim,

$$x \to 1^- \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = (x-1)(x-3) \to 0^+.$$

Logo, pela Observação,

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x}{x^2 - 4x + 3} = +\infty.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{x^2 - 4x + 3}$$

não existe. De modo similar mostra que

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x}{x^2 - 4x + 3} = -\infty \text{ e } \lim_{x\to 3^+} \frac{x}{x^2 - 4x + 3} = +\infty.$$

Portanto, concluímos que as retas $x = 1$ e $x = 3$ são assíntotas verticais do gráfico da função f definida por

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 4x + 3}, \forall\ x \in \mathbb{R} - \{1, 3\}.$$

Seja $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x) = \frac{1}{x^2}.$$

O gráfico de $f(x)$ é mostrado na Figura 5.10.

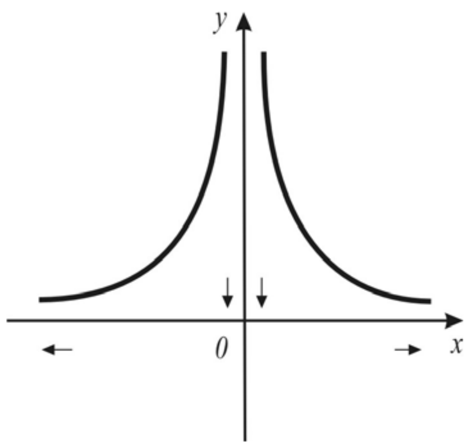

Figura 5.10: Gráfico da função $f(x) = \frac{1}{x^2}$.

Vamos considerar as tabelas

x	10	100	1.000	10.000	100.000
$f(x)$	10^{-2}	10^{-4}	10^{-9}	10^{-16}	10^{-25}

e

x	-10	-100	-1.000	-10.000	-100.000
$f(x)$	10^{-2}	10^{-4}	10^{-9}	10^{-16}	10^{-25}

Pelas tabelas, notamos que, quando x cresce sem limite tanto pela esquerda quanto pela direita temos que $f(x)$ se aproxima de 0. Neste caso, dizemos que $f(x)$ tende ao limite 0 quando x cresce (decresce) sem limite, em símbolos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}=0\ \left(\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x^2}=0\right).$$

A notação

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=L\ \left(\lim_{x\to-\infty}f(x)=L\right)$$

significa que: $f(x)$ tem limite L quando x cresce sem limite (decresce sem limite). Neste caso, dizemos que f tem *limite no infinito.*

A reta $y=L$ é uma *assíntota horizontal* do gráfico de f se pelo menos uma das seguintes condições for satisfeita:

1. $\lim_{x\to-\infty}f(x)=L$;

2. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$.

Observação 5.19 *Sejam $K\in\mathbb{R}^*$ e $r\in\mathbb{Q}$, $r>0$. Então*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{K}{x^r}=0\ \textit{e}\ \lim_{x\to-\infty}\frac{K}{x^r}=0.$$

Podemos, também, considerar o caso em que tanto x como $f(x)$ cresça ou decresça sem limite. Neste caso, denotaremos por

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=+\infty\ \textit{ou}\ \lim_{x\to+\infty}f(x)=-\infty,\\ \lim_{x\to-\infty}f(x)&=+\infty\ \textit{ou}\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty.\end{aligned}$$

Além disso, se $\lim_{x\to\pm\infty}g(x)=L$, $L\neq0$ e $\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\pm\infty$, então $\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$.

Exemplo 5.20 *Mostrar que*

$$\lim_{x\to+\infty}x^n=+\infty,\forall\ n\in\mathbb{N},x>0.$$

Solução. Pelo gráfico de $f(x) = x^n$ (confira Figura 5.11),

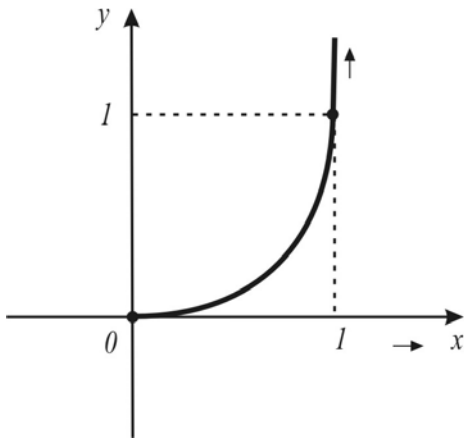

Figura 5.11: Gráfico da função $f(x) = x^n$.

temos que o limite de $f(x)$ é infinito. Se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então mostra-se de modo análogo que $\lim_{x\to-\infty} x^n = -\infty$. Mais geralmente,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0) &= \lim_{x\to+\infty} x^n(a_n + \frac{a_{n-1}}{x^n} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n})\\ &= \pm\infty,\end{aligned}$$

pois, pela Observação,

$$\lim_{x\to+\infty}(a_n + \frac{a_{n-1}}{x^n} + \cdots + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \frac{a_0}{x^n}) = a_n,$$

onde $a_n > 0$ ou $a_n < 0$. Se $n \in \mathbb{N}$ é ímpar, então

$$\lim_{x\to-\infty}(a_nx^n + \cdots + a_1x + a_0) = \pm\infty$$

Exemplo 5.21 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 5x - 3}.$$

Solução. Note que não podemos aplicar diretamente as propriedades, pois

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 5x - 3} = \frac{\lim_{x\to+\infty}(x^2 - 2x + 1)}{\lim_{x\to+\infty}(2x^2 + 5x - 3)} = \frac{\infty}{\infty},$$

o que é uma indeterminação. Pelo Exemplo anterior, temos que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x^2 + 5x - 3} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2})} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{(2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2})}\\ &= \frac{\lim_{x\to+\infty}(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{\lim_{x\to+\infty}(2 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2})} = \frac{1 - 0 + 0}{2 + 0 - 0} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Mais geralmente,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0}{b_mx^m+\cdots+b_1x+b_0}=\lim_{x\to+\infty}x^{n-m}\frac{\left(a_n+\frac{a_{n-1}}{x}+\cdots+\frac{a_1}{x^{n-1}}+\frac{a_0}{x^n}\right)}{\left(b_m+\frac{b_{m-1}}{x}+\cdots+\frac{b_1}{x^{m-1}}+\frac{b_0}{x^m}\right)}$$

é igual a $\frac{a_n}{b_m}$, 0 ou $\pm\infty$, se $m=n$, $n<m$ ou $n>m$.

Exemplo 5.22 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4x+3}.$$

Solução. Como o grau do polinômio x é menor do que o grau do polinômio x^2-4x+3 temos, pelo Exemplo acima, que

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^2-4x+3}=0.$$

De modo similar, temos que

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2-4x+3}=0.$$

Logo, a reta $y=0$ é uma assíntota horizontal do gráfico da função $f(x)$ definida por

$$f(x)=\frac{x}{x^2-4x+3},\forall\ x\in\mathbb{R}-\{1,3\}.$$

Já sabemos que as retas $x=1$ e $x=3$ são assíntotas verticais do gráfico da função f. Portanto, o esboço do gráfico de f é dado pela Figura 5.12.

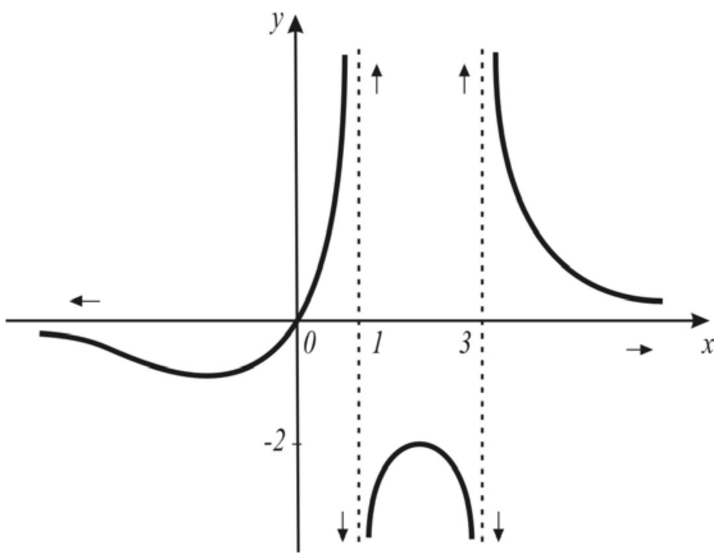

Figura 5.12: Gráfico da função $f(x)=\frac{x}{x^2-4x+3}$.

Exemplo 5.23 *Calcular, se existir, o limite*

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}.$$

Solução.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2(1+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2}\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{|x|\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{1}{x})}\\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x\sqrt{(1+\frac{1}{x^2})}}{x(1+\frac{1}{x})} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{1+\frac{1}{x}} = \frac{\lim_{x\to+\infty}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})} = 1.\end{aligned}$$

EXERCÍCIOS

---

1. Determinar, se existir, os limites abaixo:

   (a) $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x^2+5x+1}{x^2-2x-3}$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(3x^3+4x^2-1)$ (k) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
   (b) $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x+1}{x^3-1}$ (g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{5x+3}$ (l) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
   (c) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x}{1-x}$ (h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2-3}}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ (m) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
   (d) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x-1}{|x|}$ (i) $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\sqrt{x^2+1}-x)$ (n) $\lim\limits_{x\to0^-}\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}}$
   (e) $\lim\limits_{x\to-1^+}\left(\frac{3}{x+1}-\frac{5}{x^2-1}\right)$ (j) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1})$ (o) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$.

2. Determinar, se existir, as assíntotas horizontais e verticais do gráfico de cada função e esboce o gráfico:

   (a) $f(x)=\frac{7x}{2x-5}$ (e) $f(x)=\frac{3x}{\sqrt{2x^2+1}}$ (i) $f(x)=\frac{x^2-1}{x}$
   (b) $f(x)=\frac{-2}{(x-1)^2}$ (f) $f(x)=\sqrt{\frac{x}{x-2}}$ (j) $f(x)=\frac{1}{x(x+1)}-\frac{1}{x}$
   (c) $f(x)=\frac{1-2x}{3+5x}$ (g) $f(x)=\frac{-2x}{\sqrt{x^2+4}}$ (k) $f(x)=\frac{4x^2}{\sqrt{x^2+5x+4}}$
   (d) $f(x)=\frac{3x^2+1}{2x^2-7x}$ (h) $f(x)=\frac{x+2}{\sqrt{1-x}}$ (l) $f(x)=\frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$.

3. Determinar os limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to3^+}\frac{x^2+5x+1}{x^2-2x-3}$ (d) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{5x^2-1}}$ (g) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2\sqrt{x}+3\sqrt[3]{x}+5\sqrt[5]{x}}{\sqrt{3x-2}+\sqrt[3]{2x-3}}$
   (b) $\lim\limits_{x\to2}\frac{\sqrt[3]{x^3-8}}{x-2}$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{3x^2-4}-\frac{x^2}{3x+2}\right)$ (h) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$
   (c) $\lim\limits_{x\to2}\frac{x^2-4+\sqrt[3]{x^3-8}}{x-2}$ (f) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{9x^2+1}-3x)$ (i) $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{2x^2+3}}{4x+2}$.

4. Sabendo-se que

   $$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e,$$

   calcular os seguintes limites:

   (a) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+\frac{8}{x})^x$ (d) $\lim\limits_{x\to0}(1-3x)^{\frac{2}{x}}$ (g) $\lim\limits_{x\to0}\frac{a^x-1}{x}, a>0$
   (b) $\lim\limits_{x\to-\infty}(1-\frac{5}{x})^x$ (e) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\frac{2x-1}{2x+4})^x$ (h) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{5x}-1}{x}$
   (c) $\lim\limits_{x\to0}(1+4x)^{\frac{2}{x}}$ (f) $\lim\limits_{x\to-\infty}(\frac{6x+3}{6x-2})^{\frac{x}{2}}$ (i) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\log(1+2x)}{x}$.

5. Calcular o limite
$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x})^{x+a},$$
para todo $a \in \mathbb{R}$.

6. Calcular o limite
$$\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{1}{x+b})^{x+a},$$
para todos $a, b \in \mathbb{R}$.

5.4 Continuidade

Vamos considerar a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-4}{x-2} & \text{se } x \neq 2, \\ 4 & \text{se } x = 2. \end{cases}$$

Note que:

1. $f(2) = 4$, isto é, f é definida no ponto $x_0 = 2$;

2. $\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+2) = 4$, isto é, $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe;

3. $\lim_{x\to 2} f(x) = 4 = f(2)$.

Definição 5.24 *Sejam f uma função e $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado. Dizemos que f é* contínua em x_0 *se as seguintes condições são satisfeitas*:

1. *$f(x_0)$ existe, isto é, f está definida no ponto x_0*;

2. *$\lim_{x\to x_0} f(x)$ existe, isto é, $\lim_{x\to x_0} f(x)$ é um número real*;

3. *$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

Observação 5.25 *Sejam f uma função e $x_0 \in X = \operatorname{Dom} f$ um intervalo aberto*:

1. *Se f é contínua em x_0, então*
$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(\lim_{x\to x_0} x).$$

2. *Dizemos que f é* contínua *em X se f é continua em todos os pontos de X. Intuitivamente, f é contínua em X se o gráfico de f pode ser traçado, completamente, sem tirarmos o lápis do papel.*

Se pelo menos uma das condições da definição de função contínua f em x_0 não for satisfeita, dizemos que f é *descontínua* em x_0. Neste caso, temos os seguintes tipos descontinuidade:

1. O ponto x_0 é uma *descontinuidade removível* de f se $f(x_0)$ não está definido e $\lim_{x\to x_0} f(x)$ existir ou
$$\lim_{x\to x_0} f(x) \neq f(x_0).$$
Porque podemos removê-la definindo adequadamente o valor $f(x_0)$.

2. O ponto x_0 é uma *descontinuidade tipo salto* de f se os limites laterais existirem e são diferentes, isto é,
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x).$$

3. O ponto x_0 é uma *descontinuidade essencial* de f se
$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty \text{ ou } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty.$$

Exemplo 5.26 *Determinar se a função*
$$f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}$$
é contínua em $x_0 = 2$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

Solução. Neste tipo de problema, devemos primeiro encontrar o domínio da função f. É fácil verificar que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$. Como $x_0 = 2 \in \operatorname{Dom} f$, podemos falar da continuidade ou não de f em $x_0 = 2$.
$$f(2) = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15,$$
isto é, f está definida no ponto $x_0 = 2$;
$$\lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2} \frac{x^4 - 1}{x - 1} = \frac{2^4 - 1}{2 - 1} = 15,$$
isto é, $\lim_{x\to 2} f(x)$ existe;
$$\lim_{x\to 2} f(x) = 15 = f(2).$$
Portanto, f é contínua em $x_0 = 2$.

Exemplo 5.27 *Determinar se a função*
$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$$
é contínua em $x_0 = 2$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{2\}$. Como $x_0 = 2 \notin \operatorname{Dom} f$ temos que f é descontínua em $x_0 = 2$, isto é, f não está definida no ponto $x_0 = 2$ (confira Figura 5.13).

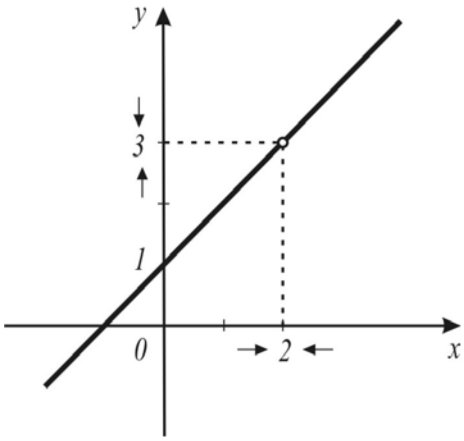

Figura 5.13: Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2-x-2}{x-2}$.

Neste caso, devemos dizer o tipo de descontinuidade de f.

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^2-x-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x+1)}{x-2} = \lim_{x\to 2}(x+1) = 3.$$

Assim, $x_0 = 2$ é uma descontinuidade removível de f, pois a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 2, \\ 3 & \text{se } x = 2, \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 2$.

Exemplo 5.28 *Determinar se a função*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \textit{se } x \neq 1, \\ 2 & \textit{se } x = 1 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 1$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. Como $x_0 = 1 \in \operatorname{Dom} f$ temos que f está definida no ponto $x_0 = 1$, isto é, $f(1) = 2$.

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2+x-2}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)(x-1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+2) = 3.$$

Como $\lim_{x\to 1} f(x) \neq f(1)$ temos que f é descontínua em $x_0 = 1$ (confira Figura 5.14).

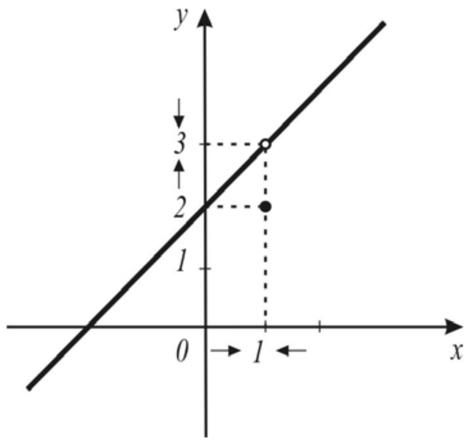

Figura 5.14: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2+x-2}{x-1} & \text{se } x \neq 1, \\ 2 & \text{se } x = 1. \end{cases}$

Assim, $x_0 = 1$ é uma descontinuidade removível de f, pois a função $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \neq 1, \\ 3 & \text{se } x = 1, \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 1$.

Exemplo 5.29 *Determinar se a função*

$$f(x) = \begin{cases} -x+3 & se\ x < 1, \\ -x+2 & se\ x \geq 1 \end{cases}$$

é contínua em $x_0 = 1$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$. Como $x_0 = 1 \in \operatorname{Dom} f$ temos que f está definida no ponto $x_0 = 1$, isto é, $f(1) = 1$.

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (-x+3) = 2$$

e

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (-x+2) = 1$$

Como $\lim_{x \to 1^-} f(x) = 2 \neq 1 = \lim_{x \to 1^+} f(x)$ temos que $\lim_{x \to 1} f(x)$ não existe e, assim, f é descontínua em $x_0 = 1$ (confira Figura 5.15).

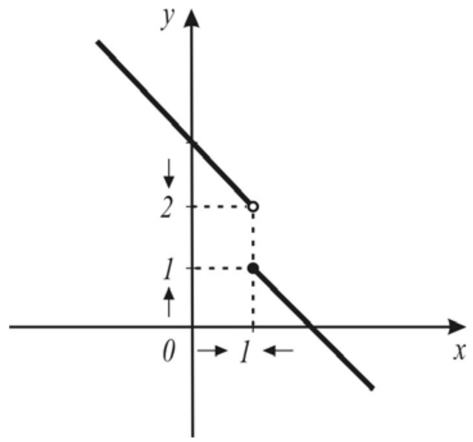

Figura 5.15: Gráfico da função $f(x) = \begin{cases} -x+3 & \text{se } x < 1, \\ -x+2 & \text{se } x \geq 1. \end{cases}$

Portanto, $x_0 = 1$ é uma descontinuidade tipo salto de f.

Exemplo 5.30 *Determinar se a função*

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

é contínua em $x_0 = 0$. Caso contrário, dizer o tipo de descontinuidade.

Solução. É claro que $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{0\}$. Como $x_0 = 0 \notin \operatorname{Dom} f$ temos que f é descontínua em $x_0 = 0$, isto é, f não está definida no ponto $x_0 = 0$. Note que,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

e

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

Portanto, $x_0 = 0$ é uma descontinuidade essencial de f.

Propriedade 5.31 *Sejam $f, g : X \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções. Se f e g são contínuas em $x_0 \in X$, então:*

1. *$f + g$ é contínua em $x_0 \in X$;*
2. *$f - g$ é contínua em $x_0 \in X$;*
3. *cf, onde c é uma constante, é contínua em $x_0 \in X$;*
4. *fg é contínua em $x_0 \in X$;*
5. *$\frac{f}{g}$, com $g(x_0) \neq 0$, é contínua em $x_0 \in X$;*
6. *$|f|$ é contínua em $x_0 \in X$.*

Prova. Vamos provar apenas o item 1. Como f e g são contínuas em $x_0 \in X$ temos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0).$$

Logo, pela Propriedade 1 de limites, obtemos

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) &= \lim_{x\to x_0}[f(x)+g(x)] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x)\\ &= f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0).\end{aligned}$$

Portanto, $f+g$ é contínuas em $x_0 \in X$. ■

Teorema 5.32 *Sejam $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ duas funções, com $\operatorname{Im} f \subseteq Y$. Se f é contínua em $x_0 \in X$ e g é contínua em $y_0 = f(x_0) \in Y$, então $g \circ f$ é contínua em $x_0 \in X$.*

Prova. Como f e g são contínuas em x_0 e y_0, respectivamente, temos que

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{y\to y_0} g(y) = g(y_0) = g(f(x_0)).$$

Assim,

$$\lim_{x\to x_0}(g\circ f)(x) = \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x)) = g(f(x_0)) = (g\circ f)(x_0).$$

Portanto, $g \circ f$ é contínua em $x_0 \in X$. ■

Note que, se $f(x) = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$, então f é contínua em todo $\mathbb{R}$. Também, se

$$f(x) = \frac{a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0},$$

então f é contínua em todo $\mathbb{R}$, onde

$$b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0.$$

Exemplo 5.33 *Mostrar que a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por*

$$f(x) = |x|$$

é contínua.

Solução. Se $x \neq 0$, então $|x| = x$ ou $|x| = -x$ e, assim, f é contínua em todo $\mathbb{R} - \{0\}$. Resta mostrar que f é contínua em 0. Note que

$$\lim_{x\to 0^+} |x| = \lim_{x\to 0^+} x = 0 \text{ e } \lim_{x\to 0^-} |x| = \lim_{x\to 0^-}(-x) = 0.$$

Assim, $\lim_{x\to 0} |x| = 0 = |0| = f(0)$. Portanto, $f(x) = |x|$ é contínua em todo $\mathbb{R}$ (confira Figura 5.16).

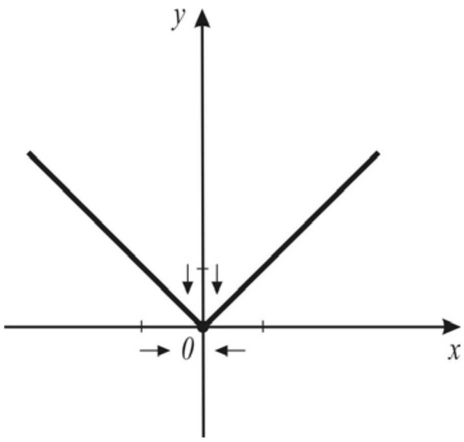

Figura 5.16: Gráfico da função $f(x) = |x|$.

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é contínua em $[a, b]$ se f é contínua em $]a, b[$ e

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \text{ e } \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b).$$

Exemplo 5.34 *Mostrar que a função $f : [-3, 3] \to \mathbb{R}$ definida pela regra $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ é contínua.*

Solução. Sejam $h(x) = 9 - x^2$, para todo $x \in [-3, 3]$, e $g(x) = \sqrt{x}$, para todo $x \in \mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$. Então é claro que, h é contínua em $]-3, 3[$. Além disso,

$$\lim_{x \to -3^+} h(x) = \lim_{x \to -3^+} (9 - x^2) = 0 = h(-3) \text{ e } \lim_{x \to 3^-} h(x) = \lim_{x \to 3^-} (9 - x^2) = 0 = h(3).$$

Assim, h é contínua em $[-3, 3]$. De modo análogo, mostra-se que g é contínua em $\mathbb{R}_+$. Portanto, $g \circ f$ é contínua em $[-3, 3]$.

EXERCÍCIOS

---

1. Mostrar que as seguintes funções são contínuas no ponto indicado:

   (a) $f(x) = \sqrt{2x - 5} + 3x$, $x_0 = 4$ $\quad$ (c) $f(x) = 3x^2 + 7 - \frac{1}{\sqrt{-x}}$, $x_0 = -2$

   (b) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 + 2}$, $x_0 = -5$ $\quad$ (d) $f(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{2x+1}$, $x_0 = 8$.

2. Classifique as decontinuidades das funções abaixo:

   (a) $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{se } x < 1 \\ 4 - x & \text{se } x \geq 1 \end{cases}$ $\quad$ (c) $f(x) = \begin{cases} |x + 3| & \text{se } x \neq -2 \\ 2 & \text{se } x = -2 \end{cases}$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ x + 1 & \text{se } x > 1 \end{cases}$ $\quad$ (d) $f(x) = \begin{cases} x - 1 & \text{se } x \leq 1 \\ 2x - 1 & \text{se } 1 < x < 2 \\ x + 1 & \text{se } x \geq 2 \end{cases}$.

3. Determinar todos os pontos para os quais a função f é descontínua:

   $(a)\quad f(x)=\frac{3}{x^2+x-6}$ $\qquad(c)\quad f(x)=\frac{x-1}{x^2+x-2}$ $\qquad(e)\quad f(x)=\frac{1}{e^{4x}-1}$

   $(b)\quad f(x)=\frac{5}{x^2-4x-12}$ $\qquad(d)\quad f(x)=\frac{x-4}{x^2-x-12}$ $\qquad(f)\quad f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x^2-1}}$.

4. Determinar se cada função é contínua ou descontínua em cada intervalo:

   (a) $f(x)=\sqrt{x-4}$, em $[4,8]$;

   (b) $f(x)=\frac{3}{2x-1}$, em $[\frac{1}{2},+\infty[$;

   (c) $f(x)=\begin{cases} 2-x & \text{se } 1\leq x\leq 2,\\ 3x-2 & \text{se } x<1,\end{cases}$ em $[1,2]$;

   (d) $f(x)=\frac{1}{x-1}$, em $]1,4[$;

   (e) $f(x)=\sqrt{16-x}$, em $]-\infty,16[$.

5. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{se } x\neq 1,\\ c & \text{se } x=1.\end{cases}$$

   Determinar o valor c para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

6. Seja $f:[\frac{1}{6},+\infty[\ \to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \frac{\sqrt{2x+7}-\sqrt{6x-1}}{x-2} & \text{se } x\neq 2,\\ c & \text{se } x=2.\end{cases}$$

   Determinar o valor c para que f seja contínua em todo $[\frac{1}{6},+\infty[$.

7. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2 & \text{se } x\geq -1,\\ x+c^2 & \text{se } x<-1.\end{cases}$$

   Determinar o valor c para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

8. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x-c & \text{se } x\geq 2,\\ x^2+cx-5 & \text{se } x<2.\end{cases}$$

   Determinar o valor c para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

9. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} -6x & \text{se } x\geq 5,\\ cx+d & \text{se } 2<x<5,\\ 3x & \text{se } x\leq 2.\end{cases}$$

   Determinar os valores c e d para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

10. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} d - x & \text{se } x \geq 2, \\ cx^2 + d & \text{se } -2 < x < 2, \\ x - c & \text{se } x \leq -2. \end{cases}$$

Determinar os valores c e d para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

11. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} dx^2 - 2c & \text{se } x \geq 3, \\ (c + d)x & \text{se } 1 \leq x < 3, \\ -x^2 - 2c & \text{se } x < 1. \end{cases}$$

Determinar os valores c e d para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

12. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + 8} & \text{se } x > 1, \\ cx + d & \text{se } 0 \leq x \leq 1, \\ 3x^2 - 1 & \text{se } x < 0. \end{cases}$$

Determinar os valores c e d para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

13. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} & \text{se } x \neq 4, \\ c & \text{se } x = 4. \end{cases}$$

Determinar o valor c para que f seja contínua em todo $\mathbb{R}$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Z}, \\ 2 & \text{se } x \notin \mathbb{Z}. \end{cases}$$

   (a) Esbocar o gráfico de f em $[0, 5]$;
   (b) Calcular $\lim_{x \to 4} f(x)$ e $\lim_{x \to \frac{5}{2}} f(x)$;
   (c) Para que valores de x_0 o $\lim_{x \to x_0} f(x)$ existe? Justifique.

15. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cx + d$, onde $c, d \in \mathbb{R}$ e $c \neq 0$. Calcular

   (a) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$;
   (b) $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$.

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 5.1

1. (a) 36; (b) -1; (c) $\frac{1}{12}$; (d) não existe; (e) $-\frac{3}{8}$; (f) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (g) 8; (h) 2; (i) $-\frac{1}{8}$; (j) $-\frac{1}{64}$; (k) 0; (l) 0.

2. (a) 5; (b) $\frac{3}{2}$; (c) 1; (d) 0; (e) 3; (f) 0; (g) $\cos a$; (h) $-\operatorname{sen} a$; (i) $10\sqrt{3}$; (j) 4; (k) $\sec a \tan a$; (l) $\sec^2 a$.

3. 1.

Seção 5.2

1. (a) 3; (b) 0; (c) 1; (d) -1; (e) $\frac{1}{8}$; (f) 0; (g) 8; (h) 0; (i) 0; (j) 0; (k) 4; (l) 5.

2. $c = \pm 1$ e $d = \pm 1$.

3. $c = \pm 2$.

4. $c = 0$.

5. $c = 1$.

6. $c = -1$ e $d = 3$.

7. $c = -2$ e $d = -2$.

Seção 5.3

1. (a) não existe; (b) não existe; (c) não existe; (d) não existe; (e) não existe; (f) não existe; (g) não existe; (h) 1; (i) -1; (j) 0; (k) $\frac{1}{2}$; (l) $\frac{1}{2}$; (m) 0; (n) 1; (o) $\frac{1}{2}$.

2. (a) $x = \frac{5}{2}$ assíntota vertical e $y = \frac{7}{2}$ assíntota horizontal;

   (b) $x = 1$ assíntota vertical e $y = 0$ assíntota horizontal;

   (c) $x = -\frac{3}{5}$ assíntota vertical e $y = -\frac{2}{5}$ assíntota horizontal;

   (d) $x = 0$, $x = \frac{7}{2}$ assíntotas verticais e $y = \frac{3}{2}$ assíntota horizontal;

   (e) assíntota vertical não tem e $y = \frac{3}{2}\sqrt{2}$ assíntota horizontal;

   (f) $x = 2$ assíntota vertical e $y = 1$ assíntota horizontal;

   (g) assíntota vertical não tem e $y = -2$ assíntota horizontal;

(h) $x = 1$ assíntota vertical e não tem assíntota horizontal;

(i) $x = 0$ assíntota vertical e não tem assíntota horizontal;

(j) $x = -1$ assíntota vertical e $y = 0$ assíntota horizontal;

(k) $x = -1$, $x = -4$ assíntotas verticais e não tem assíntota horizontal;

(l) não tem assíntota vertical e $y = 0$ assíntota horizontal.

3. (a) ∞; (b) ∞; (c) ∞; (d) ∞; (e) $\frac{2}{9}$; (f) 0; (g) $\frac{2}{3}\sqrt{3}$; (h) $\frac{1}{4}\sqrt{2}$; (i) $-\frac{1}{4}\sqrt{2}$.

4. (a) e^8; (b) e^{-5}; (c) e^8; (d) e^{-6}; (e) $e^{-\frac{5}{2}}$; (f) $e^{\frac{5}{12}}$; (g) $\log a$; (h) 5; (i) 2.

5. e.

6. e.

Seção 5.4

1. (a) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \sqrt{3}+12 = f(x_0)$; (b) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 3 = f(x_0)$; (c) $\lim_{x\to x_0} f(x) = 19 - \frac{1}{\sqrt{2}} = f(x_0)$; (d) $\lim_{x\to x_0} f(x) = \frac{2}{17} = f(x_0)$.

2. (a) Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq 3 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ temos que a decontinuidade de f em $x_0 = 1$ é do tipo salto;

   (b) Como $\lim_{x\to -2} f(x) = 1 \neq 2 = f(x_0)$ temos que a decontinuidade de f em $x_0 = -2$ é removível;

   (c) Como $\lim_{x\to 1} f(x) = 2 \neq 1 = f(x_0)$ temos que a decontinuidade de f em $x_0 = 1$ é removível;

   (d) Como $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 0 \neq 1 = \lim_{x\to 1^+} f(x)$ temos que a decontinuidade de f em $x_0 = 1$ é do tipo salta.

3. (a) Continua em $\mathbb{R} - \{-3, 2\}$; (b) Continua em $\mathbb{R} - \{-2, 6\}$; (c) Continua em $\mathbb{R} - \{-2, 1\}$; (d) Continua em $\mathbb{R} - \{-3, 4\}$; (e) Continua em $\mathbb{R} - \{0\}$; (f) Continua em $\mathbb{R} - \{-1, 1\}$.

4. (a) Continua; (b) Descontinua; (c) Continua; (d) Descontínua; (e) Contínua.

5. $c = 3$.

6. $c = -\frac{2}{11}\sqrt{11}$.

7. $c = \pm 2$.

8. $c = 1$.

9. $c = -12$ e $d = 30$.

10. $c = -\frac{1}{2}$ e $d = -\frac{9}{2}$.

11. $c = -\frac{6}{23}$ e $d = -\frac{5}{23}$.

12. $c = 4$ e $d = -1$.

13. $c = \frac{1}{4}$.

14. (b) $\lim_{x\to 4} f(x) = 2$ e $\lim_{x\to \frac{5}{2}} f(x) = 2$; (c) $x_0 \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$.

15. (a) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = c$; (b) $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = c$.

Capítulo 6

Diferenciabilidade

Usando o estudo de limites apresentaremos o conceito de derivada de uma função real e estabeleceremos fórmulas e técnicas gerais para usá-las no cálculo de derivadas sem apelar para limites. Isto permite aplicar o conceito de derivada a qualquer quantidade ou grandeza que possa ser representada por uma função. Como grandezas desse tipo ocorrem em quase todos os ramos do conhecimento, aplicações da derivada são abundantes e variadas.

6.1 Derivada

Como motivação vamos apresentar três problemas concretos:

Primeiro - Vamos considerar o problema que consiste em traçar a reta tangente T a uma curva C em um ponto qualquer P desta curva segundo Leibniz (matemático alemão Gottfried Leibniz, 1646 - 1716).

Na geometria elementar a reta tangente T em um ponto P de um círculo (cônicas) C pode ser interpretado como a reta que toca C nesse ponto ou, equivalentemente, a reta que é perpendicular ao raio de C. Não podemos estender esta interpretação a uma curva C qualquer, pois a reta que toca uma curva C em um só ponto nem sempre é tangente à curva C. Assim, nosso objetivo é definir a inclinação da reta tangente em P, pois conhecendo a inclinação, podemos determinar a equação da reta tangente.

Seja C o gráfico de uma função f, isto é,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = f(x)\}.$$

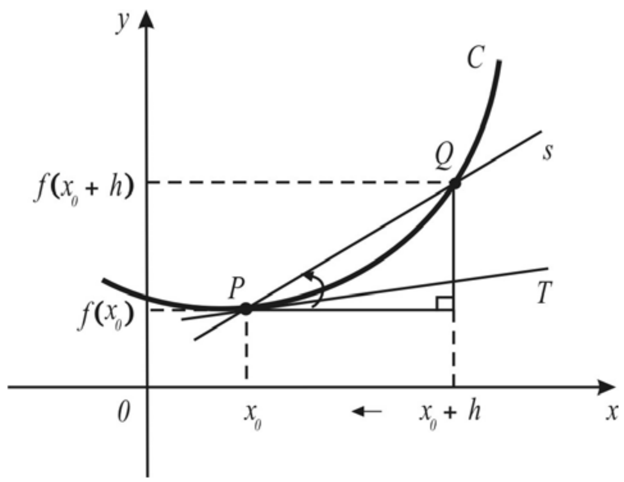

Figura 6.1: Reta tangente ao gráfico de C.

Seja $P = (x_0, y_0)$, com $y_0 = f(x_0)$, um ponto de C, onde desejamos traçar a reta tangente à C. Seja $Q = (x_0 + h, f(x_0 + h))$, com $h \neq 0$, qualquer outro ponto de C. Então, a inclinação da reta secante PQ (confira Figura 6.1), é dada por

$$\tan\theta = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Note que, quando h se aproxima de 0 temos que $\tan\theta$ se aproxima de um número m. Neste caso, definimos a *reta tangente* à curva C, como sendo aquela que passa por P e cuja inclinação é m, isto é,

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

onde

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Observação 6.1 *Se m aproxima-se de $+\infty$ ou $-\infty$ quando h se aproxima de* 0 *e f é contínua em x_0, então definimos a* reta tangente *à curva C no ponto $P = (x_0, f(x_0))$, como sendo a reta vertical $x = x_0$.*

A *reta normal* à curva C que passa pelo ponto P é a reta que passa por P e é perpendicular a reta tangente à curva C em P, isto é,

$$y - y_0 = m'(x - x_0),$$

onde $m \cdot m' = -1$.

Exemplo 6.2 *Determinar as retas tangente e normal à curva*

$$y = x^2, \ \ em \ P = (2, 4).$$

Solução. Sabemos que a reta tangente à curva, dada pela equação $y = x^2$ em $P = (2,4)$, é por definição

$$y - 4 = m(x - 2),$$

onde

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{(2+h)^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{4 + 4h + h^2 - 4}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} (4 + h) = 4. \end{aligned}$$

Portanto,

$$y - 4 = 4(x - 2) \text{ ou } y = 4x - 4.$$

A reta normal é dada por

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2) \text{ ou } y = -\frac{1}{4}x + \frac{9}{2}.$$

Exemplo 6.3 *Determinar as retas tangente e normal à curva*

$$y = 1 + \sqrt[3]{x - 2}, \text{ em } P = (2,1).$$

Solução. Sabemos que a reta tangente à curva, dada pela equação $y = 1 + \sqrt[3]{x-2}$ em $P = (2,1)$, é por definição

$$y - 1 = m(x - 2),$$

onde

$$\begin{aligned} m &= \lim_{h\to 0} \frac{f(2+h) - f(2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1 + \sqrt[3]{h} - 1}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty. \end{aligned}$$

Neste caso, $x = 2$ é a reta tangente à curva e a reta normal é dada por $y = 1$.

Segundo - Vamos considerar o problema que consiste em determinar a velocidade de um móvel que se move em uma trajetória qualquer segundo Newton (matemático inglês Isaac Newton, 1642-1727).

Seja $s = s(t)$ o espaço percorrido por um móvel até o instante t. Então

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

é o espaço percorrido desde o instante t a $t+\Delta t$, onde $\Delta t \neq 0$ (confira Figura 6.2).

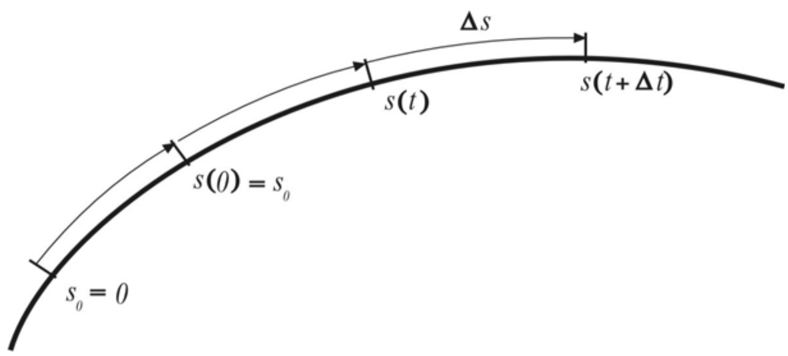

Figura 6.2: A trajetória de um móvel.

Portanto, a velocidade média v_m do móvel, neste intervalo de tempo que vai de t a $t+\Delta t$, é definida por

$$v_m = \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Dizemos que o movimento é *uniforme* quando $v_m = v$ é constante qualquer que seja o intervalo de tempo considerado. Neste caso, temos que

$$s(t) = s_0 + vt,$$

onde $s_0 = s(0)$. Assim, se o movimento não for uniforme, a velocidade média nada nos diz sobre a velocidade do móvel em um dado instante t. Por exemplo, consideremos um automóvel indo de João Pessoa para Campina Grande. Então em um instante t do intervalo de tempo t_0 a $t_0 + \Delta t_0$, o automóvel poderia registrar 80 km/h ou 30 km/h ou mesmo está parado para um lanche do motorista. Portanto, para termos informações mais precisa sobre o estado do movimento de um móvel em um instante próximo de um dado instante t, vamos definir a *velocidade instantânea* do móvel por

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t+\Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}.$$

Exemplo 6.4 *De um balão a* $150\,m$ *acima do solo, deixa-se cair um saco de areia. Desprezando-se a resistência do ar, a distância do solo ao saco de areia em queda, após* t *segundos, é dada por*

$$s(t) = -4,9t^2 + 150$$

Determinar a velocidade do saco de areia:

1. *Quando* $t = a$ *segundos;*

2. *Quando* $t = 2$ *segundos;*

3. No instante em que ele toca o solo.

Solução. 1. Note que no instante em que o saco é jogado, $t = 0$, e

$$s(0) = -4,9(0)^2 + 150 = 150\, m.$$

Sabemos que a velocidade instantânea do saco no instante $t = a$ é dada por

$$\begin{aligned} v(a) &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(a + \Delta t) - s(a)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-4,9(a + \Delta t)^2 + 150 - (-4,9a^2 + 150)}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{-9,8a\Delta t - 4,9\Delta t^2}{\Delta t} \\ &= \lim_{\Delta t \to 0} (-9,8a - 4,9\Delta t) = -9,8a\, m/s. \end{aligned}$$

2. Pelo item anterior $v(2) = -19,6\, m/s$. Finalmente, no instante em que ele toca ao solo devemos ter $s(t) = 0$, isto é,

$$-4,9t^2 + 150 = 0 \Leftrightarrow t^2 = \frac{150}{4,9} \Leftrightarrow t = 5,53\, s.$$

Nesse instante a velocidade de impacto é dada por

$$v(5,53) = (-9,8)(5,53) = -54,19\, m/s.$$

Terceiro - Vamos considerar o problema que consiste em determinar o custo marginal para descrever a variação de uma quantidade em relação a uma outra quantidade.

Seja $y = C(x)$ o custo total para produzir e negociar no mercado as primeiras x unidades. Então

$$\Delta y = C(x + \Delta x) - C(x)$$

é o acrescimo no custo total, onde $\Delta x \neq 0$ é o aumento na produção (confira Figura 6.3).

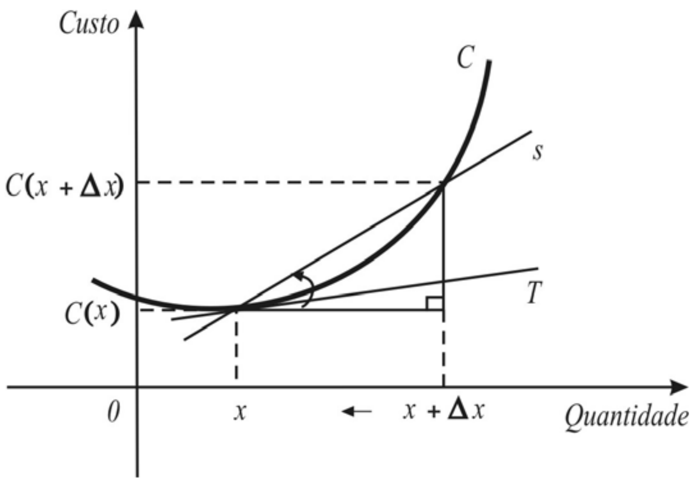

Figura 6.3: Gráfico da função custo total C.

Portanto, o *custo médio* C_m no custo total por unidade, que vai de x a $x+\Delta x$, é definido por

$$C_m = \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Vamos definir o *custo marginal* de produção por

$$C_M(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{C(x+\Delta x) - C(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Em Economia, x é muito grande e, assim, $\Delta x = 1$ é muito pequeno comparado com x, por essa razão, muitos economistas descrevem o custo marginal (real) como o custo de produzir uma unidade a mais, isto é,

$$C_M(x) \approx C(x+1) - C(x).$$

Exemplo 6.5 *Suponhamos que o custo total para produzir e negociar as primeiras x unidades é dado por*

$$y = \frac{1}{2}x^2 + 2x + 20.$$

1. *Deduza a fórmula para o custo marginal por unidades produzidas.*

2. *Qual é o custo marginal das primeiras* 50 *unidades produzidas?*

3. *Qual é o custo real de produção* $51.^a$ *unidade?*

Solução. 1. Como

$$\Delta y = C(x+\Delta x) - C(x) = (x + 2 + \frac{1}{2}\Delta x)\Delta x$$

temos que

$$C_m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = x + 2 + \frac{1}{2}\Delta x$$

e

$$\begin{aligned} C_M(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + 2 + \frac{1}{2}\Delta x)\Delta x}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (x + 2 + \frac{1}{2}\Delta x) \\ &= x + 2. \end{aligned}$$

2. Quando são produzidas 50 unidades, $x = 50$ e $C_M(x) = 52$ $\$/u$.
3. O custo real de produção da $51^{\underline{a}}$ unidade é

$$C_R(51) = C(50+1) - C(50) = \frac{2741}{2} - 1300 = \frac{141}{2}.$$

Portanto, $C_R(51) = \$70,50$.

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in X$. Dizemos que f é *derivável* em x_0 ou é *diferenciável* em x_0 se o limite

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

existir. Para indicar o limite acima, usaremos as notações

$$f'(x_0), f', \frac{df}{dx}, y', D_x f \text{ ou } \dot{y}.$$

Note que, fazendo $x = x_0 + h$ ou $h = x - x_0$, obtemos que

$$h \to 0 \Leftrightarrow x \to x_0.$$

Portanto,

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Observações 6.6 *1. A inclinação da reta tangente ao gráfico de $y = f(x)$ no ponto $P = (x_0, f(x_0))$ é $f'(x_0)$.*

2. A taxa (instantânea) de variação de $y = f(x)$ em relação a x em x_0 é $f'(x_0)$.

3. f é derivável no intervalo aberto $X =]a, b[$ se $f'(x)$ existir para todo $x \in X$.

4. f é derivável no intervalo fechado $X = [a, b]$ se f é derivável no intervalo aberto $]a, b[$ e, além disso, as derivadas laterais

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \text{ e } f'(b^-) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

existirem.

Exemplo 6.7 *Calcular a derivada de $y = \sqrt{x}$, para todo $x \in]0, +\infty[$.*

Solução. Pela definição, devemos calcular o seguinte limite

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x + h} - \sqrt{x}}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x + h} - \sqrt{x})(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})}{h(\sqrt{x + h} + \sqrt{x})} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{1}{\sqrt{x + h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{aligned}$$

Portanto,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \text{ e } \operatorname{Dom} f' =]0, +\infty[.$$

Note que f não é diferenciável no intervalo fechado $[0,+\infty[$, pois

$$\begin{aligned} f'(0^+) &= \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} \\ &= \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty. \end{aligned}$$

Neste caso a reta $x=0$ é tangente vertical ao gráfico de f.

Exemplo 6.8 *Calcular a derivada de $y=|x|$, em $x_0=0$.*

Solução. Pela definição devemos calcular o seguinte limite

$$\begin{aligned} f'(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x} \end{aligned}$$

Note que,

$$x \to 0^+ \Leftrightarrow x > 0 \Leftrightarrow |x| = x.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1.$$

E

$$x \to 0^- \Leftrightarrow x < 0 \Leftrightarrow |x| = -x.$$

Logo,

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$$

não existe. Assim, $f'(0)$ não existe e, neste caso, dizemos que $x_0=0$ é um *ponto anguloso* do gráfico de f e $\operatorname{Dom} f' = \mathbb{R} - \{0\}$.

Exemplo 6.9 *Determinar a reta tangente ao gráfico da curva*

$$y = -5x^2 + 8x + 2, \;\; \textit{em} \;\; P = (-1,-11)$$

e os pontos do gráfico em que a reta tangente é horizontal.

Solução. Sabemos que a equação da reta tangente ao gráfico da equação $f(x) = -5x^2 + 8x + 2$, em $P = (-1,-11)$, é dada por

$$y + 11 = f'(-1)(x+1).$$

Assim, basta calcular a derivada de f em $x_0 = -1$.

$$\begin{aligned} f'(-1) &= \lim_{x\to -1} \frac{f(x)-f(-1)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{-5x^2+8x+13}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} \frac{(x+1)(-5x+13)}{x+1} \\ &= \lim_{x\to -1} (-5x+13) = 18. \end{aligned}$$

Logo,

$$y + 11 = 18(x+1) \text{ ou } y = 18x + 7$$

é a equação da reta tangente ao gráfico da equação. Os pontos do gráfico em que a reta tangente é horizontal são aqueles em que a inclinação é igual a zero, isto é, $f'(x) = 0$. Assim, basta determinar o limite

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-5(x+h)^2+8(x+h)+2-(-5x^2+8x+2)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{-10hx-5h^2+8h}{h} \\ &= \lim_{h\to 0}(-10x+8-5h) = -10x+8 \end{aligned}$$

e fazer $-10x + 8 = 0$, isto é,

$$x = \frac{4}{5} \text{ e } y = -5(\frac{4}{5})^2 + 8\frac{4}{5} + 2 = \frac{26}{5}.$$

Portanto,

$$Q = (\frac{4}{5}, \frac{26}{5})$$

é o único ponto do gráfico em que a reta tangente é horizontal.

Observação 6.10 *Uma função f é derivável em x_0 se, e somente se, as derivadas laterais existem e são iguais em x_0.*

Pelos exemplos acima é fácil ver que, a derivada $f'(x)$ de $y = f(x)$ é também uma função de x. Assim, podemos considerar sua derivada, que é chamada de *derivada segunda* de f e é definida por

$$f''(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0}$$

desde que o limite exista. Usaremos também os símbolos

$$f'', \frac{d^2f}{dx^2}, y'', D_x^2 f \text{ ou } \ddot{y}$$

para indicá-la. De modo análogo, consideram-se derivadas terceira, quarta, etc.

Exemplo 6.11 *Calcular a derivada segunda de* $y = \sqrt{x}$*, para todo* $x \in \ ]0, +\infty[$.

Solução. Sabemos que

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \ \ \forall x \in \ ]0, +\infty[.$$

Assim, pela definição devemos calcular o seguinte limite

$$\begin{aligned} f''(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f'(x+h) - f'(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x+h}} - \frac{1}{2\sqrt{x}}}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\sqrt{x}-\sqrt{x+h}}{\sqrt{x}\sqrt{(x+h)}}}{h} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{x+h}}{h\sqrt{x(x+h)}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{(\sqrt{x} - \sqrt{x+h})(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})}{h(\sqrt{x} + \sqrt{x+h})\sqrt{x(x+h)}} \\ &= \frac{1}{2} \lim_{h \to 0} \frac{-1}{(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})\sqrt{x(x+h)}} \\ &= -\frac{1}{4x\sqrt{x}} = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$f''(x) = -\frac{1}{4\sqrt{x^3}} \ \text{ e } \ \operatorname{Dom} f'' = \ ]0, +\infty[.$$

Teorema 6.12 *Se* f *é derivável em* x_0*, então* f *é contínua em* x_0.

Prova. Suponhamos que f seja derivável em x_0. Então

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existe. Como $x - x_0 \neq 0$ temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \to x_0} [f(x) - f(x_0)] &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] \cdot (x - x_0) \\ &= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right] \cdot \lim_{x \to x_0} (x - x_0) \\ &= f'(x_0) \cdot 0 = 0, \end{aligned}$$

isto é, $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Portanto, f é contínua em x_0. ■

Observação 6.13 *A recíproca do teorema acima é falsa. Basta observar que a função* $f(x) = |x|$ *é contínua em* $x_0 = 0$*, mas não é derivável em* $x_0 = 0$.

EXERCÍCIOS

1. Determinar as retas tangente e normal à curva dada no ponto de abscissa dada. Esboce o gráfico em cada caso.

(a) $f(x) = x^2 - 2x + 1$, em $x_0 = 0$
(b) $f(x) = x^2 - x - 2$, em $x_0 = -1$
(c) $f(x) = x^3 - 4x$, em $x_0 = 2$
(d) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, em $x_0 = -8$
(e) $f(x) = \frac{1}{x^2}$, em $x_0 = 2$
(f) $f(x) = \frac{1}{x+1}$, em $x_0 = 0$
(g) $f(x) = x + \frac{1}{x}$, em $x_0 = \frac{1}{2}$
(h) $f(x) = \sqrt[5]{x+1} - 2$, em $x_0 = -1$.

2. Determinar as retas tangente e normal à curva, com a inclinação da reta tangente dada. Esboce o gráfico em cada caso.

(a) $f(x) = x^2$, com $m = -8$
(b) $f(x) = x^3$, com $m = 12$
(c) $f(x) = -\sqrt{x}$, com $m = -\frac{1}{2}$
(d) $f(x) = -\frac{x^2}{6}$, com $m = -\frac{9}{8}$.

3. Calcular as derivadas laterais das funções abaixo para provar que as funções são ou não deriváveis em x_0. Esboce o gráfico em cada caso.

(a) $f(x) = 2\,|x+2|$, em $x_0 = -2$;

(b) $f(x) = \begin{cases} -2x & \text{se } x \leq 1, \\ 3x - 5 & \text{se } x > 1, \end{cases}$ em $x_0 = 1$;

(c) $f(x) = \begin{cases} 3(x+1)^2 & \text{se } x \geq 0, \\ \frac{3(x-2)^2}{4} & \text{se } x < 0, \end{cases}$ em $x_0 = 0$;

(d) $f(x) = \sqrt{2 - x^3}$, em $x_0 = 1$;

(e) $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$, em $x_0 = 1$;

(f) $f(x) = \begin{cases} -x^3 + 1 & \text{se } x \geq 0, \\ x^2 + 1 & \text{se } x < 0, \end{cases}$ em $x_0 = 0$.

4. Calcular a derivada segunda das funções abaixo nos pontos indicados.

(a) $f(x) = -x^3 + 2x^2$, em $x_0 = -1$
(b) $f(x) = \sqrt{x+3}$, em $x_0 = 1$
(c) $f(x) = -\frac{x}{x+1}$, em $x_0 = 2$
(d) $f(x) = \frac{\sqrt{x-1}}{x+1}$, em $x_0 = 5$.

5. Determinar se as funções abaixo são deriváveis nos intervalos indicados.

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, em $[0, 2]$ e $[1, 3]$;

(b) $f(x) = \sqrt[3]{x}$, em $[-1, 1]$ e $[-2, -1]$;

(c) $f(x) = \sqrt{4 - x}$, em $[0, 4]$ e $[-5, 0]$;

(d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$, em $[-2, 2]$ e $[-1, 1]$.

6. Usando o gráfico de cada função f determinar o domínio de f'.

   $(a)\quad f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x>0,\\ 2x & \text{se } x\leq 0.\end{cases}$ $\qquad (c)\quad f(x)=\begin{cases} 2x+3 & \text{se } x\geq -1,\\ -x^2 & \text{se } x<-1.\end{cases}$

   $(b)\quad f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{se } x>1,\\ 2x-1 & \text{se } x\leq 1.\end{cases}$ $\qquad (d)\quad f(x)=\begin{cases} -3 & \text{se } x\geq 0,\\ x^2-2 & \text{se } x<0.\end{cases}$

7. Um projétil é lançado verticalmente do solo com uma velocidade inicial de $112\, m/s$. Após t segundos, sua distância do solo é de $s(t)=-4,9t^2+112t$ metros:

   (a) Determinar a velocidade do projétil quando $t=2$, 3 e 4.

   (b) Quando o projétil atinge o solo?

   (c) Determinar a velocidade no momento em que ele atinge o solo.

8. Um atleta percorre uma pista de $100\, m$ de modo que a distância $s(t)$ percorrida após t segundos é dada por $s(t)=\frac{t^2}{5}+8t$ metros. Determinar a velocidade do atleta.

   (a) No início da corrida.

   (b) Quando $t=5\, s$.

   (c) Na reta final.

9. Um balão esférico está sendo inflado. Determinar a taxa de variação da área S da superfície do balão em relação ao raio r.

   (a) Para r qualquer.

   (b) Para $r=1\, m$.

10. Dois carros partem de um mesmo ponto, um em direção a leste, com velocidade cosntante de $60\, km/h$, e o outro em direção norte, com velocidade cosntante de $80\, km/h$. Deduza uma expressão para a taxa de variação da distância entre os carros em relação ao tempo.

11. Suponhamos que o custo total para produzir e negociar as primeiras x unidades é dado por
$$y=x^3-30x^2+500x+200.$$

    (a) Deduza a fórmula para o custo marginal por unidades produzidas.

    (b) Qual é o custo marginal das primeiras 10 unidades produzidas?

    (c) Qual é o custo real de produção $10^{\underline{a}}$ unidade?

12. Suponhamos que o custo total para produzir e negociar as primeiras x unidades é dado por
$$y=3x^2+x+500.$$

(a) Deduza a fórmula para o custo marginal por unidades produzidas.

(b) Qual é o custo marginal das primeiras 41 unidades produzidas?

(c) Qual é o custo real de produção 41ª unidade?

13. Seja $f : \mathbb{R} - \{x_0\} \to \mathbb{R}$ uma função definida por

$$f(x) = \frac{g(x)}{x + x_0},$$

onde $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função com $g(x_0) = 2x_0$, $g'(x_0) = 1$ e $x_0 \neq 0$. Mostrar que $f'(x_0) = 0$.

14. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que $f(x + y) = f(x) + f(y)$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$. Mostrar que se $f(0) = 0$ e $f'(0) = x_0$, então f é derivável e $f'(x) = x_0$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6.2 Técnicas de Derivação

O processo de calculação de uma derivada por meio da definição pode ser tedioso se $f(x)$ é uma expressão complicada. Nesta seção, apresentaremos fórmulas e técnicas gerais que nos permitem determinar $f'(x)$ sem recorrer ao limite.

Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = mx + b$, isto é, f é uma função afim. Então $f'(x) = m$. De fato.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{m(x+h) + b - (mx+b)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{mh}{h} == \lim_{h \to 0} m = m. \end{aligned}$$

Em particular, quando f é a função constante, temos que $f'(x) = m = 0$.

Exemplo 6.14 *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = x^n$, para todo $n \in \mathbb{Z}$ e $x \neq 0$ quando $n \leq 0$. Então $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Solução. Vamos considerar primeiro o caso em que $n > 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema Binomial, obtemos

$$(x + h)^n = x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{[x^n + nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n] - x^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{nx^{n-1}h + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h^2 + \cdots + nxh^{n-1} + h^n}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}(nx^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2}x^{n-2}h + \cdots + nxh^{n-2} + h^{n-1})\\
&= nx^{n-1}.
\end{aligned}$$

Se $n < 0$, então $n = -k$ com $k > 0$. Assim,

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^{-k} - x^{-k}}{h}\\
&= \lim_{h\to 0}\frac{x^k - (x+h)^k}{hx^k(x+h)^k} = -\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^k - x^k}{h}\cdot\lim_{h\to 0}\frac{1}{x^k(x+h)^k}\\
&= -kx^{k-1}\cdot\frac{1}{x^{2k}},
\end{aligned}$$

isto é,

$$f'(x) = -kx^{-k-1} = nx^{n-1}.$$

Finalmente, se $n = 0$, então $f(x) = 1$ e $f'(x) = 0 = 0x^{0-1}$. Tente provar que, se

$$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}},$$

com $x > 0$ e $n \in \mathbb{Z}$, então

$$f'(x) = \frac{1}{n}x^{\frac{1}{n}-1}.$$

Mais geralmente, provaremos na próxima seção que se $f(x) = x^r$, com $x \neq 0$ e $r \in \mathbb{Q}$, então $f'(x) = rx^{r-1}$.

Exemplo 6.15 *Determinar as três primeiras derivadas de $f(x) = x^{\frac{1}{3}}$.*

Solução. Pelo exposto acima, temos que

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{3}x^{\frac{1}{3}-1} = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\\
f''(x) &= -\frac{2}{9}x^{-\frac{2}{3}-1} = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}}\\
f'''(x) &= \frac{10}{27}x^{-\frac{5}{3}-1} = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}}.
\end{aligned}$$

Teorema 6.16 *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto, $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções e $c \in \mathbb{R}$ uma constante. Se f e g são difereciáveis em X, então:*

1. $(cf)' = cf'$;

2. $(f+g)' = f' + g'$;

3. $(f-g)' = f' - g'$.

Prova. Vamos provar apenas o item *2*. Dado $x \in X$, temos que

$$\begin{aligned}(f+g)'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{(f+g)(x+h)-(f+g)(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)+g(x+h)-f(x)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)+g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\\ &= f'(x)+g'(x) = (f'+g')(x),\end{aligned}$$

isto é, $(f+g)' = f' + g'$. ■

Exemplo 6.17 *Calcular a derivada de*

$$f(x) = 2x^4 - 5x^3 + x^2 - 4x + 1.$$

Solução. Pelo Teorema acima, temos que

$$f'(x) = 8x^3 - 15x^2 + 2x - 4.$$

Exemplo 6.18 *Determinar todos os valores de x do gráfico da curva*

$$y = x^3 + 2x^2 - 4x + 5,$$

em que a reta tangente é

1. *horizontal*;

2. *paralela à reta $2y + 8x = 5$.*

Solução. Pelo Teorema acima, temos que

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 4x - 4.$$

1. A reta tangente é horizontal se

$$\frac{dy}{dx} = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2 \text{ ou } x = \frac{2}{3}.$$

Assim, a reta tangente é horizontal ao gráfico da curva quando $x = -2$ ou $x = \frac{2}{3}$.

2. A reta tangente é paralela à reta $2y + 8x = 5$ se

$$\frac{dy}{dx} = -4 \Leftrightarrow 3x^2 + 4x - 4 = -4 \Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} \text{ ou } x = 0.$$

Assim, a reta tangente ao gráfico da curva é paralela à reta $2y + 8x = 5$ quando $x = -\frac{4}{3}$ ou $x = 0$.

Sabemos que o limite do produto (quociente) é o produto (quociente) dos limites o mesmo não ocorre com a derivada, como mostra o teorema a seguir.

Teorema 6.19 *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f, g : X \to \mathbb{R}$ duas funções. Se f e g são difereciáveis em X, então:*

1. $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
2. $(\frac{f(x)}{g(x)})' = \frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g(x)^2}$, *quando* $g(x) \neq 0$. ■

Exemplo 6.20 *Calcular a derivada de*

$$f(x) = \sqrt{x}(x^2 + x - 4).$$

Solução. Pela Regra do Produto, temos que

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}(x^2 + x - 4) + \sqrt{x}(2x + 1).$$

Exemplo 6.21 *Calcular a derivada de*

$$f(x) = \frac{4x - 5}{2x + 3}.$$

Solução. Pela Regra do Quociente, temos que

$$f'(x) = \frac{4(2x + 3) - (4x - 5)2}{(2x + 3)^2} = \frac{8x + 12 - 8x + 10}{(2x + 3)^2} = \frac{22}{(2x + 3)^2}.$$

Exemplo 6.22 *Determinar todos os valores x do gráfico da curva*

$$f(x) = \sqrt[3]{x}(x^2 - 3x + 2),$$

em que a reta tangente é horizontal ou vertical.

Solução. Sabemos que

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}(x^2 - 3x + 2) + \sqrt[3]{x}(2x - 3) \\ &= \frac{(x^2 - 3x + 2) + 3x(2x - 3)}{3\sqrt[3]{x^2}} \\ &= \frac{7x^2 - 12x + 2}{3\sqrt[3]{x^2}}. \end{aligned}$$

A reta tangente é horizontal se

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 7x^2 - 12x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = 6 - \sqrt{22} \text{ ou } x = 6 + \sqrt{22}.$$

Assim, a reta tangente é horizontal ao gráfico f quando $x = 6 - \sqrt{22}$ ou $x = 6 + \sqrt{22}$. As possíveis retas verticais ao gráfico de f ocorre nos pontos onde o denominador da expressão que determina $f'(x)$ é zero, isto é, em $x = 0$. Como f é contínua em $x = 0$ e

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} \frac{7x^2 - 12x + 2}{3\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

temos que o gráfico de f tem uma tangente vertical em $x = 0$.

Observação 6.23 *A derivada de algumas funções especiais*:

1. $(e^x)' = e^x$;
2. $(\log x)' = \frac{1}{x}$;
3. $(\operatorname{sen} x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\operatorname{sen} x$.

EXERCÍCIOS

---

1. Calcular a derivada de cada função e simplificar.

(a) $f(x) = -5x^4 + 4x^2 - x + 15$	(e) $f(x) = \frac{4x+15}{x^2-2x+3}$
(b) $f(x) = (x^5 - 7)(2x^3 + x^2 + x - 5)$	(f) $f(x) = \tan x$
(c) $f(x) = (2x^2 - 4x + 1)(6x - 5)$	(g) $f(x) = \cot x$
(d) $f(x) = 1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}$	(h) $f(x) = \sec x$.

2. Resolver as equações $f'(x) = 0$ e $f''(x) = 0$ em cada caso.

(a) $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 36x + 4$	(d) $f(x) = 6x^5 - 5x^4 - 30x^3 + 11x$
(b) $f(x) = 4x^3 + 21x^2 - 24x + 11$	(e) $f(x) = \frac{2x^2+3x-6}{x-2}$
(c) $f(x) = 6x^4 + 24x^3 - 540x^2 + 7$	(f) $f(x) = \frac{x^2+2x+5}{x+1}$.

3. Determinar as retas tangente e normal ao gráfico de cada função no ponto indicado.

   (a) $f(x) = 3x^2 - 2\sqrt{x}$, em $P = (4, 44)$;

   (b) $f(x) = \frac{5}{x^2+1}$, em $P = (-2, 1)$;

   (c) $yx = 4$, em $P = (4, 1)$.

4. Determinar o ponto do gráfico de $y = x^3$ em que a reta tangente intercepta o eixo dos x no ponto 4.

5. Determinar os pontos do gráfico de $y = \sqrt{x^3} - \sqrt{x}$ em que a reta tangente é paralela à reta $y - x = 3$.

6. O raio r (em cm), de uma bola de futebol a ser inflada, após t segundos é dado por $r = 3\sqrt[3]{t}$ para $t \in [0, 10]$. Determinar a taxa de variação em relação a t quanto $t = 8\ s$:

   (a) Do raio r.

   (b) Do volume V.

   (c) Da área da superfície S.

6.3 Regra da Cadeia

As técnicas de derivação obtidas nas Seções anteriores não podem ser aplicadas diretamente a expressões como

$$\operatorname{sen}(2x) \text{ e } \sqrt[3]{x^2+2x+3}$$

Note que

$$(\operatorname{sen}(2x))' \neq \cos(2x),$$

pois $\operatorname{sen}(2x) = 2\operatorname{sen} x \cos x$ e pela Regra do Produto, obtemos

$$\begin{aligned} (\operatorname{sen}(2x))' &= 2[\cos x \cos x + \operatorname{sen} x(-\operatorname{sen})] \\ &= 2[\cos^2 x - \sin^2 x] = 2\cos(2x). \end{aligned}$$

Assim, se $f(x) = \operatorname{sen} x$ e $g(x) = 2x$, então a forma de determinar a derivada de $(f \circ g)(x) = \operatorname{sen}(2x)$ foi primeiro fazer a composição e manipulações para depois calcular a derivada. Para obter a derivada de $\operatorname{sen}(3x)$ as manipulações já são mais trabalhosas. Portanto, a chave para determinar a derivada de $f \circ g$ sem fazer a composição e manipulações é dada pelo seguinte teorema.

Teorema 6.24 (Regra da Cadeia) *Sejam $X, Y \subseteq \mathbb{R}$ intervalos abertos, $f : X \to \mathbb{R}$ e $g : Y \to \mathbb{R}$ duas funções diferenciáveis em X e Y, respectivamente, com $\operatorname{Im} f \subseteq Y$. Então $g \circ f$ é diferenciável em X e*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x))f'(x).$$

■

Note que se $y = g(u)$ e $u = f(x)$, então a fórmula acima torna-se

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}.$$

Exemplo 6.25 *Calcular a derivada de*

$$y = \sqrt[3]{x^2+2x+3}.$$

Solução. Note que, $y = u^{\frac{1}{3}}$, onde $u = x^2 + 2x + 3$. Logo, pela Regra da Cadeia, obtemos

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{3}u^{\frac{1}{3}-1} \cdot (2x+2) = \frac{2x+2}{3u^{\frac{2}{3}}} = \frac{2x+2}{3(x^2+2x+3)^{\frac{2}{3}}}.$$

Exemplo 6.26 *Calcular a derivada de*

$$y = x^2\left|x^2 - 4\right|.$$

Solução. Como $|x^2-4| = \sqrt{(x^2-4)^2}$ temos que

$$y = x^2\sqrt{(x^2-4)^2}.$$

Logo, pela Regra do Produto e da Cadeia, obtemos

$$\begin{aligned} y' &= 2x\sqrt{(x^2-4)^2} + x^2\frac{2(x^2-4)2x}{2\sqrt{(x^2-4)^2}} \\ &= 2x\left|x^2-4\right| + \frac{2x^3(x^2-4)}{|x^2-4|} \\ &= \frac{2x(x^2-4)(x^4-3x^2-4)}{|x^2-4|}. \end{aligned}$$

Exemplo 6.27 *Calcular a derivada de* $y = \tan(10x^2)$.

Solução. Pela Regra da Cadeia, obtemos

$$y' = \sec^2(10x^2)\cdot 20x.$$

Exemplo 6.28 *Calcular a derivada de* $y = x^r$, *onde* $r \in \mathbb{Q}$ *e* $x \neq 0$ *quando* $r \leq 0$.

Solução. Seja $r = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$ e $u = x^m$. Então, $y = u^{\frac{1}{n}}$ e pela Regra da Cadeia, obtemos

$$y' = \frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \frac{1}{n}u^{\frac{1}{n}-1}\cdot mx^{m-1} = \frac{m}{n}\cdot u^{\frac{1-n}{n}}x^{m-1} = \frac{m}{n}\cdot x^{m\frac{1-n}{n}+(m-1)} = rx^{r-1}.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Calcular a derivada de cada função.

(a) $f(x) = (x^2-3x+8)^3$	(e) $f(x) = \cos^7 kx, k \neq 0$
(b) $f(x) = \frac{x^4-3x^2+1}{(2x+3)^4}$	(f) $f(x) = \tan^3(x^2-3x+8)$
(c) $f(x) = (6x-7)^3(8x^2+9)^2$	(g) $f(x) = \cot^3(\sqrt[3]{8x^3+27})$
(d) $f(x) = \sqrt[3]{8x^3+27}$	(h) $f(x) = \tan^2 x\sec^3 x$.

2. Calcular a derivada de $y = x^r$, onde $r \in \mathbb{R}$ e $x > 0$. (Sugestão: Note que

$$x^r = e^{r\log x}$$

e use a Regra da Cadeia.)

3. Determinar as retas tangente e normal à curva no ponto indicado e a abscissa no gráfico em que a reta tangente é horizontal.

(a) $y = (4x^2 - 8x + 3)^4$, em $P = (2, 81)$;

(b) $y = (2x - 1)^{10}$, em $P = (1, 1)$;

(c) $y = (x + \frac{1}{x})^5$, em $P = (1, 32)$;

(d) $y = \sqrt{2x^2 + 1}$, em $P = (-1, \sqrt{3})$;

(e) $y = 3x + \operatorname{sen}(3x)$, em $P = (0, 0)$;

(f) $y = x + \cos(2x)$, em $P = (0, 1)$;

4. Se $h(x) = (f \circ g)(x)$, $f(2) = -4$, $g(2) = 2$, $f'(2) = 3$ e $g'(2) = 5$, determinar $h(2)$ e $h'(2)$.

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 6.1

1. (a) $y = -2x + 1$ e $y = \frac{1}{2}x + 1$; (b) $y = -3x - 3$ e $y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$; (c) $y = 8x - 16$ e $y = -\frac{1}{8}x + \frac{1}{4}$; (d) $y = \frac{1}{12}x - \frac{4}{3}$ e $y = -12x - 98$; (e) $y = -\frac{1}{4}x + \frac{3}{4}$ e $y = 4x + \frac{33}{4}$; (f) $y = -x + 1$ e $y = x + 1$; (g) $y = -3x + 4$ e $y = \frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$; (h) $x = -1$ e $y = -2$.

2. (a) $y = -8x - 16$ e $y = \frac{1}{8}x + \frac{65}{4}$ (b) $y = 12x - 16$ e $y = -\frac{1}{12}x + \frac{49}{6}$ ou $y = 12x + 16$ e $y = -\frac{1}{12}x - \frac{49}{6}$; (c) $y = -\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}$ e $y = 2x - 3$ (d) $y = -\frac{9}{8}x + \frac{18}{16}$ e $y = \frac{8}{9}x + \frac{37}{48}$ ou $y = -\frac{9}{8}x - \frac{18}{16}$ e $y = \frac{8}{9}x - \frac{37}{48}$.

3. (a) Como $f'(-2^+) = 2$ e $f'(-2^-) = -2$ temos que f não é derivável em $x_0 = -2$; (b) Como $f'(1^+) = 3$ e $f'(1^-) = -2$ temos que f não é derivável em $x_0 = 1$; (c) Como $f'(0^+) = 6$ e $f'(0^-) = -3$ temos que f não é derivável em $x_0 = 0$; (d) Como $f'(1^+) = -\frac{3}{2}$ e $f'(1^-) = -\frac{3}{2}$ temos que f é derivável em $x_0 = 1$; (e) Como $f'(1^+) = +\infty$ e $f'(1^-) = +\infty$ temos que f não é derivável em $x_0 = 1$; (f) Como $f'(0^+) = 0$ e $f'(0^-) = 0$ temos que f é derivável em $x_0 = 0$.

4. (a) $f''(-1) = 10$; (b) $f''(1) = -\frac{1}{32}$; (c) $f''(2) = -\frac{2}{9}$; (d) $f''(5) = \frac{17}{1728}$.

5. (a) Em $[0, 2]$ não, pois $f(0)$ não existe, em $[1, 3]$ sim; (b) Em $[-1, 1]$ não, pois $f'(0)$ não existe, em $[-2, -1]$ sim; (c) Em $[0, 4]$ não, pois $f'(4^-)$ não existe, em $[-5, 0]$ sim; (d) Em $[-2, 2]$ não, pois f não existe em $]-2, 2[$, em $[-1, 1]$ não.

7. (a) $92,4\,m/s$, $82,6\,m/s$ e $72,8\,m/s$; (b) $45,714\,s$; (c) $-336\,m/s$.

8. (a) $8\,m/s$; (b) $10\,m/s$; (b) $12\,m/s$.

9. Como $S(r) = 4\pi r^2$ temos que a taxa de variação é $S'(r) = 8\pi r$; (b) $S'(r) = 8\pi\ m/s$.

10. Como $d = 100t$ temos que taxa de variação é igual a $100\ km/h$.

11. (a) $3x^2 - 60x + 500$; (b) $\$200,00$; (c) $\$201,00$.

12. (a) $6x + 1$; (b) $\$241,00$; (c) $\$244,00$.

13. Basta notar que

$$\begin{aligned}
f'(x_0) &= \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x\to x_0} \frac{\frac{g(x)}{x+x_0} - \frac{g(x_0)}{2x_0}}{x - x_0} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - (x + x_0)}{(x - x_0)(x + x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0) - (x - x_0)}{(x - x_0)(x + x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0) - (x - x_0)}{(x - x_0)(x + x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0) - (x - x_0)}{(x - x_0)(x + x_0)} \\
&= \lim_{x\to x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{(x - x_0)(x + x_0)} - \lim_{x\to x_0} \frac{(x - x_0)}{(x - x_0)(x + x_0)} \\
&= g'(x_0)\frac{1}{2x_0} - \frac{1}{2x_0} = 0.
\end{aligned}$$

14. Basta notar que, para cada $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0 + h) - f(0)}{h} = f'(0) = x_0.$$

Seção 6.2

1. (a) $-20x^3 + 8x - 1$; (b) $16x^7 + 7x^6 + 6x^5 - 25x^4 - 42x^2 - 14x - 7$; (c) $36x^2 - 68x + 26$; (d) $-\frac{x^2+2x+3}{x^4}$; (e) $-2\frac{2x^2+15x-21}{(x^2-2x+3)^2}$; (f) $\sec^2 x$; (g) $-\cos\sec^2 x$; (h) $\sec x \tan x$; (i) $-\cos\sec x \cot x$.

2. (a) -2, 3 e $\frac{1}{2}$; (b) -4, $\frac{1}{2}$ e $-\frac{7}{4}$; (c) 0, $-\frac{3}{2} + \frac{3}{2}\sqrt{21}$, $-\frac{3}{2} - \frac{3}{2}\sqrt{21}$ e $-5, 3$; (d) -2, 2 e 0; (e) 0, 4 e não existe solução; (f) -3, 1 e não existe solução.

3. (a) $y = \frac{47}{2}x - 50$ e $y = -\frac{2}{47}x + \frac{2076}{47}$; (b) $y = \frac{4}{5}x + \frac{13}{5}$ e $y = -\frac{5}{4}x - \frac{3}{2}$; (c) $y = -\frac{1}{4}x + 2$ e $y = 4x - 15$.

4. $P = (-\frac{2}{3}\sqrt{3}, -\frac{8}{9}\sqrt{3})$ e $Q = (\frac{2}{3}\sqrt{3}, \frac{8}{9}\sqrt{3})$.

5. $P = (\frac{1}{9}, -\frac{8}{27})$ e $Q = (1, 0)$.

6. (a) $\frac{1}{4}$ cm $/s$; (b) 36π cm^3 $/s$; (c) 12π cm^2 $/s$.

Seção 6.3

1. (a) $3\left(x^2-3x+8\right)^2(2x-3)$; (b) $2\frac{6x^3+6x^2-9x-4}{(2x+3)^5}$;

(c) $18\left(6x-7\right)^2\left(8x^2+9\right)^2+32\left(6x-7\right)^3\left(8x^2+9\right)x$; (d) $8\frac{\sqrt[3]{8x^3+27}}{8x^3+27}x^2$;
(e) $-7\left(\cos^6(kx)\operatorname{sen}(kx)\right)(k)$;
(f) $3\left(\tan^2\left(x^2-3x+8\right)\right)\left(1+\tan^2\left(x^2-3x+8\right)\right)(2x-3)$;
(g) $24\left(\cot^2\sqrt[3]{8x^3+27}\right)\left(-1-\cot^2\sqrt[3]{8x^3+27}\right)\frac{\sqrt[3]{8x^3+27}}{8x^3+27}x^2$;
(h) $2\left(\tan x\sec^3 x\right)\left(1+\tan^2 x\right)+3\tan^3 x\sec^3 x$;
(i) $\frac{1}{2}\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}+\frac{1}{2\operatorname{sen}^{\frac{1}{2}}x}\cos x$.

2. $y'=rx^{r-1}$.

3. (a) $y=864x-1647$ e $y=-\frac{1}{864}x+\frac{34\,991}{432}$; $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{2}$ e 1; (b) $y=20x-19$ e $y=-\frac{1}{20}x+\frac{21}{20}$; $\frac{1}{2}$; (c) $y=32$ e $x=1$; -1 e 1; (d) $y=-\frac{2}{3}\sqrt{3}x+\frac{1}{3}\sqrt{3}$ e $y=\frac{1}{2}\sqrt{3}x+\frac{3}{2}\sqrt{3}$; 0; (e) $y=6x$ e $y=-\frac{1}{6}x$; $\frac{1+2k}{3}\pi$, para todo $k\in\mathbb{Z}$; (f) $y=x+1$ e $y=-x+1$ e $\frac{1+12k}{12}\pi$, para todo $k\in\mathbb{Z}$.

4. $h(2)=-4$ e $h'(2)=15$.

Capítulo 7

Comportamento de Funções

Neste capítulo usaremos os conhecimentos de derivada dada no capítulo anterior para estudar o comportamento do gráfico de uma função. O leitor interessado em mais detalhes pode consultar [3].

7.1 Máximos e Mínimos

Sejam X um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Um ponto $c \in X$ é um ponto de *máximo local* de f, se existir um intervalo aberto $]a, b[$ contendo c tal que:

$$f(x) \leq f(c)\,, \ \ \forall x \in \ ]a, b[.$$

Neste caso, dizemos que $f(c)$ é o *valor máximo* de f em $]a, b[$. Um ponto $d \in X$ é um ponto de *mínimo local* de f, se existir um intervalo aberto $]a, b[$ contendo d tal que:

$$f(d) \leq f(x)\,, \ \ \forall x \in \ ]a, b[.$$

Neste caso, dizemos que $f(d)$ é o *valor mínimo* de f em $]a, b[$.

Se $f(x) \leq f(c)$, para todo $x \in X$, dizemos que c é um ponto de *máximo absoluto* de f. Se $f(d) \leq f(x)$, para todo $x \in X$, dizemos que c é um ponto de *mínimo absoluto* de f.

Exemplo 7.1 *Determinar o máximo e o mínimo, se existirem, da função* $f(x) = 4 - x^2$ *em cada intervalo*:

1. $X = [-2, 1]$.

2. $X = \ ] - 2, 1[$.

3. $X = [1, 2]$.

4. $X = \ ]1, 2[$.

Solução. Primeiro vamos construir o gráfico da função (confira Figura 7.1).

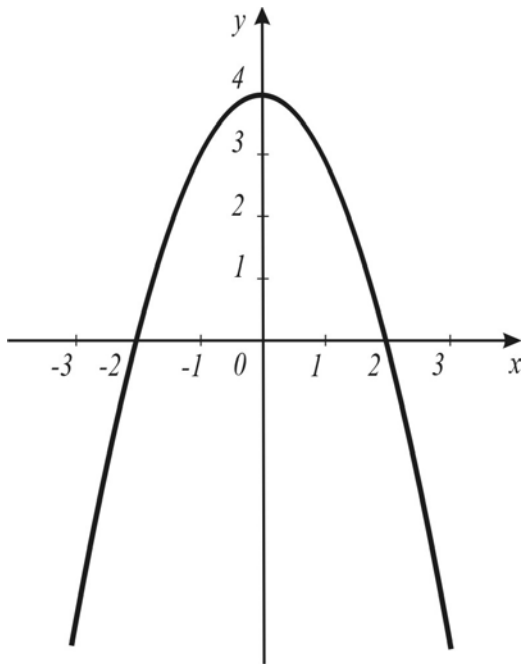

Figura 7.1: Gráfico da função $f(x) = 4 - x^2$.

1. Pelo gráfico da função, temos que $c = 0$ é um ponto de máximo e $f(0) = 4$ é o valor máximo. Por outro lado, $c = -2$ é um ponto de mínimo e $f(-2) = 0$ é o valor mínimo.

2. Neste caso, esta função não tem mínimo, isto é, não existe $c \in\ ]-2, 1[$ tal que $f(c) \leq f(x)$, para todo $x \in\ ]-2, 1[$. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista um tal c de modo que

$$f(c) \leq f(x), \quad \forall x \in\ ]-2, 1[.$$

Tomando um $d \in\ ]-2, c[$, temos que $f(d) < f(c)$, o que é uma contradição.

3. Pelo gráfico da função, temos que $c = 1$ é um ponto de máximo e $f(1) = 3$ é o valor máximo. Por outro lado, $c = 2$ é um ponto de mínimo e $f(2) = 0$ é o valor mínimo.

4. Neste caso a função não possui nem ponto de máximo e nem de mínimo. (Prove isto!)

Teorema 7.2 (Weierstrass) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Se f é contínua, então f tem pelo menos um ponto de máximo e pelo menos um ponto de mínimo em $[a, b]$.* ■

Teorema 7.3 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $c \in\ ]a, b[$ é um ponto de máximo ou mínimo de f, então $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Prova. Suponhamos que $f'(c)$ exista e $f(x) \leq f(c)$, para todo $x \in [a, b]$. Então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c).$$

Assim,

$$f'(c) = f'(c^+) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$$

e

$$f'(c) = f'(c^-) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0,$$

isto é, $0 \leq f'(c) \leq 0$. Portanto, $f'(c) = 0$. ■

Exemplo 7.4 *Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3$. Então $f'(x) = 3x^2$. Assim, em $c = 0$, temos que $f'(0) = 0$. No entanto, 0 não é ponto de máximo e nem de mínimo de f. Portanto, a recíproca do Teorema acima é falsa.*

Definição 7.5 *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que ponto $c \in X$ é um* ponto crítico *de f se $f'(c) = 0$ ou $f'(c)$ não existe.*

Exemplo 7.6 *Determinar os pontos críticos da função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 - 3x + 1$.*

Solução. Para obtermos os pontos críticos de f devemos resolver a equação $f'(x) = 0$. Logo,

$$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x = \pm 1.$$

Portanto, $x = -1$ e $x = 1$ são os pontos críticos de f com $f(-1) = 3$ e $f(1) = -1$.

Teorema 7.7 (Teorema de Rolle) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que f contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $c \in\ ]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Prova. Primeiro interpretaremos o resultado geometricamente (confira Figura 7.2).

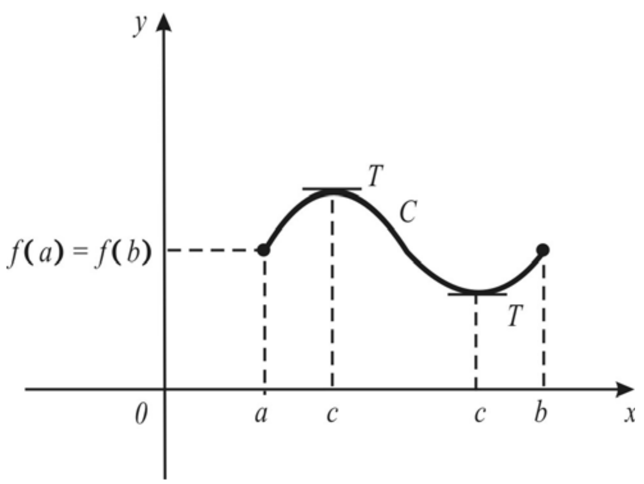

Figura 7.2: Representação geométrica do Teorema de Rolle.

Se $f(x) = f(a)$, para todo $x \in [a, b]$, então f é constante. Portanto, $f'(x) = 0$, para todo $x \in \ ]a, b[$ e o teorema vale.

Suponhamos que $f(x) \neq f(a)$, para algum $x \in \ [a, b]$, digamos $f(a) < f(x)$. Então, pelo Toerema 7.2, o ponto de máximo (ou mínimo) c de f ocorre em $]a, b[$. Portanto, $f'(c) = 0$. ■

Exemplo 7.8 *Seja $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Então é fácil verificar que f é contínua e $f(-1) = 1 = f(1)$. Como*

$$f'(x) = \frac{2}{3}\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$$

temos que $f'(0)$ não existe. Entretanto, isto não contradiz o Teorema de Rolle, pois f não é derivável em $]-1, 1[$.

Teorema 7.9 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que f contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então existe pelo menos um ponto $c \in \ ]a, b[$ tal que:*

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Prova. A equação da reta secante ao gráfico de f que passa pelos pontos $P = (a, f(a))$ e $Q = (b, f(b))$ é dada por:

$$y - f(a) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a),$$

ou ainda,

$$y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a).$$

Vamos definir $g(x)$ por:

$$\begin{aligned} g(x) &= f(x) - y \\ &= f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a) \end{aligned}$$

É claro que g é definida e contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Como $g(a) = g(b) = 0$ temos, pelo Teorema de Rolle, que existe pelo menos um $c \in \ ]a, b[$ tal que $g'(c) = 0$. Sendo

$$g'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

obtemos

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

■

Observação 7.10 *Uma interpretação geométrica do Teorema do Valor Médio é: existe pelo menos um ponto $P = (c, f(c))$, com $c \in \ ]a, b[$, tal que a reta tangente ao gráfico de f em P seja paralela à reta secante que passa por $A = (a, f(a))$ e $B = (b, f(b))$.*

Exemplo 7.11 *Seja $f : [-1, 2] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = x^3 + 2x$. Determinar o número c do Teorema do Valor Médio.*

Solução. Como $f(-1) = -3$, $f(2) = 12$ e $f'(x) = 3x^2 + 2$ temos que

$$\begin{aligned} 3c^2 + 2 &= \frac{f(2) - f(-1)}{2 - (-1)} \\ &= \frac{12 - (-3)}{3} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Logo,

$$3c^2 + 2 = 5$$

cuja solução é $c = \pm 1$. Note que, $-1 \notin]-1, 2[$. Portanto, $c = 1$ é o único ponto em $]-1, 2[$ que satisfaz o Teorema do.Valor.Médio.

EXERCÍCIOS

---

1. Determinar os pontos de máximo e mínimo de cada função no intervalo indicado.
   - (a) $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 5, I = [-3, 1]$
   - (b) $f(x) = 3x^2 - 10x + 7, I = [-1, 3]$
   - (c) $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}, I = [-1, 8]$
   - (d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4, I = [0, 2]$.

2. Determinar os pontos críticos de cada função.
   - (a) $f(x) = -2x^3 - 6x^2 + 5$
   - (b) $f(x) = 3x^2 - 10x + 7$
   - (c) $f(x) = 1 - x^{\frac{2}{3}}$
   - (d) $f(x) = x^4 - 5x^2 + 4$
   - (e) $f(x) = \sqrt{x^2 - 16}$
   - (f) $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - x - 2}$
   - (g) $f(x) = \frac{2x-3}{x^2-9}$
   - (h) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$
   - (i) $f(x) = \operatorname{sen}^2 x - \cos x$
   - (j) $f(x) = 6x - 3 \operatorname{sen} 2x + 8 \cos^3 x$
   - (k) $f(x) = x - \tan x$
   - (l) $f(x) = x - \cot x$.

3. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 1 + x^3$. Mostrar que:
   (a) f não possui nem pontos de máximo, nem pontos de mínimo local.
   (b) f é contínua em $]0, 1[$ mas não tem máximo e nem mínimo aí. Explique por que isto não contradiz o Teorema de Weierstrass.

4. Sejam I um intervalo de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função. Mostrar que f satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle em I e determinar todos os c no interior de I tais que $f'(c) = 0$.
   - (a) $f(x) = 3x^2 - 12x + 11, I = [0, 4]$
   - (b) $f(x) = -2x^2 - 12x + 5, I = [-7, 1]$
   - (c) $f(x) = x^4 + 4x^2 + 1, I = [-3, 3]$
   - (d) $f(x) = \operatorname{sen} 2x, I = [0, \pi]$
   - (e) $f(x) = \cos 2x + 2 \cos x, I = [0, 2\pi]$
   - (f) $f(x) = \operatorname{sen} x - \cos x, I = [0, \frac{3\pi}{2}]$.

5. Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função. Determinar se f satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio em $I = [a, b]$, em caso afirmativo, determinar todos os $c \in \ ]a, b[$ tais que
$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

(a) $f(x) = 5x^2 - 3x + 1, I = [1, 3]$	(d) $f(x) = 3x^5 + 5x^3 + 15x, I = [-1, 1]$
(b) $f(x) = 3x^2 + x - 4, I = [1, 5]$	(e) $f(x) = \operatorname{sen} x, I = [0, \frac{\pi}{2}]$
(c) $f(x) = x^{\frac{2}{3}}, I = [-8, 8]$	(f) $f(x) = \tan x, I = [0, \frac{\pi}{4}]$.

6. Seja $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = 5 + 3(x - 1)^{\frac{2}{3}}$. Mostrar que $f(0) = f(2)$ e $f'(c) \neq 0$ para todo $c \in \ ]0, 2[$. Explique por que isto não contradiz o Teorema de Rolle.

7. Seja $f : [1, 4] \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = |x - 2|$. Mostrar que não existe $c \in \ ]1, 4[$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(4) - f(1)}{4 - 1}.$$
Explique por que isto não contradiz o Teorema do Valor Médio.

8. Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = x^3 + qx^2 + px + r$ e $I = [a, b]$. Mostrar que no máximo dois números em $]a, b[$ satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Médio.

9. Mostrar que
$$|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|\,, \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

7.2 Regiões de Crescimento e Decrescimento

Nesta seção estudaremos as regiões de crescimento e decrescimento de uma função, as quais são imprescindíveis no esboço do gráfico de uma função.

Teorema 7.12 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que f contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então:*

1. *Se $f'(x) = 0$, para todo $x \in \ ]a, b[$, então f é constante em todo $[a, b]$.*

2. *Se $f'(x) > 0$, para todo $x \in \ ]a, b[$, então f é crescente em todo $[a, b]$.*

3. *Se $f'(x) < 0$, para todo $x \in \ ]a, b[$, então f é decrescente em todo $[a, b]$.*

Prova. Vamos provar apenas o item 2. Dados $x_1, x_2 \in [a, b]$. Se $x_1 < x_2$, então devemos provar que $f(x_1) < f(x_2)$. De fato, aplicando o Teorema do.Valor.Médio em $[x_1, x_2] \subseteq [a, b]$, existe $c \in \ ]x_1, x_2[$ tal que
$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \Rightarrow f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1).$$

Como $f'(c) > 0$ e $x_2 - x_1 > 0$ temos que $f(x_2) - f(x_1) > 0$, ou seja, $f(x_1) < f(x_2)$. Portanto, f é crescente em $[a, b]$. ■

Exemplo 7.13 *Seja $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$. Determinar as regiões de crescimento e decrescimento de f.*

Solução. 1.º **Passo**. Determinar o domínio de f. Neste caso, $D(f) = \mathbb{R}$.
2.º **Passo**. Determinar os pontos críticos de f, isto é, resolver a equação $f'(x) = 0$. Neste caso,

$$3x^2 + 2x - 5 = 0.$$

Logo, $x = -\frac{5}{3}$ e $x = 1$ são os pontos críticos de f;
3.º **Passo**. Determinar as regiões de crescimento e decrescimento de f.
Como $-2 \in \,]-\infty, -\frac{5}{3}]$ e $f'(-2) = 3 > 0$ temos que f é crescente em $]-\infty, -\frac{5}{3}]$;
Como $0 \in \,]-\frac{5}{3}, 1[$ e $f'(0) = -5 < 0$ temos que f é decrescente em $\left[-\frac{5}{3}, 1\right]$;
Como $2 \in \,]1, +\infty[$ e $f'(2) = 11 > 0$ temos que f é crescente em $[1, +\infty[$.
Portanto, f é crescente em $]-\infty, -\frac{5}{3}]$ e $[1, +\infty[$ e decrescente em $\left[-\frac{5}{3}, 1\right]$ (confira Figura 7.3).

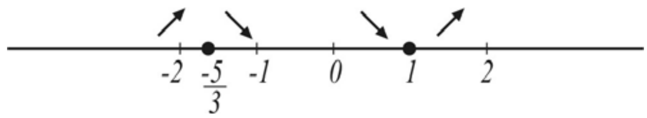

Figura 7.3: Regiões de crescimento e decrescimento de f.

Teorema 7.14 (Teorema do Valor Intermediário) *Sejam $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $\alpha = f(a)$, $\beta = f(b)$. Se $\gamma \in [\alpha, \beta]$, então existe $c \in [a, b]$ tal que $\gamma = f(c)$.* ■

Observação 7.15 *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que f' contínua em $]a, b[$. Se existir $c \in \,]a, b[$ tal que $f'(c) > 0$ ($f'(c) < 0$) e $f'(x) \neq 0$, para todo $x \in \,]a, b[$, então f é crescente (decrescente) em todo $[a, b]$. De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $d \in \,]a, b[$ tal que $d \neq c$ e $f'(d) < 0$. Então, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe $e \in [c, d]$ tal que $0 = f'(e)$, o que é uma contradição.*

Exemplo 7.16 *Mostrar que $e^x \geq x + 1$, para todo $x \in [0, +\infty[$.*

Solução. Vamos considerar a função $f : [0, +\infty[\,\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^x - (x + 1)$. A equação

$$f'(x) = e^x - 1 = 0$$

tem uma única solução $x = 0$. Assim, $x = 0$ é o único ponto crítico de f. Logo, $f'(x) > 0$, para todo $x \in \,]0, +\infty[$, isto é, f é crescente em $[0, +\infty[$. Portanto, $f(x) \geq f(0)$, para todo $x \in [0, +\infty[$. Assim,

$$e^x - (x + 1) \geq 0 \Rightarrow e^x \geq x + 1,$$

ocorrendo a igualdade apenas se $x = 0$.

Exemplo 7.17 *Sejam* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}_+$. *Mostrar que*

$$\sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n} \leq \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}.$$

Solução. Sejam

$$A = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \text{ e } G = \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n}.$$

Como $\frac{x_i}{A} - 1 \geq 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$, temos, pelo Exemplo anterior, que

$$e^{\frac{x_i}{A} - 1} \geq \frac{x_i}{A}, \ \ \forall i = 1, 2, \ldots, n.$$

Multiplicando membro a membro, obtemos

$$e^{\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{A} - n} \geq \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{A^n}.$$

Sendo $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = nA$, obtemos

$$1 \geq \frac{G^n}{A^n} \text{ ou } G \leq A.$$

Note que a igualdade vale se, e somente se, $\frac{x_i}{A} - 1 = 0$, para cada $i = 1, 2, \ldots, n$. Além disso:

1. Se $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = C$, com C constante, então $P = x_1 x_2 \cdots x_n$ será máximo quando
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

2. Se $x_1 x_2 \cdots x_n = C$, com C constante, então $S = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ será mínima quando
$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n.$$

Exemplo 7.18 *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *duas funções tais que* f *e* g *sejam contínuas em* $[a, b]$ *e deriváveis em* $]a, b[$. *Se* $f(a) \leq g(a)$ *e* $f'(x) \leq g'(x)$, *para todo* $x \in \ ]a, b[$, *então* $f(x) \leq g(x)$, *para todo* $x \in [a, b]$.

Solução. Vamos considerar a função $h : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $h(x) = g(x) - f(x)$. Logo, $h(a) \geq 0$ Como

$$h'(x) = g'(x) - f'(x) \geq 0, \ \ \forall x \in \ ]a, b[,$$

temos que h é crescente ou constante em $]a, b[$. Portanto, $h(x) \geq h(a)$, para todo $x \in \ ]a, b[$. Assim,

$$g(x) - f(x) \geq g(a) - f(a) \geq 0 \Rightarrow g(x) \geq f(x).$$

EXERCÍCIOS

---

1. Determinar as regiões de crescimento e decrescimento de cada função.

(a)	$f(x) = x^2 - x + 5$	(d)	$f(x) = x^3 + x - 2$
(b)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	(e)	$f(x) = -x^3 + 2x + 1$
(c)	$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$	(f)	$f(x) = 2x^3 + 5.$

2. Mostrar que $x^n - 1 \geq n(x-1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [1, +\infty[$.

3. Mostrar que $x \leq \tan x$, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4. Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções tais que $f'(x) = g'(x)$, para todo $x \in]a, b[$. Mostrar que existe uma constante C tal que $f = g + C$.

5. Determinar todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que $f'(x) = f(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. Seja $a \in \mathbb{R}_+$. Mostrar que existe $b \in \mathbb{R}$ tal que $a = b^2$. Generalize para todo $n \in \mathbb{N}$.

7. Seja $f(x) = x^3 + qx^2 + px + r$ um polinômio. Use o Teorema de Rolle para mostrar que f tem no máximo três raízes reais.

8. Seja $f(x) = 3x^5 + 15x - 8$ um polinômio. Use o Teorema de Rolle para mostrar que f tem uma única raiz real.

9. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial de grau ímpar. Mostrar que f possui pelo menos uma raiz real.

7.3 O Teste da Derivada Primeira

Nesta seção apresentaremos o teste da derivada primeira, o qual é uma condição necessária e suficiente para classificar os pontos de máximo e mínimo locais de uma função.

Teorema 7.19 (Teste da Derivada Primeira) *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$, $f : X \to \mathbb{R}$ uma função e $c \in X$ um ponto crítico de f. Suponhamos que f seja contínua e derivável em um intervalo aberto $I \subseteq X$ contendo c, exceto possivelmente no ponto c. Então:*

1. *Se o sinal de f' passa de positivo para negativo em c, então c é um ponto de máximo local de f.*

2. *Se o sinal de f' passa de negativo para positivo em c, então c é um ponto de mínimo local de f.*

3. Se $f'(x) > 0$ ou $f'(x) < 0$, para todo $x \in X$, com $x \neq c$, então c não é ponto de máximo nem de mínimo local de f.

Prova. Vamos provar apenas o item 1. Suponhamos que exista um intervalo aberto $]a, b[\subseteq X$ contendo c tal que

$$f'(x) > 0, \ \ \forall x \in \ ]a, c[\ \text{ e } \ f'(x) < 0, \ \ \forall x \in \ ]a, b[.$$

Assim, f é crescente em $[a, c]$ e f é decrescente em $[c, b]$. Logo,

$$f(x) \leq f(c), \ \ \forall x \in [a, b] \, .$$

Portanto, c é um ponto de máximo local de f. ■

Exemplo 7.20 *Determinar os pontos de máximo e mínimo locais de $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.*

Solução. 1.^{o} **Passo**. Determinar o domínio de f. Neste caso, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.
2.^{o} **Passo**. Determinar os pontos críticos de f, isto é, resolver a equação $f'(x) = 0$. Neste caso,

$$3x^2 + 2x - 5 = 0.$$

Logo, $x = -\frac{5}{3}$ e $x = 1$ são os pontos críticos de f.
3.^{o} **Passo**. Determinar as regiões de crescimento e decrescimento de f.
Como $-2 \in \ ]-\infty, -\frac{5}{3}]$ e $f'(-2) = 3 > 0$ temos que f é crescente em $]-\infty, -\frac{5}{3}]$.
Como $0 \in \ ]-\frac{5}{3}, 1[$ e $f'(0) = -5 < 0$ temos que f é decrescente em $\left[-\frac{5}{3}, 1\right]$.
Como $2 \in \ ]1, +\infty[$ e $f'(2) = 11 > 0$ temos que f é crescente em $[1, +\infty[$.
4.^{o} **Passo**. Estudar o sinal de f'. Como f' passa de positivo para negativo em $-\frac{5}{3}$ temos que $-\frac{5}{3}$ é um ponto de máximo local de f e valor máximo $f(-\frac{5}{3}) = \frac{40}{27}$. Como f' passa de negativo para positivo em 1 temos que 1 é um ponto de mínimo local de f e valor mínimo $f(1) = -8$ (confira Figura 7.4).

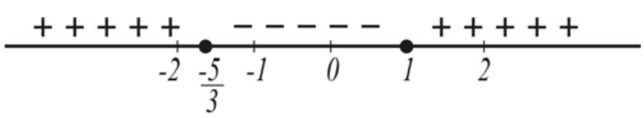

Figura 7.4: Sinal de f'.

EXERCÍCIOS

1. Determinar os pontos de máximos e mínimos locais de cada função.

(a)	$f(x) = x^2 - x + 5$	(g)	$f(x) = -x^3 + 2x + 1$
(b)	$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$	(h)	$f(x) = 2x^3 + 5$
(c)	$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$	(i)	$f(x) = \frac{x}{2} - \operatorname{sen} x$
(d)	$f(x) = \operatorname{sen}(2x),\ \ \forall x \in [0, 2\pi]$	(j)	$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - 9x}$
(e)	$f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$	(k)	$f(x) = \cot^2 x + 2\cot x,\ \ \forall x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$
(f)	$f(x) = x^3 + x - 2$	(l)	$f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x.$

2. Determinar os comprimentos dos lados do retângulo de maior área que pode ser inscrito em um semicírculo, estando a base inferior sobre o diâmetro.

3. Uma carreta deve ser conduzida por 300 km com velocidade constante x km/h. As leis de trânsito exigem que $30 \leq x \leq 60$. Admita que o óleo diesel custe 30 centavos por litro e seja consumido à razão de
$$2 + \frac{x^2}{600}\ \ l/h.$$
Se o salário do motorista é de D reais por hora, determinar a velocidade mais econômica e o custo da jornada em função de D.

4. Um retângulo deve ter área de 400 cm^2. Determinar suas dimensões de modo que a distância de um vértice ao meio de um lado não adjacente seja mínima.

5. Mostrar que, dentre todos os retângulos de mesma área, o quadrado tem o menor perímetro.

6. Exprimir o número 4 como a soma de dois números positivos de modo que a soma do quadrado do primeiro com o cubo do segundo seja a menor possível.

7. Um arame de 60 cm de comprimento é cortado em dois; uma das partes é dobrada na forma de círculo, e a outra na forma de um quadrado. Como deve ser cortado o arame para que a soma das áreas do círculo e do quadrado seja (a) mínima? (b) máxima?

8. Determinar o ponto do gráfico da curva $y^2 = 4x$ que está mais próximo do ponto $(2, 1)$.

9. Determinar os pontos do gráfico da curva $x^2 - y^2 = 1$ que estão mais próximos do ponto $(0, 1)$.

10. Mostrar que $(2, 2)$ é o ponto do gráfico da curva $y = x^3 - 3x$ que está mais próximo do ponto $(11, 1)$.

11. Um arame de comprimento L é cortado em duas partes, uma delas sendo dobrada na forma de um triângulo equilátero e a outra na forma de um círculo. Como deve ser cortado o arame para que a soma das áreas limitadas seja (a) mínima? (b) máxima?

12. Mostrar que, dentre todos os triângulos de mesma área, o triângulo equilátero tem o menor perímetro.

13. Mostrar que, dentre todos os triângulos de mesmo perímetro, o triângulo equilátero tem área máxima.

14. Uma cerca de $4,05\ m$ de altura está a $1,2\ m$ da parede lateral de uma casa. Qual o comprimento da menor escada cujas extremidades se apoiam na parede e no chão do lado de fora da cerca?

15. Um tanque deve ter volume V e a forma de um cilindro circular reto com hemisférios ligados a cada extremidade. O material das extremidades custa duas vezes mais por metro que o material dos lados. Determinar as dimensões mais econômicas.

16. Determinar o comprimento da maior barra rígida que pode passar horizontalmente pelo canto formado por dois corredores, um de $2,4\ m$ de largura, o outro de $1,2\ m$ de largura.

17. A seção transversal de um reservatório horizontal é um triângulo isósceles invertido cujos lados iguais medem $18\ m$. Determinar o ângulo entre os lados iguais de modo a se ter a máxima capacidade.

18. Uma janela tem a forma de um retângulo encimada por um semicírculo. Determinar as dimensões de modo que o perímetro seja $3,8\ m$ e a área a maior possível.

19. Determinar o raio e o ângulo de um setor circular de área máxima e perímetro $4,8\ m$.

20. Dois pontos P e Q situados na beirada de um lago circular de $1\ km$ de raio, são diamentralmente opostos. Um homem deseja ir de P para Q nadando de P até um ponto R da beirada e, então, andando de R a Q. Ele pode nadar $2\ km/h$ e andar $4\ km/h$. Determinar o menor e o maior tempo possíveis para ir de P a Q sob as condições estabelecidas.

7.4 Concavidade e Ponto de Inflexão

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ uma intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f tem *concavidade voltada para cima* (*convexa*) em X, se para todos $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 < x_2$, temos que

$$f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \geq f(x), \ \ \forall x \in \ ]x_1, x_2[$$

ou

$$f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) \geq f(x), \ \ \forall x \in \ ]x_1, x_2[.$$

Equivalentemente, f tem concavidade voltada para cima em X, se para todos $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 < x_2$, temos que

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, \ \ \forall x \in \ ]x_1, x_2[$$

ou

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \leq \frac{f(x_2) - f(x)}{x_2 - x}, \ \ \forall x \in \ ]x_1, x_2[.$$

Dizemos que f tem *concavidade voltada para baixo* (*côncava*) em X, se para todos $x_1, x_2 \in X$, com $x_1 < x_2$, temos que

$$f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) \leq f(x), \ \ \forall x \in \ ]x_1, x_2[$$

ou

$$f(x_2) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_2) \leq f(x), \ \ \forall x \in \ ]x_1, x_2[.$$

Observação 7.21 *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ uma intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in X$. Seja*

$$T(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto $P = (x_0, f(x_0))$. Então f tem concavidade voltada para cima em x_0 quando existir um intervalo aberto $I \subseteq X$ contendo x_0 tal que

$$f(x) > T(x), \ \ \forall x \in I.$$

Exemplo 7.22 *Determinar as regiões de concavidades da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$.*

Solução. Note que, dados $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ e $x \in \ ]x_1, x_2[$, temos que

$$\begin{aligned} f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) - f(x) &= a[(x_1^2 - x^2) + (x_2 + x_1)(x - x_1) \\ &= a(x - x_1)[(x_2 + x_1) - (x + x_1)] \\ &= a(x - x_1)(x_2 - x). \end{aligned}$$

Portanto, f tem concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$ se $a > 0$ e tem concavidade voltada para baixo em $\mathbb{R}$ se $a < 0$.

Teorema 7.23 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função derivável em* $]a, b[$. *Então*:

1. f' *é crescente em* $]a, b[$ *se, e somente se, o gráfico de* f *tem concavidade voltada para cima em* $]a, b[$.

2. f' *é decrescente em* $]a, b[$ *se, e somente se, o gráfico de* f *tem concavidade voltada para baixo em* $]a, b[$.

Prova. Vamos provar apenas o item 1. Suponhamos que f' seja crescente em $]a, b[$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in \;]a, b[$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

A função

$$\varphi(x) = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(x)$$

é definida em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Como $\varphi'(x) = f'(c) - f'(x)$ temos que $\varphi'(c) = 0$, isto é, c é um ponto crítico de φ. Por hipótese, o sinal de φ' passa de positivo para negativo em c e, assim, c é um ponto de máximo de φ. Logo, o ponto de mínimo de φ é atingido nos extremos do intervalo $[a, b]$. Assim, $\varphi(x) \geq 0$, para todo $x \in \;]a, b[$, pois $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$. Portanto,

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \geq f(x), \;\; \forall x \in \;]a, b[,$$

isto é, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]a, b[$.

Reciprocamente, suponhamos que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]a, b[$. Então

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq \frac{f(x) - f(b)}{x - b}, \;\; \forall x \in \;]a, b[.$$

Fazendo $x \to a$ na primeira desigualdade e $x \to b$ na segunda, obtemos

$$f'(a) \leq \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \leq f'(b).$$

Portanto, f' é crescente em $]a, b[$. ■

Teorema 7.24 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função tal que* f'' *exista em* $]a, b[$. *Então*:

1. *Se* $f''(x) > 0$, *para cada* $x \in \;]a, b[$, *então o gráfico de* f *tem concavidade voltada para cima em* $]a, b[$.

2. *Se* $f''(x) < 0$, *para cada* $x \in \;]a, b[$, *então o gráfico de* f *tem concavidade voltada para baixo em* $]a, b[$.

Prova. Vamos provar apenas o item 1. Sejam $x_0 \in \,]a,b[$ qualquer e $I \subseteq \,]a,b[$ um intervalo aberto qualquer contendo x_0. Então

$$f(x) - T(x) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0), \;\; \forall x \in I.$$

Assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe $c \in \,]x_0, x[$, para $x \in I$ fixado com $x > x_0$ (ou $x < x_0$), tal que

$$f(x) - f(x_0) = f'(c)(x - x_0).$$

Logo,

$$f(x) - T(x) = (f'(c) - f'(x_0))(x - x_0).$$

Novamente, pelo Teorema do Valor Médio, existe $d \in \,]x_0, c[$ tal que

$$f'(c) - f'(x_0) = f''(d)(c - x_0).$$

Portanto,

$$f(x) - T(x) = f''(d)(c - x_0)(x - x_0) > 0, \;\; \forall x > x_0,$$

isto é, f tem concavidade voltada para cima em $]a,b[$. ■

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Um ponto $(c, f(c))$ do gráfico de f é um *ponto de inflexão* de f se as seguintes condições são satisfeitas:

1. f é contínua em c.

2. A concavidade de f muda em c.

Exemplo 7.25 *Determinar a concavidade e os pontos de inflexões da função* $f(x) = x^3 + x^2 - 5x - 5$.

Solução. 1.^{o} **Passo**. Determinar o domínio de f. Neste caso, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.
2.^{o} **Passo**. Resolver a equação $f''(x) = 0$. Neste caso,

$$6x + 2 = 0.$$

Logo, $x = -\frac{1}{3}$ é o único candidato a ponto de inflexão de f e é claro que f é contínua em $x = -\frac{1}{3}$.
3.^{o} **Passo**. Estudar o sinal de f''.

Como $f''(-1) = -4 < 0$ temos que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]-\infty, -\frac{1}{3}[$ e $f''(0) = 2 > 0$ temos que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima $]-\frac{1}{3}, +\infty[$. Portanto, $x = -\frac{1}{3}$ é ponto de inflexão de f, confira Figura 7.5.

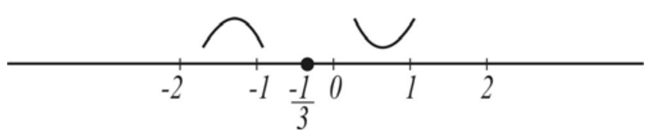

Figura 7.5: Sinal de f''.

Teorema 7.26 (Teste da Derivada Segunda) *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função tal que f'' exista em $]a, b[$ e $f'(c) = 0$, com $c \in\ ]a, b[$. Então:*

1. *Se $f''(c) < 0$, então c é um máximo local de f.*
2. *Se $f''(c) > 0$, então c é um mínimo local de f.*
3. *Se $f''(c) = 0$, então o teste não se aplica.*

Prova. Vamos provar apenas o item 1. Como $f'(c) = 0$ temos que

$$T(x) = f(c) - f'(c)(x - c) = f(c).$$

Suponhamos que $f''(c) < 0$. Então f tem concavidade voltada para baixo em c, isto é, existe um intervalo aberto $I \subseteq\ ]a, b[$ contendo c tal que

$$f(x) < T(x) = f(c), \ \ \forall x \in I, x \neq c.$$

Portanto, c é um máximo local de f. ■

Exemplo 7.27 *Uma caixa "sem a tampa" deve ser construída com base quadrada e área total constante C. Determinar os lados da caixa de modo que o volume seja o máximo.*

Solução. Sejam x a base e y a altura da caixa, respectivamente. Então a área total da caixa sem a tampa é dada por

$$A = x^2 + 4xy.$$

Como $A = C$ temos que

$$y = \frac{C - x^2}{4x}$$

Por outro lado, o volume da caixa é dado por

$$V = x^2 y = \frac{x^2 (C - x^2)}{4x} = \frac{Cx}{4} - \frac{x^3}{4},$$

o qual é função de x e $x \in\ ]0, \sqrt{C}[$. Assim, vamos obter os pontos críticos de V, isto é,

$$V' = \frac{C}{4} - \frac{3x^2}{4} = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{C}{3} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{C}{3}}.$$

Logo, $x = \sqrt{\frac{C}{3}}$ é o ponto crítico de V. Como

$$V'' = -\frac{3x}{2} \ \text{ e } \ V''(\sqrt{\frac{C}{3}}) = -\frac{3}{2}\sqrt{\frac{C}{3}} < 0$$

temos que $x = \sqrt{\frac{C}{3}}$ é ponto de máximo de V. Portanto,

$$y = \frac{C - \frac{C}{3}}{4\sqrt{\frac{C}{3}}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{3}}.$$

Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ uma intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Uma reta $y = ax + b$ é uma *assíntota oblíqua* para o gráfico de f, se:

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = 0 \text{ ou } \lim_{x\to-\infty} (f(x) - y) = 0$$

Intuitivamente, a reta $y = ax + b$ é uma assíntota oblíqua para o gráfico de f se os pontos P do gráfico de f aproximam-se de $y = ax + b$ quando $d(P, O) \to +\infty$.

Proposição 7.28 *Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ uma intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Seja $y = ax+b$ uma assíntota oblíqua para o gráfico de f. Então*:

1. $b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$.
2. *Se* $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$ *for finito, então* $a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$.

Prova. Como

$$0 = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - y) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax - b) = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) - b$$

temos que $b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$. Agora, se $\lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax)$ for finito, então

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x) - ax}{x} = 0 \text{ e } a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

■

Exemplo 7.29 *Determinar as assíntotas do gráfico da função*

$$y = \frac{3x}{x-1} + 3x.$$

Solução. 1.^{o} **Passo**. Determinar o domínio de $y = f(x)$. Neste caso, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R} - \{1\}$ e $x = 1$ é uma assíntota vertical, pois

$$\lim_{x\to1^\pm} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x\right) = \pm\infty$$

2.^{o} **Passo**. Determinar, caso exista,

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ e } a = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}.$$

Assim,

$$a = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{x-1} + 3\right) = 3.$$

De modo análogo, $\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 3$

3.^{o} **Passo**. Determinar, caso exista,

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) \text{ e } b = \lim_{x\to-\infty} (f(x) - ax).$$

Assim,

$$b = \lim_{x\to+\infty} (f(x) - ax) = \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3x}{x-1} + 3x - 3x\right) = 3.$$

Portanto, $y = 3x + 3$ é uma assíntota oblíqua para o gráfico de f.

EXERCÍCIOS

1. Determinar as regiões de concavidades e os pontos de inflexões de cada função.

(a)	$f(x) = -x^3 + 3x - 5$	(h)	$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$
(b)	$f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x - 50$	(i)	$f(x) = x - \sqrt[5]{(x-3)^2}$
(c)	$f(x) = \sqrt[3]{x^2}(3x + 10)$	(j)	$f(x) = \cos x + \operatorname{sen} x,\ \ \forall x \in [0, 2\pi]$
(d)	$f(x) = 6\sqrt{x} + \sqrt{x^3}$	(k)	$f(x) = \cos x - \operatorname{sen} x,\ \ \forall x \in [0, 2\pi]$
(e)	$f(x) = x + \frac{1}{x}$	(l)	$f(x) = \cot^2 x + 2\cot x,\ \ \forall x \in [\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}]$
(f)	$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$	(m)	$f(x) = e^{\operatorname{sen} x},\ \ \forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$
(g)	$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$	(n)	$f(x) = e^{x^2}$.

2. Seja $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ uma função polinomial. Que condições deve satisfazer os coeficientes a, b e c para que f tenha pontos de inflexões?

3. Seja $f(x) = x^4 + ax^3 + \frac{3}{2}x^2 + 1$ uma função polinomial. Que condições deve satisfazer o coeficiente a para que f tenha concavidade voltada para baixo?

4. Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função definida por $f(x) = x \operatorname{sen} x$. Mostrar que os pontos de inflexões de f pertencem a curva $y^2(4 + x^2) = 4x^2$.

5. Determinar os valores máximos e mínimos locais de cada função.

   (a) $f(x) = 3x^2 + 5x - 1$.

   (b) $f(x) = 3x^4 - 4x^3 + 6$.

   (c) $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$, com $a^2 + b^2 > 0$.

   (d) $f(x) = xe^{-2x}$.

   (e) $f(x) = 3^{(x^2-2)^3+8}$.

6. Determinar as assíntotas de cada função.

(a)	$f(x) = \frac{5x}{x-3}$	(d)	$f(x) = \frac{1}{x} + 4x^2$	(g)	$f(x) = \sqrt{1 + x + 4x^2}$
(b)	$f(x) = \frac{3x}{x-1}$	(e)	$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$	(h)	$f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$
(c)	$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$	(f)	$f(x) = \sqrt{1 + x^2} + 2x$	(i)	$f(x) = \frac{x^3}{x^2-1}$.

7. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Mostrar que f é convexa em X se, e somente se,

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b)$$

para todo $t \in\ ]0, 1[$ e $a, b \in X$, com $a < b$.

8. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Mostrar que f é convexa em X se, e somente se,
$$f(sa + tb) \leq sf(a) + tf(b)$$
para todo $t, s \in \mathbb{R}_+$, com $t + s = 1$.

9. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Mostrar que se f é convexa em X, então
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a) + f(b)}{2}$$
para todos $a, b \in X$.

10. Enuncie e mostre, para funções côncavas, resultados acimas.

11. Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções convexas. Mostrar que se f é crescente, então $f \circ g$ é convexa.

12. Divida o número 8 em duas partes tais que a soma de seus quadrados seja mínima.

13. Um segmento tem 18 cm de comprimento. Divida-o em duas partes tais que o produto de seus comprimentos seja máximo.

14. Dado um quadrado de lado l, marcam-se sobre os lados, a partir da cada vértice, no mesmo sentido, quatro segmentos congruentes. Unem-se as extremidades desses segmentos, obtendo-se um quadrado inscrito no primeiro. Determinar a medida de cada segmento, de modo que o quadrado inscrito tenha área mínima. Qual é a área desse quadrado?

15. O mínimo valor da função $f(x) = x^2 + bx + 3$ é -6. Determinar o valor de b.

16. Um fazendeiro calcula que sua colheita de batatas no presente momento deverá atingir a 120 sacos, no valor de $\$25,00$ por saco. Se esperar mais tempo, sua colheita aumentará de 20 saco por semana, mas o preço baixará de $\$2,50$ por saco e por semana. Quantas semanas deverá esperar para obter o máximo rendimento?

17. Determinar a função $f(x) = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, tal que $f(1) = -8$ e tem um máximo no ponto $P = (-1, 4)$.

18. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, com $n > 1$. Determinar o valor de x no qual a função
$$f(x) = (x - a_1)^2 + (x - a_2)^2 + \cdots + (x - a_n)^2$$
atinge o seu valor mínimo.

19. Um carro A está a 65 km a leste de um carro B e está viajando para o sul a 85 km/h, enquanto o carro B está indo para o leste a uma velocidade 80 km/h. Se os carros contínuam seus cursos respectivos, determinar a mínima distância entre eles.

7.5 Regras de L'Hôpital

Nesta seção apresentaremos regras para calcular os limites de quocientes de funções que apresentam indeterminações da forma

$$\frac{0}{0} \text{ ou } \frac{\infty}{\infty}$$

Teorema 7.30 (Regra de L'Hôpital) *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções e $c \in \,]a, b[$ tais que f e g sejam deriváveis em $]a, b[$, exceto possivelmente em c. Se*

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)}$$

é da forma indeterminada $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ em c e $g'(x) \neq 0$ para algum $x \neq c$, então

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

exista, ou

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \pm\infty.$$

■

Observação 7.31 *Note que*

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Exemplo 7.32 *Calcular o seguinte limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\log(x + 1)}.$$

Solução. Como

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\log(x + 1)} = \frac{0}{0}$$

temos uma indeterminação. Assim, pela Regra de L'Hôpital,

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\log(x + 1)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\frac{1}{x+1}} = 1.$$

Exemplo 7.33 *Calcular o seguinte limite*

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(2x)}.$$

Solução. Como
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}=\frac{0}{0}$$
temos uma indeterminação. Assim, pela Regra de L'Hôpital,
$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{1-\cos(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-e^{-x}}{2\sin(2x)}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}}{4\cos(2x)}=\frac{1}{2}.$$
Note que aplicamos a Regra de L'Hôpital duas vezes.

Exemplo 7.34 *Calcular o seguinte limite*
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{\sqrt{x}}.$$

Solução. Como
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{\sqrt{x}}=\frac{\infty}{\infty}$$
temos uma indeterminação. Assim, pela Regra de L'Hôpital,
$$\lim_{x\to\infty}\frac{\log(x)}{\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sqrt{x}}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{\sqrt{x}}=0.$$

Exemplo 7.35 *Calcular o seguinte limite*
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right).$$

Solução. Como
$$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right)=\infty-\infty$$
temos uma indeterminação. Note que não podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. Mas neste caso, primeiro devemos munipular algebricamente a indeterminação até chegarmos a uma das indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{x}\right) &= \lim_{x\to 0^+}\frac{x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1-e^x}{e^x-1+xe^x}\\ &= \lim_{x\to 0^+}\frac{-e^x}{e^x+e^x+xe^x}=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Exemplo 7.36 *Calcular o seguinte limite*
$$\lim_{x\to 0^+}x^2\log x.$$

Solução. Como
$$\lim_{x\to 0^+}x^2\log x=0\cdot(-\infty)$$
temos uma indeterminação. Note que não podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. Mas neste caso, primeiro devemos munipular algebricamente a indeterminação até chegarmos a uma das indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.
$$\lim_{x\to 0^+}x^2\log x=\lim_{x\to 0^+}\frac{\log x}{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{2}{x^3}}=\lim_{x\to 0^+}-\frac{x^2}{2}=0.$$

Exemplo 7.37 *Calcular o seguinte limite*

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\log x}.$$

Solução. Como

$$\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\log x} = 0^0$$

temos uma indeterminação. Note que não podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. Mas neste caso, primeiro devemos munipular algebricamente a indeterminação até chegarmos a uma das indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1^-} (1-x)^{\log x} &= \lim_{x\to 1^-} e^{(\log x \log(1-x))} = e^{\lim_{x\to 1^-} (\log x \log(1-x))} \\
&= e^{\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{\log(1-x)}{\frac{1}{\log x}}\right)} = e^{\left(\lim_{x\to 1^-} \frac{-\frac{1}{1-x}}{-\frac{1}{x(\log x)^2}}\right)} \\
&= e^{\left(\lim_{x\to 1^-} \frac{x(\log x)^2}{1-x}\right)} = e^{\left(\lim_{x\to 1^-} \frac{(\log x)^2 + 2\log x}{-1}\right)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

Aqui usamos o fato de que a função exponencial é contínua.

Exemplo 7.38 *Calcular o seguinte limite*

$$\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{2x}}.$$

Solução. Como

$$\lim_{x\to 0^+} x^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$$

temos uma indeterminação. Note que não podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. Mas neste caso, primeiro devemos munipular algebricamente a indeterminação até chegarmos a uma das indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0^+} (1+3x)^{\frac{1}{2x}} &= \lim_{x\to 0^+} e^{\frac{1}{2x}\log(1+3x)} = e^{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\log(1+3x)}{2x}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{\frac{3}{1+3x}}{2}\right)} = e^{\frac{3}{2}}.
\end{aligned}$$

Exemplo 7.39 *Calcular o seguinte limite*

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}}.$$

Solução. Como

$$\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0$$

temos uma indeterminação. Note que não podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. Mas neste caso, primeiro devemos munipular algebricamente a indeterminação até chegarmos a uma das indeterminações $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$.

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to +\infty} x^{\frac{1}{x}} &= \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{\log(x)}{x}} = e^{\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\log(x)}{x}\right)} \\
&= e^{\lim_{x\to +\infty}\left(\frac{\frac{1}{x}}{1}\right)} = e^0 = 1.
\end{aligned}$$

Observação 7.40 *Note que é extremamente importante verificar se um dado quociente tem a forma indeterminada* $\frac{0}{0}$ *ou* $\frac{\infty}{\infty}$ *antes de aplicar a Regra de L'Hôpital.*

EXERCÍCIOS

---

1. Determinar, se existir, os limites.

(a) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{4x^3+x^2+3}{x^7+1}$	(e) $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\operatorname{sen} x})$	(i) $\lim\limits_{x\to 0^+} (\cos 3x)^{\frac{1}{\operatorname{sen} x}}$
(b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^{100}-x^2+x-1}{x^{10}-1}$	(f) $\lim\limits_{x\to\infty} (1 + \frac{1}{x})^x$	(j) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{\tan(x^2)}$
(c) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{3x}}{x^2}$	(g) $\lim\limits_{x\to\infty} e^x(e - (1 + \frac{1}{x})^x)$	(k) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x}, \ \forall n \in \mathbb{N}$
(d) $\lim\limits_{x\to 0^+} xe^{\frac{1}{x}}$	(h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sec^3 x}{1-\cos x}$	(l) $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^x}{x^n}, \ \forall n \in \mathbb{N}.$

2. Deixa-se cair de um balão um objeto de massa m. Se a força da resistência do ar é diretamente proporcional à velocidade $v(t)$ do objeto no instante t, então pode-se mostrar que
$$v(t) = \frac{mg}{k}(1 - \frac{1}{e^{\frac{kt}{m}}}),$$
onde $k > 0$ e g é uma constante gravitacional. Determinar
$$\lim_{k\to 0^+} v(t).$$

7.6 Gráficos de Funções

Nesta seção agruparemos todas as informações das Seções anteriores para esboçar o gráfico de uma função.

Para esboçar o gráfico de uma função definida pela expressão $y = f(x)$, sugerimos os seguintes passos:

1. Determinar o domínio de f;

2. Determinar os pontos críticos de f;

3. Determinar as regiões de crescimento e decrecimento de f;

4. Estudar o sinal de $f'(x)$ e determinar os pontos de máximo e mínimo locais de f;

5. Estudar o sinal de $f''(x)$ e determinar as regiões de concavidades e pontos de inflexões de f;

6. Determinar o comportamento de f, isto é, as assíntotas de f;

7. Determinar, se possível, os pontos de interseção com os eixos coordenados;

8. Esboçar o gráfico de f.

Exemplo 7.41 *Esboçar o gráfico da seguinte função*

$$f(x) = -x^3 + 3x + 4.$$

Solução. 1.^{o} **Passo**. Determinar o domínio de $y = f(x)$. Neste caso, $\operatorname{Dom} f = \mathbb{R}$.
2.^{o} **Passo**. Determinar os pontos críticos de $y = f(x)$, isto é, resolver a equação $f'(x) = 0$. Neste caso,

$$-3x^2 + 3 = 0.$$

Logo, $x = -1$ e $x = 1$ são os pontos críticos de f.
3.^{o} **Passo**. Determinar as regiões de crescimento e decrescimento de f.

Como $-2 \in \,]-\infty, -1]$ e $f'(-2) = -9 < 0$ temos que f é decrescente em $]-\infty, -1]$.

Como $0 \in [-1, 1]$ e $f'(0) = 3 > 0$ temos que f é crescente em $[-1, 1]$;

Como $2 \in [1, +\infty[$ e $f'(2) = -9 < 0$ temos que f é decrescente em $[1, +\infty[$.

4.^{o} **Passo**. Estudar o sinal de $f'(x)$ e determinar os pontos de máximo e mínimo locais de f.

Como f' passa de negativo para positivo em -1 temos que -1 é um ponto de mínimo local de f e valor mínimo $f(-1) = 2$.

Como f' passa de positivo para negativo em 1 temos que 1 é um ponto de máximo local de f e valor máximo $f(1) = 6$.

5.^{o} **Passo**. Estudar o sinal de $f''(x)$ e determinar as regiões de concavidades e pontos de inflexões de f, isto é, resolver a equação $f''(x) = 0$. Neste caso,

$$-6x = 0.$$

Logo, $x = 0$ é o único candidato a ponto de inflexão de f e é claro que f é contínua em $x = 0$.

Como $f''(-1) = 6 > 0$ temos que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $]-\infty, 0[$ e $f''(1) = -6 < 0$ temos que o gráfico de f tem concavidade voltada para baixo em $]0, +\infty[$. Portanto, $x = 0$ é um ponto de inflexão de f e $f(0) = 4$.

6.^{o} **Passo**. Determinar o comportamento de f. Note que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$$

e f não possui assíntotas.
7.^{o} **Passo**. Determinar, se possível, os pontos de interseção com os eixos coordenados.

Se $x = 0$, então $y = f(0) = 4$ e o ponto $(0, 4)$ pertence ao gráfico de f. Se $y = 0$, então a equação

$$-x^3 + 3x + 4 = 0$$

não tem raízes racionais. Assim, não é possível determinar o valor exato da interseção com o eixo dos x.

8.^{o} **Passo**. Esboçar o gráfico de f (confira Figura 7.6).

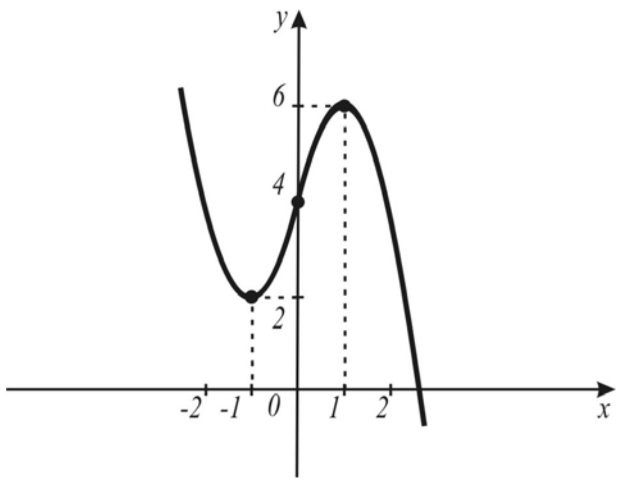

Figura 7.6: Gráfico da função $f(x) = -x^3 + 3x + 4$.

Exemplo 7.42 *Esboçar o gráfico da seguinte função*

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Solução.1.^{o} **Passo**. Determinar o domínio de $y = f(x)$. Neste caso,

$$\text{Dom}\, f = \;]-\infty, -1[\; \cup \;]1, +\infty[,$$

pois

$$x^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow x < -1 \text{ ou } x > 1.$$

2.^{o} **Passo**. Determinar os pontos críticos de $y = f(x)$, isto é, resolver a equação $f'(x) = 0$. Neste caso,

$$\frac{x^3 - 2x}{(x^2 - 1)\sqrt{x^2 - 1}} = 0 \Leftrightarrow x^3 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pm\sqrt{2}.$$

Logo, $x = -\sqrt{2}$ e $x = \sqrt{2}$ são os pontos críticos de f, pois $0 \notin \text{Dom}\, f$.

3.^{o} **Passo**. Determinar as regiões de crescimento e decrescimento de f.

Como $-2 \in \;]-\infty, -\sqrt{2}]$ e $f'(-2) = -\frac{4}{9}\sqrt{3} < 0$ temos que f é decrescente em $]-\infty, -\sqrt{2}]$.

Como $-\frac{4}{3} \in [-\sqrt{2}, -1[$ e $f'(-\frac{4}{3}) = \frac{8}{49}\sqrt{7} > 0$ temos que f é crescente em $[-\sqrt{2}, -1[$.

Como $\frac{4}{3} \in \;]1, \sqrt{2}[$ e $f'(\frac{4}{3}) = -\frac{8}{49}\sqrt{7} < 0$ temos que f é decrescente em $]1, \sqrt{2}]$.

Como $2 \in [\sqrt{2}, +\infty[$ e $f'(2) = \frac{4}{9}\sqrt{3} > 0$ temos que f é crescente em $[\sqrt{2}, +\infty[$.

4.^{o} **Passo**. Estudar o sinal de $f'(x)$ e determinar os pontos de máximo e mínimo locais de f.

Como f' passa de negativo para positivo em $-\sqrt{2}$ temos que $-\sqrt{2}$ é um ponto de mínimo local de f e valor mínimo $f(-\sqrt{2})=2$.

Como f' passa de negativo para positivo em $\sqrt{2}$ temos que $\sqrt{2}$ é um ponto de mínimo local de f e valor mínimo $f(\sqrt{2})=2$.

5.º **Passo**. Estudar o sinal de $f''(x)$ e determinar as regiões de concavidades e pontos de inflexões de f, isto é, resolver a equação $f''(x)=0$. Neste caso,

$$\frac{x^2+2}{\left(x^2-1\right)^2\sqrt{x^2-1}} \neq 0, \ \ \forall x \in \operatorname{Dom} f.$$

Logo, não existe ponto de inflexão para o gráfico de f.

Como $f''(x)>0$, para todo $x \in \operatorname{Dom} f$, temos que o gráfico de f tem concavidade voltada para cima em $\operatorname{Dom} f$.

6.º **Passo**. Determinar o comportamento de f. Note que

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = +\infty \ \text{ e } \lim_{x\to 1^=} f(x) = +\infty.$$

Logo, as retas $x=-1$ e $x=1$ são assíntotas verticais ao gráfico de f. Agora, vamos determinar, caso exista,

$$a = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} \ \text{ e } a = \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} a &= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}\right) \\ &= \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{|x|\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}\right) = 1. \end{aligned}$$

De modo análogo, $\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=-1$ Finalmente, determinaremos, caso exista,

$$b = \lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-ax\right) \ \text{ e } b = \lim_{x\to-\infty}\left(f(x)-ax\right).$$

Assim,

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}+x\right) = \lim_{x\to-\infty} x\left(\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1\right) \\ &= \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+1}{\frac{1}{x}}\right) = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^2}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}}\right) = 0. \end{aligned}$$

De modo análogo, $\lim_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)=0$. Portanto, $y=-x$ e $y=x$ são as assíntotas oblíquas para o gráfico de f.

7.º **Passo**. Determinar, se possível, os pontos de interseção com os eixos coordenados. Neste caso, não existe pontos de interseção com os eixos coordenados.

8.º **Passo**. Esboçar o gráfico de f (confira Figura 7.7).

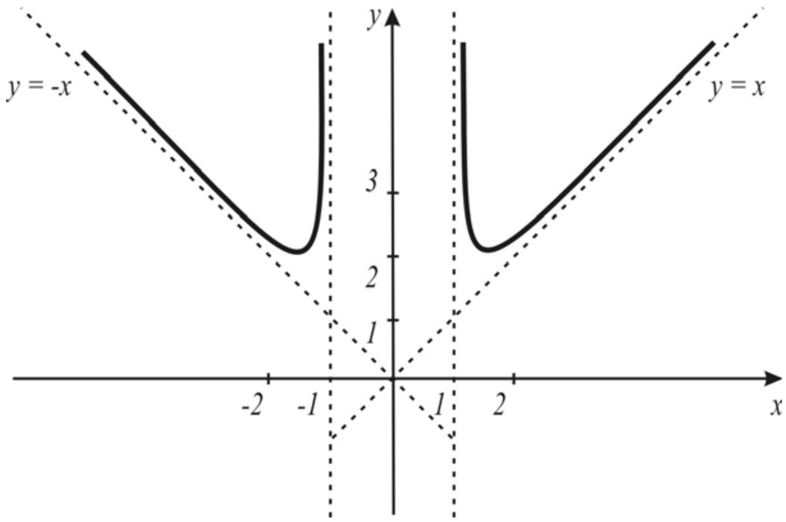

Figura 7.7: Gráfico da função $f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2-1}}$.

EXERCÍCIOS

---

1. Esboçar o gráfico de cada função.

(a)	$f(x) = -x^3 + 3x - 5$	(l)	$f(x) = x^{\frac{2}{3}}\sqrt{9 - x^2}$
(b)	$f(x) = x^3 + 10x^2 + 25x - 50$	(m)	$f(x) = x - \sqrt[5]{(x-3)^2}$
(c)	$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 4x$	(n)	$f(x) = (x-4)^{\frac{4}{3}} + 2(x+4)^{\frac{2}{3}}$
(d)	$f(x) = x^3 - 3x^2 + 6x - 3$	(o)	$f(x) = \operatorname{sen} x + \cos x$
(e)	$f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$	(p)	$f(x) = x - \operatorname{sen} x$
(f)	$f(x) = \sqrt[3]{(x-1)^2} + 3$	(q)	$f(x) = \operatorname{sen} 2x + \sqrt{3}\cos 2x$
(g)	$f(x) = \frac{3x-2}{2x+3}$	(r)	$f(x) = x + 2\cos\frac{x}{2}$
(h)	$f(x) = x + \frac{1}{x}$	(s)	$f(x) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} x \cos x$
(i)	$f(x) = \frac{x}{x^2+1}$	(t)	$f(x) = \operatorname{sen} 2x - \operatorname{sen} 2x \cos 2x$
(j)	$f(x) = \frac{x}{x^2-1}$	(u)	$f(x) = \operatorname{sen} x - \operatorname{sen}^3 x$
(k)	$f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$	(v)	$f(x) = \cos x - \cos^3 x.$

7.7 Taxas Relacionadas

Suponhamos que x e y estão relacionadas pela equação $x^2 + y^2 = 1$ e que $x = f(t)$ e $y = g(t)$, onde t é um parâmetro (tempo). Então

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0$$

Neste caso, dizemos que $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$ são taxas relacionadas, pois conhecendo uma, determinamos a outra.

Exemplo 7.43 *Um dos catetos de um triângulo retângulo decresce* $2,5\ \text{cm}/\min$*, enquanto que o outro cresce* $5\ \text{cm}/\min$*. Em certo instante, o comprimento do primeiro lado é de* $20\ \text{cm}$ *e o do segundo lado vale* $15\ \text{cm}$*. Após* $2\ \min$*, a que taxa está crescendo a área?*

Solução. Para resolver esse tipo de problema devemos primairo fazer uma figura. Dados do problema

$$v_1 = \frac{dx}{dt} = -2,5\ \text{cm}/\min \text{ e } v_2 = \frac{dy}{dt} = 5\ \text{cm}/\min.$$

Note que no instante $t = t_0$, temos $x = 20\ \text{cm}$ e $y = 15\ \text{cm}$. Na realidade, o que queremos é determinar $\frac{dA}{dt}$, quando $t = 2\ \min$. Como

$$A = \frac{1}{2}xy$$

temos que

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{dx}{dt}y + x\frac{dy}{dt}\right).$$

Quando $t = 2\ \min$, obtemos

$$x = x_0 + v_1 t = 20 - 2,5 \cdot 2 = 15$$
$$y = y_0 + v_2 t = 15 + 5 \cdot 2 = 25$$

Logo

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}(-2,5 \cdot 25 + 15 \cdot 5) = \frac{12,5}{2} = 6,25.$$

Portanto,

$$\frac{dA}{dt} = 6,25\ \text{cm}^2/\min.$$

Exemplo 7.44 *Uma escada de* $510\ \text{cm}$ *de comprimrnto se apóia em um muro vertical. Se a extremidade inferior da escada se afasta do muro a razão de* $20\ \text{cm}/s$*, quão rapidamente está descendo a extremidade superior no instante em que a inferior dista* $240\ \text{cm}$ *do muro?*

Solução. Para resolver esse tipo de problema devemos primairo fazer uma figura. Dados do problema: $l = 510\ \text{cm}$, $\frac{dx}{dt} = 20\ \text{cm}/s$. Queremos determinar $\frac{dy}{dt}$, quando $x = 240\ \text{cm}$. Pelo Teorema de Pitágoras, obtemos

$$x^2 + y^2 = 510^2.$$

Assim,

$$2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dt} = \frac{-x}{y}\frac{dx}{dt}$$

Como

$$y = \sqrt{510^2 - x^2}$$

temos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-x}{\sqrt{510^2 - x^2}} \frac{dx}{dt}$$

Quando $x = 240$ cm, temos que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{-240}{\sqrt{510^2 - 240^2}} 20 \approx -0,023.$$

Portanto,

$$\frac{dy}{dt} = -0,023 \ \text{cm}/s.$$

Exemplo 7.45 *Uma piscina tem* $7,5$ m *de largura,* 12 m *de comprimento,* $0,9$ m *de profundidade em um extremo e* $2,7$ m *no outro, o fundo sendo um plano inclinado. Se a água está sendo bombeada para a piscina à razão de* $0,27$ $m^3/\min$, *quão rapidamente se eleva o nível da água no instante em que ele é de* $1,2$ m *na extremidade mais profunda?*

Solução. Para resolver esse tipo de problema devemos primairo fazer uma figura. Dados do problema: $\frac{dV}{dt} = 0,27$ $m/\min$. Queremos determinar $\frac{dx}{dt}$, quando $x = 1,2$ m. Note que

$$V = 7,5 \frac{1}{2} xy \text{ e } \frac{12}{1,8} = \frac{y}{x}.$$

Logo,

$$V = \frac{7,5}{2} \frac{12}{1,8} x^2 \Rightarrow V = 25x^2$$

Assim,

$$\frac{dV}{dt} = 25 \cdot 2x \frac{dx}{dt} \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{1}{50x} \frac{dV}{dt}.$$

Quando $x = 1,2$ m, obtemos

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{50 \cdot 1,2} 0,27 \approx 0,0045.$$

Portanto,

$$\frac{dx}{dt} = 0,0045 \ m/\min.$$

Exemplo 7.46 *Um trem deixa uma estação, num certo instante, e vai na direção norte à razão de* 80 km/h. *Um segundo trem deixa a mesma estação* 2 *horas depois e vai na direção leste à razão de* 96 km/h. *Achar a taxa na qual estão se separando os dois trens* $1h30\min$ *depois do segundo trem deixar a estação.*

Solução. Para resolver esse tipo de problema devemos primairo fazer uma figura. Dados do problema: $\frac{dy}{dt} = 80$ km/h e $\frac{dx}{dt} = 96$ km/h. Queremos determinar $\frac{dz}{dt}$, quando $t =$

$1,5\ h$. Note que quando o segundo trem sai da estação, o primeiro já tem percorrido $2 \cdot 80 = 160\ km$. Logo, pelo Teorema de Pitágoras, temos

$$z^2 = x^2 + (160 + y)^2$$

Sendo $x = 96t$ e $y = 80t$, pois $\frac{dx}{dt} = 96\ km/h$ e $\frac{dy}{dt} = 80\ km/h$, obtemos

$$z = \sqrt{96^2 t^2 + (160 + 80t)^2}$$

Logo,

$$\frac{dz}{dt} = \frac{2 \cdot 96^2 t + 2 \cdot (160 + 80t) \cdot 80}{2 \cdot \sqrt{96^2 t^2 + (160 + 80t)^2}}$$

Assim, quando $t = 1,5\ h$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dt} &= \frac{2 \cdot 96^2 \cdot 1.5 + 2 \cdot (160 + 80 \cdot 1.5) \cdot 80}{2 \cdot \sqrt{96^2 \cdot 1.5^2 + (160 + 80 \cdot 1.5)^2}} \\ &= \frac{72448}{2\sqrt{99136}} \approx 115,05 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\frac{dz}{dt} = 115,05\ km/h.$$

EXERCÍCIOS

---

1. Uma cidade x é atingida por uma moléstia epidêmica. Os setores de saúde calculam que o número de pessoas atingidas pela molestia, depois de um certo tempo t, medidos em dias a partir do primeiro dia da epidemia, é, aproximadamente, dada por
$$f(t) = 64t - \frac{t^3}{3}.$$
   (a) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 4$?
   (b) Qual a razão da expansão da epidemia no tempo $t = 8$?
   (c) Quantas pessoas serão atingidas pela epidemia a partir do quinto dia?

2. Numa granja experimental , constatou-se que uma ave em desenvolvimento pesa, em gramas,
$$f(t) = \begin{cases} 20 + \frac{1}{2}(t+4)^2 & \text{se } 0 \le t \le 60 \\ 8t^2 + 604 & \text{se } 60 \le t \le 90 \end{cases}.$$
   onde t é medido em dias pergunta-se:

   (a) Qual a razão de aumento do peso da ave quando $t = 50$?

(b) Quanto a ave aumenterá no quinto dia?

(c) Qual a razão de aumento do peso quando $t = 80$?

3. Uma peça de carne foi congelada numa freezer no instante $t = 0$. Após t horas, sua temperatura, em °C, é dada por

$$T(t) = 30 - 5t + \frac{4}{t+1}, 0 \leq t \leq 5$$

Pergunta-se: Qual a velocidade de redução de sua temperatura após duas horas?

4. Um balão deixa o solo a 500 m de um observador, à razão de 200 $m/\min$. Quão depressa está crescendo o ângulo de elevação da linha de visão do observador no instante em que o balão está a uma altura de 1000 m?

5. Uma viga medindo 30 m de comprimento está apoiada numa parede e o seu topo está sedeslocando a uma velocidade de $0,5$ m/s . Qual será a taxa de variação da medida do ânguloformado pela viga e pelo chão quando o topo da viga estiver a uma altura de 18 m?

Respostas, Sugestões e Soluções

Seção 7.1

1. (a) Pontos de máximo -3 e 0 e pontos de mínimo -2 e 1;

(b) Ponto de máximo -1 e ponto de mínimo $\frac{5}{3}$;

(c) Ponto de máximo -1 e ponto de mínimo 8;

(d) Ponto de máximo 0 e pontos de mínimo $\frac{1}{2}\sqrt{10}$ e $-\frac{1}{2}\sqrt{10}$.

2. (a) Pontos críticos -2 e 0;

(b) Ponto crítico $\frac{5}{3}$;

(c) Não tem pontos críticos;

(d) Pontos críticos $-\frac{1}{2}\sqrt{10}$, 0 e $\frac{1}{2}\sqrt{10}$;

(e) Ponto crítico 0;

(f) Ponto crítico $\frac{1}{2}$;

(g) Não tem pontos críticos;

(h) Pontos críticos $-\frac{1}{4}\pi + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$;

(i) Pontos críticos $-\frac{2}{3}\pi + k\pi$, $k\pi$ e $\frac{2}{3}\pi + k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$;

(j) Pontos críticos $k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$;

(k) Pontos críticos $k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$;

(l) Não tem pontos críticos.

3. (a) É fácil verificar que f é crescente em todo $\mathbb{R}$. Logo, f não tem ponto de máximo e nem de mínimo;

   (b) Não contradiz o Teorema de Weierstrass, pois $]0,1[$ não é um intervalo fechado.

4. (a) É claro que f é contínua em $[0,4]$, derivável em $]0,4[$ e $f(0) = f(4) = 11$. Como

$$f'(x) = 6x - 12$$

   temos que $c = 2$ é o único ponto no interior de $[0,4]$ tal que $f'(c) = 0$;

   (b) É claro que f é contínua em $[-7,1]$, derivável em $]-7,1[$ e $f(-7) = f(1) = -9$. Como

$$f'(x) = -4x - 12$$

   temos que $c = -3$ é o único ponto no interior de $[-7,1]$ tal que $f'(c) = 0$;

   (c) É claro que f é contínua em $[-3,3]$, derivável em $]-3,3[$ e $f(-3) = f(3) = 118$. Como

$$f'(x) = 4x^3 + 8x$$

   temos que $c = 0$ é o único ponto no interior de $[-3,3]$ tal que $f'(c) = 0$;

   (d) É claro que f é contínua em $[0,\pi]$, derivável em $]0,\pi[$ e $f(0) = f(\pi) = 0$. Como

$$f'(x) = 2\cos 2x$$

   temos que $c = \frac{\pi}{4}$ é o único ponto no interior de $[0,\pi]$ tal que $f'(c) = 0$;

   (e) É claro que f é contínua em $[0,2\pi]$, derivável em $]0,2\pi[$ e $f(0) = f(2\pi) = 3$. Como

$$f'(x) = -2\operatorname{sen} 2x - 2\operatorname{sen} x$$

   temos que $c_1 = -\frac{2}{3}\pi$, $c_2 = 0$ e $c_3 = \frac{2}{3}\pi$ são os pontos no interior de $[0,2\pi]$ tal que $f'(c) = 0$;

   (f) É claro que f é contínua em $[0,\frac{3}{2}\pi]$, derivável em $]0,\frac{3}{2}\pi[$ e $f(0) = f(\frac{3}{2}\pi) = -1$. Como

$$f'(x) = \cos x + \operatorname{sen} x$$

   temos que $c = \frac{3}{4}\pi$ é o único ponto no interior de $[0,\pi]$ tal que $f'(c) = 0$.

5. (a) É claro que f é contínua em $[1,3]$ e derivável em $]1,3[$. Como $f(1)=3$, $f(3)=37$ e $f'(x)=10x-3$ temos que

$$10c-3=\frac{f(3)-f(1)}{3-1}=\frac{37-3}{2}=17.$$

Portanto, $c=2$ é o único ponto em $]1,3[$ que satisfaz o Teorema do Valor Médio;

(b) É claro que f é contínua em $[1,5]$ e derivável em $]1,5[$. Como $f(1)=0$, $f(3)=76$ e $f'(x)=6x+1$ temos que

$$6c+1=\frac{f(5)-f(1)}{5-1}=\frac{76-0}{4}=19.$$

Portanto, $c=3$ é o único ponto em $]1,5[$ que satisfaz o Teorema do Valor Médio;

(c) É claro que f é contínua em $[-8,8]$ e mas não é derivável em $]-8,8[$, pois

$$f'(x)=\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Portanto, f não satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio;

(d) É claro que f é contínua em $[-1,1]$ e derivável em $]-1,1[$. Como $f(-1)=-23$, $f(1)=23$ e $f'(x)=15x^4+15x^2+15$ temos que

$$15c^4+15c^2+15=\frac{f(1)-f(-1)}{1-(-1)}=\frac{23-(-23)}{2}=23.$$

Portanto,

$$c_1=-\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{705}}{30}} \text{ e } c_2=\sqrt{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{705}}{30}}$$

são os pontos em $]-1,1[$ que satisfazem o Teorema do Valor Médio;

(e) É claro que f é contínua em $[0,\frac{\pi}{2}]$ e derivável em $]0,\frac{\pi}{2}[$. Como $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$ e $f'(x)=\cos x$ temos que

$$\cos c=\frac{f\left(\frac{\pi}{2}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{2}-0}=\frac{1-0}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

Portanto, $c=\arccos\left(\frac{2}{\pi}\right)$ é o único ponto em $]0,\frac{\pi}{2}[$ que satisfaz o Teorema do Valor Médio;

(f) É claro que f é contínua em $[0,\frac{\pi}{4}]$ e derivável em $]0,\frac{\pi}{4}[$. Como $f(0)=0$, $f\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$ e $f'(x)=\sec^2 x$ temos que

$$\sec^2 c=\frac{f\left(\frac{\pi}{4}\right)-f(0)}{\frac{\pi}{4}-0}=\frac{1-0}{\frac{\pi}{4}}=\frac{4}{\pi}.$$

Portanto, $c=\arccos\left(\sqrt{\frac{\pi}{4}}\right)$ é o único ponto em $]0,\frac{\pi}{4}[$ que satisfaz o Teorema do Valor Médio.

6. É claro que f satifaz as hipóteses do Teorema de Rolle, exceto quanto ao fato de que $f'(1)$ não existe, e $f(0) = 8 = f(2)$. Como
$$f'(x) = \frac{2}{\sqrt[3]{x-1}}$$
temos que $f'(x) \neq 0$, para todo $x \neq 1$. Entretanto, isto não contradiz o Teorema de Rolle, pois f não é derivável em $]0, 2[$.

7. Como $|f'(x)| = 1$ para todo $x \neq 2$ e
$$\frac{f(4) - f(1)}{4 - 1} = \frac{1}{3}$$
temos que não existe $c \in \ ]1, 4[$ que satisfaça a igualdade. Não contradiz o Teorema do Valor Médio, pois f não é derivável em $]1, 4[$.

8. Como $f'(x) = 3x^2 + 2qx + p$ temos que a equação polinomial
$$3c^2 + 2qc + p = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$
tem no máximo duas raízes em $]a, b[$. Portanto, existe no máximo dois números em $]a, b[$ que satisfaz a conclusão do Teorema do Valor Médio.

9. Seja $f : [a, b] \to R$ definida por $f(x) = \operatorname{sen} x$, para todos $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Então, pelo o Teorema do Valor Médio, existe pelo menos um $c \in \ ]a, b[$ tal que
$$\cos c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \frac{\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a}{b - a}$$
Como $|\cos c| \leq 1$, para todo $c \in \mathbb{R}$ temos que
$$|\operatorname{sen} b - \operatorname{sen} a| \leq |b - a|, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

Seção 7.2

1. (a) A função f é decrescente em $]-\infty, \frac{1}{2}]$ e crescente em $[\frac{1}{2}, +\infty[$;

   (b) A função f é crescente em $]-\infty, 2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}]$, decrescente em $[2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}, 2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}]$ e crescente em $[2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}, +\infty[$;

   (c) A função f é decrescente em $]+\infty, -\frac{1}{2}\sqrt{6}]$, crescente em $[-\frac{1}{2}\sqrt{6}, 0]$, decrescente em $[0, \frac{1}{2}\sqrt{6}]$ e crescente em $[\frac{1}{2}\sqrt{6}, +\infty[$;

   (d) A função f é crescente em todo $\mathbb{R}$;

   (e) A função f é decrescente em $]-\infty, -\frac{1}{3}\sqrt{6}]$, crescente em $[-\frac{1}{3}\sqrt{6}, \frac{1}{3}\sqrt{6}]$ e decrescente em $[\frac{1}{3}\sqrt{6}, +\infty[$;

   (f) A função f é crescente em todo $\mathbb{R}$.

2. É claro que a função $\varphi : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = x^n - 1 - n\,(x-1)$ é contínua e derivável em $]1, +\infty[$. Como
$$\varphi'(x) = nx^{n-1} - n = n(x^{n-1} - 1) > 0, \;\; \forall x \in \;]1, +\infty[,$$
temos que φ é crescente. Logo, $\varphi(x) \geq \varphi(1)$, para todo $x \in [1, +\infty[$. Portanto, $x^n - 1 \geq n\,(x-1)$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e $x \in [1, +\infty[$.

3. É claro que a função $\varphi : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = \tan x - x$ é contínua e derivável em $]0, \frac{\pi}{2}[$. Como
$$\varphi'(x) = \sec^2 x - 1 = \tan^2 x > 0, \;\; \forall x \in \;]0, \frac{\pi}{2}[,$$
temos que φ é crescente. Logo, $\varphi(x) \geq \varphi(0)$, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Portanto, $x \leq \tan x$, para todo $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

4. É claro que a função $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x) - g(x)$ é contínua e derivável em $]a, b[$. Como
$$\varphi'(x) = f'(x) - g'(x) = 0, \;\; \forall x \in \;]a, b[,$$
temos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = c$, para todo $x \in [a, b]$. Portanto, $f(x) = g(x) + c$, para todo $x \in [a, b]$.

5. É claro que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = f(x)e^{-x}$ é derivável. Como
$$\varphi'(x) = f'(x)e^{-x} - f(x)e^{-x} = 0, \;\; \forall x \in \mathbb{R},$$
temos que existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, $f(x) = ce^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

6. É claro que a função $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $\varphi(x) = x^2 - a$ é contínua. Como
$$f(0) = -a < 0 \;\text{ e }\; f(a+1) = a^2 + a + 1 > 0$$
temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que existe $b \in \;]0, a+1[$.tal que $f(b) = 0$, isto é, $a = b^2$.

7. Como $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que f possui pelo menos uma raiz real. Como $f'(x) = 3x^2 + 2qx + p$ temos que a equação polinomial $3x^2 + 2qx + p = 0$ tem no máximo duas raízes reais. Logo, pelo Teorema de Rolle, f tem no máximo três raízes reais.

8. Sendo $\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ e $\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$ temos, pelo Teorema do Valor Intermediário, que f possui pelo menos uma raiz real. Suponha que existam $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, tais que $f(a) = f(b) = 0$. Como f é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$ temos, pelo Teorema de Rolle, que existe pelo menos um $c \in \;]a, b[$ tal que $f'(c) = 15c^4 + 15 = 0$, o que é impossível, pois $x^4 + 1 \neq 0$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, f tem uma única raiz real.

9. Suponha que

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \ \ \forall x \in \mathbb{R},$$

onde n é um número ímpar. Tomando

$$b = 1 + \sum_{i=1}^{n} |a_{n-i}| > 0,$$

obtemos $|a_{n-i}| \leq b - 1$, para cada $i = 1, \ldots, n$, e

$$\left|a_0 + a_1 b + \cdots + a_{n-1}b^{n-1}\right| \leq (b-1)[1 + b + \cdots + b^{n-1}] = b^n - 1 < b^n.$$

Como

$$f(b) = b^n + \left(a_{n-1}b^{n-1} + \cdots + a_1 b + a_0\right) > 0$$

e

$$f(-b) = -b^n + \left(a_{n-1}(-b)^{n-1} + \cdots + a_1(-b) + a_0\right) < 0$$

temos, pelo Teorema do Valor Intermediártio, que existe pelo menos um $c \in \ ]-b, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Seção 7.3

1. (a) Ponto mínimo $\frac{1}{2}$;

   (b) Ponto de máximo $2 + \frac{1}{3}\sqrt{3}$ e ponto de mínimo $2 - \frac{1}{3}\sqrt{3}$;

   (c) Pontos de máximo $\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e pontos de mínimo $\frac{5\pi}{4} + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$;

   (d) Ponto de máximo $\frac{\pi}{4}$ e ponto de mínimo $\frac{3\pi}{4}$;

   (e) Ponto de máximo 0 e pontos de mínimo -$\frac{1}{2}\sqrt{6}$ e $\frac{1}{2}\sqrt{6}$;

   (f) Não possui pontos de máximo e mínimo;

   (g) Ponto de máximo $-\frac{1}{3}\sqrt{6}$ e ponto de mínimo $\frac{1}{3}\sqrt{6}$;

   (h) Não possui pontos de máximo e mínimo;

   (i) Ponto de máximo $-\frac{1}{3}\pi$ e ponto de mínimo $\frac{1}{3}\pi$;

   (j) Ponto de máximo $-\sqrt{3}$ e ponto de mínimo $\sqrt{3}$;

   (k) Ponto de mínimo $\frac{1}{4}\pi$;

   (l) Pontos de máximo $-\frac{\pi}{4} + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$ e pontos de mínimo $\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$, para todo $k \in \mathbb{Z}$.

2. Se x e y são os lados do retângulo e r o raio do círculo, então $x = \frac{y}{2} = r\sqrt{2}$ u c.

3. Como o custo da viagem é dado por

$$C(x) = 300\left(2 + \frac{x^2}{600}\right) + \frac{300D}{x}, 30 \leq x \leq 60,$$

temos que

$$C'(x) = x - \frac{300D}{x^2}$$

Logo, $x = \sqrt[3]{300D}\ \ km/h$ e

$$C(\sqrt[3]{300D}) = 300\left(2 + \frac{\sqrt[3]{(300D)^2}}{600}\right) + \sqrt[3]{(300D)^2}.$$

4. Se x e y são os lados do retângulo, então $x = 20\sqrt{2}\ \ cm$ e $y = 10\sqrt{2}\ \ cm.$

5. Se x e y são os lados do retângulo, então a área é dada por $S = xy$ e $y = \frac{S}{x}$. Como o perímetro é

$$p = 2(x+y) = 2\left(x + \frac{S}{x}\right)$$

temos que

$$p'(x) = \frac{2(x^2 - S)}{x^2}.$$

Logo, $x = y = \sqrt{S}\ \ u\ c.$

6. Sejam x e y os números. Então $x + y = 4$. Como

$$f(x) = x^2 + y^3 = x^2 + (4-x)^3, 0 \leq x \leq 4,$$

temos que

$$f'(x) = 2x - 3(4-x)^2.$$

Logo, $x = \frac{8}{3}$ e $y = \frac{4}{3}$.

7. Se x e y são as partes, então $x + y = 60$, $x = 2\pi r$ e $y = 4l$, onde r é o raio do círculo e l é o lado do quadrado. Como

$$f(x) = \pi r^2 + l^2 = \frac{x^2}{4\pi} + \frac{(60-x)^2}{16}, 0 \leq x \leq 60,$$

temos que

$$f'(x) = \frac{x}{2\pi} - \frac{60-x}{8}.$$

Logo, (a) $x = \frac{60\pi}{\pi+4}\ \ cm$ e $y = \frac{240}{\pi+4}\ \ cm$; (b) $x = 60\ \ cm.$

8. Devemos minimizar a função distância

$$F(P) = d(P, (2,1)),$$

onde P é um ponto qualquer da curva $y^2 = 4x$. Assim, basta minimizar a função

$$f(x) = (x-2)^2 + (y-1)^2 = x^2 - 4\sqrt{x} + 5.$$

Logo, $x = 1$ é o ponto de mínimo de f. Portanto, $P = (1, 2)$ é o ponto mais próximo do ponto $(2, 1)$.

9. $P = (-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$ e $Q = (\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{1}{2})$.

10. Devemos minimizar a função distância

$$F(P) = d(P, (11, 1)),$$

onde P é um ponto qualquer da curva $y = x^3 - 3x$. Assim, basta minimizar a função

$$f(x) = (x-11)^2 + (y-1)^2 = x^6 - 6x^4 - 2x^3 + 10x^2 - 16x + 122.$$

Logo, $x = 2$ é o ponto de mínimo de f. Portanto, $P = (2, 2)$ é o ponto mais próximo do ponto $(11, 1)$.

11. (a) $x = \frac{3L}{3+\pi\sqrt{3}}$ $u\ c$ e $y = \frac{\pi\sqrt{3}L}{3+\pi\sqrt{3}}$ $u\ c$; (b) $x = L$ $u\ c$.

12. Sejam x, y e z os lados do triângulo e $2p = x + y + z$ o perímetro. Então a área do triângulo é dada por

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)} = \sqrt{p}\sqrt{(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Como

$$(p-x)(p-y)(p-z) = \frac{A^2}{p}$$

é constante temos que a soma $(p-x) + (p-y) + (p-z)$ é mínima quando

$$p - x = p - y = p - z = \frac{p}{3},$$

isto é,

$$x = y = z = \frac{2p}{3}.$$

13. Sejam x, y e z os lados do triângulo e $2p = x + y + z$ o perímetro. Então a área do triângulo é dada por

$$A = \sqrt{p(p-x)(p-y)(p-z)}.$$

Como

$$(p-x) + (p-y) + (p-z) = p$$

é constante temos que o produto $(p-x)(p-y)(p-z)$ é máximo quando

$$p - x = p - y = p - z = \frac{p}{3},$$

isto é,

$$x = y = z = \frac{2p}{3}.$$

14. $7,03\ m$.

15. Raio do cilindro $r = \sqrt[3]{\frac{3V}{16\pi}}\ m$ e altura do cilindro $h = 4\sqrt[3]{\frac{3V}{16\pi}}\ m$.

16. O comprimento da barra é igual a $\frac{6}{5}\left(1+\sqrt[3]{4}\right)^{\frac{3}{2}}\ m$.

17. $\theta = 90°$.

18. Raio do semicírculo r é igual a altura do retângulo $h = \frac{3{,}8}{4+\pi}\ m$.

19. Raio $r = 1,2\ m$ e o ângulo $\theta = 2\ rad$.

20. Mínimo $\frac{\pi}{4}\ h$ e máximo $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\pi}{12}\right)\ h$.

Seção 7.4

1. (a) Ponto de inflexão 0, concavidade voltada para cima em $]-\infty,0]$ e concavidade voltada para baixo em $[0,+\infty[$;

   (b) Ponto de inflexão $-\frac{10}{3}$, concavidade voltada para cima em $[-\frac{10}{3}+\infty[$ e concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-\frac{10}{3}]$;

   (c) Ponto de inflexão $\frac{2}{3}$, concavidade voltada para cima em $[\frac{2}{3},+\infty[$ e concavidade voltada para baixo em $]-\infty,\frac{2}{3}]$;

   (d) Ponto de inflexão 2, concavidade voltada para cima em $[2,+\infty[$ e concavidade voltada para baixo em $[0,2]$;

   (e) f não possui pontos de inflexão, concavidade voltada para cima em $]0,+\infty[$ e concavidade voltada para baixo em $]-\infty,0[$;

   (f) Pontos de inflexão $-\sqrt{3}$, 0 e $\sqrt{3}$, concavidade voltada para cima em $[-\sqrt{3},0]\cup[\sqrt{3},+\infty[$ e concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-\sqrt{3}]\cup[0,\sqrt{3}]$;

   (g) Ponto de inflexão 0, concavidade voltada para cima em $[-1,0]\cup\ ]1,+\infty[$ e concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-1[\ \cup[0,1[$;

   (h) Pontos de inflexão $-2-\sqrt{3}$, 1 e $-2+\sqrt{3}$, concavidade voltada para cima em $[-2-\sqrt{3},-2+\sqrt{3}]\cup[1,+\infty[$ e concavidade voltada para baixo em $]-\infty,-2-\sqrt{3}]\cup[-2+\sqrt{3},1]$;

   (i) f não possui pontos de inflexão e sempre tem concavidade voltada para cima;

   (j) Pontos de inflexão $\frac{3\pi}{4}$ e $\frac{7\pi}{4}$, concavidade voltada para cima em $[\frac{3\pi}{4},\frac{7\pi}{4}]$ e concavidade voltada para baixo em $[0,\frac{3\pi}{4}]\cup[\frac{7\pi}{4},2\pi]$;

   (k) Pontos de inflexão $\frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$, concavidade voltada para cima em $[\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}]$ e concavidade voltada para baixo em $[0,\frac{\pi}{4}]\cup[\frac{5\pi}{4},2\pi]$;

   (l) f não possui pontos de inflexão e sempre tem concavidade voltada para cima;

(m) Ponto de inflexão $x_0 = \operatorname{arcsen}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, concavidade voltada para cima em $[-\frac{\pi}{2}, x_0]$ e concavidade voltada para baixo em $[x_0, \frac{\pi}{2}]$;

(n) f não possui pontos de inflexão e sempre tem concavidade voltada para cima.

2. $a \neq 0$ e $3b^2 - 8ac > 0$ ou $a = 0$ e $b \neq 0$.

3. $a < -2$ ou $a > 2$.

4. Note que
$$f''(x) = 0 \Leftrightarrow 2\cos x - x \operatorname{sen} x = 0.$$
Como $y = x \operatorname{sen} x$ e $\cos x = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$ temos que
$$\begin{aligned} \pm 2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} - y &= 0 \Leftrightarrow y = \pm 2\sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2} \Leftrightarrow y^2 = 4\left(1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2\right) \\ &\Leftrightarrow x^2y^2 = 4(x^2 - y^2) \Leftrightarrow y^2(4 + x^2) = 4x^2. \end{aligned}$$

5. (a) Valor mínimo local $-\frac{37}{12}$;

   (b) Valor mínimo local 5;

   (c) Valor máximo local $\sqrt{a^2 + b^2}$ e valor mínimo local $-\sqrt{a^2 + b^2}$;

   (d) Valor máximo local $\frac{1}{2e}$;

   (e) Valor mínimo local 1.

6. (a) Assítota horizontal $y = 5$ e assíntota vertical $x = 3$;

   (b) Assítota horizontal $y = 3$ e assíntota vertical $x = 1$;

   (c) Assítota horizontal $y = 0$;

   (d) Assítota vertical $x = 0$;

   (e) Assítota oblíqua $y = x + 1$ e assíntota vertical $x = 3$;

   (f) Assítotas oblíquas $y = x$ e $y = 3x$;

   (g) Assítotas oblíquas $y = -2x - \frac{1}{4}$ e $y = 2x + \frac{1}{4}$;

   (h) Assítota oblíqua $y = x - \frac{1}{3}$;

   (i) Assítota oblíqua $y = x + 1$ e assíntotas verticais $x = -1$ e $x = 1$.

7. Primeiro notamos que
$$x \in \,]a, b[\, \Leftrightarrow a < x < b \Leftrightarrow 0 < x - a < b - a \Leftrightarrow 0 < \frac{x - a}{b - a} < 1.$$
Assim,
$$x \in \,]a, b[\, \Leftrightarrow t = \frac{x - a}{b - a} \in \,]0, 1[\, \Leftrightarrow x = (1 - t)a + tb \in \,]0, 1[.$$

Agora, suponhamos que f seja convexa em X. Então

$$f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \geq f(x), \ \forall x \in \,]a, b[.$$

Logo,

$$\begin{aligned} f((1-t)a + tb) &\leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(((1-t)a + tb) - a) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}t(b - a) \\ &= f(a) + (f(b) - f(a))t \\ &= (1-t)f(a) + tf(b). \end{aligned}$$

Reciprocamente, suponhamos que

$$f((1-t)a + tb) \leq (1-t)f(a) + tf(b),$$

para todo $t \in \,]0, 1[$ e $a, b \in X$, com $a < b$. Logo,

$$\begin{aligned} f(x) &= f((1-t)a + tb) \\ &\leq (1-t)f(a) + tf(b) \\ &= \left(1 - \frac{x - a}{b - a}\right) f(a) + \left(\frac{x - a}{b - a}\right) f(b) \\ &= f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \ \forall x \in \,]a, b[. \end{aligned}$$

Portanto, f é convexa.

8. Basta tomar $s = 1 - t$ no exercício 7.

9. Basta tomar $s = t = \frac{1}{2}$ no exercício 8.

10. Sejam $X \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função. Então f é côncava em X se, e somente se,
$$(1-t)f(a) + tf(b) \leq f((1-t)a + tb),$$
para todo $t \in \,]0, 1[$ e $a, b \in X$, com $a < b$. Agora siga os passos da prova dos exercícios 7, 8 e 9.

11. Como é crescente e convexo temos que

$$\begin{aligned} f \circ g((1-t)a + tb) &= f(g((1-t)a + tb)) \\ &\leq f((1-t)g(a) + tg(b)) \\ &\leq (1-t)f(g(a)) + tf(g(b)) \\ &= (1-t)f \circ g(a) + tf \circ g(b), \end{aligned}$$

para todo $t \in \,]0, 1[$ e $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$. Portanto, $f \circ g$ é convexa.

12. Se x e y são as partes, então $x = y = 4\ \ u\ c$

13. Se x e y são as partes, então $x = y = 9\ \ cm$

14. O comprimento do segmento x é igual a $\frac{l}{2}\ \ u\ c$ e a área é igual a $\frac{l^2}{2}\ \ u\ a$.

15. $b = -6$ ou $b = 6$.

16. 2 semanas.

17. $f(x) = -3x^2 - 6x + 1$.

18.
$$x = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}.$$

19. $\frac{221}{109}\sqrt{545}\ \ km$.

Seção 7.5

1. (a) $\frac{10}{7}$; (b) $\frac{99}{10}$; (c) ∞; (d) ∞; (e) 0; (f) e; (g) ∞; (h) ∞; (i) 1; (j) 1; (k) 0; (l) ∞.

2. gt.

Seção 7.7

1. (a) 48; (b) 0; (c) aproximadamente 278 pessoas.

2. (a) $54\ \ g$; (b) $60,5\ \ g$; (c) $1,28\ \ Kg$.

3. $-\frac{49}{9}\ \ {}^\circ\mathrm{C}/h$.

4. $0,08\ \ rad/\min$.

5. $-\frac{1}{48}\ \ rad/s$.

Referências Bibliográficas

[1] Andraus, S. e Santos, U. P., *Matemática no Ensino do Segundo Grau*, Volumes. 1, 2 e 3, Companhia Ed. Nacional, 1973.

[2] Ávila, G. S. S., *Cálculo* 1: *Funções de uma Variável*, ed. LTC, 1983.

[3] Flemming, D. M. e Gonçalves, M. B., *Cálculo A*: *Funções, Limite, Derivação e Integração*, Makron Books, 1992.

[4] Hoffmann, L. D., *Cálculo*: *Um Curso Moderno e suas Aplicações*, ed. LTC, 1985.

[5] Iezzi, G. et al. *Matemática*, Volumes. 1, 2 e 3, Atual Editora Ltda - São Paulo.

[6] Leithold, L. *Matemática Aplicada à Economia e Adimistração*, Ed. Harbra Ltda, 1984.

[7] Weber, J. E., *Matemática para Economia e Administração*, LTC, 1977.