Disciplina: Fundamentos da Geometria Euclidiana

Prof. Ms. João Batista Alves Parente
Curso de Licenciatura em Matemática – **UFPB**VIRTUAL
parente@mat.ufpb.br

Ambiente Virtual de Aprendizagem: Moodle www.ead.ufpb.br
Site da **UFPB**VIRTUAL www.virtual.ufpb.br
Site do curso www.mat.ufpb.br/ead
Telefone **UFPB**VIRTUAL (83) 3216 7257

Carga horária: 60 horas **Créditos: 04**

Ementa

Historicidade e axiomas básicos da Geometria Euclidiana, segmentos de retas, ângulos planos, poligonais e polígonos, congruência e semelhança de triângulos, desigualdades geométricas, circunferências e arcos, polígonos inscritos e circunscritos.

Descrição

Neste curso apresentaremos a Geometria Euclidiana, com base na axiomatização introduzida por Euclides no século III a.C., na Grécia, em uma magistral obra intitulada "Elementos". Será enfatizada a grande importância do "axioma das paralelas", também conhecido como quinto postulado, do qual se originaram outras Geometrias. A partir das definições básicas de poligonal e polígonos, serão introduzidos os conceitos de congruência e semelhança de triângulos, de onde obteremos algumas consequências muito importantes, destacando-se o Teorema de Pitágoras e Tales.

Objetivos

- Introduzir a construção axiomática da Geometria euclidiana.
- Apresentar outro modelo de Geometria, diferente do euclidiano.
- Introduzir os conceitos de poligonais e polígonos.
- Estabelecer elos entre o ensino de Geometria experimental e axiomático.
- Estabelecer relações entre paralelismo e perpendicularidade.
- Apresentar classificações de triângulos, quadriláteros e polígonos em geral.
- Obter proposições equivalentes e tentar estabelecer relações, se possível, entre duas ou mais proposições.
- Introduzir os casos de Congruência e Semelhança de triângulos e consequências.
- Introduzir "propriedades básicas" da circunferência.
- Obter condições, para que certos tipos de polígonos possam ser inscritos ou circunscritos, em uma circunferência.

Unidades Temáticas Integradas

Unidade I **Uma Breve Introdução Histórica da Geometria Euclidiana**

- Os egípcios e a utilização do triângulo retângulo 3, 4, 5 na antiguidade;
- Um exemplo de medição de ângulos retos análogo à do Egito antigo, utilizado no mundo contemporâneo por alguns mestres de obra.

Unidade II **Preliminares da Geometria Euclidiana**

- Entes primitivos e axiomas básicos da Geometria Euclidiana;
- Segmentos de retas: Definições, classificações e medições;
- Semi-retas e semiplanos: Definições;
- Ângulos planos: Definições, classificações e medições;
- Existência e unicidade da perpendicular *s*, por um ponto de uma reta *r*;
- Poligonais e Polígonos: Definições, elementos e classificações.

Unidade III **Congruência de Triângulos**

- Segmentos e Ângulos congruentes: Definições;
- Triângulos congruentes: Definições e motivação;
- Casos *LAL* e *ALA* de congruência de triângulos;
- Alguns resultados clássicos sobre triângulos isósceles;
- Caso *LLL* de congruência de triângulos. Rigidez do triângulo. Aplicações.

Unidade IV **O Teorema do Ângulo Externo e Consequências**

- Ângulo externo de um triângulo: Definição;
- O Teorema do Ângulo Externo e algumas consequências imediatas;
- Existência e unicidade da perpendicular *s*, por um ponto fora de uma reta *r*;
- A transformação de reflexão, relativamente a uma reta *r*, em um plano: Definição e propriedades;
- Relações entre medidas de lados e ângulos, em um triângulo qualquer;
- A desigualdade triangular e a construtibilidade de triângulos;
- Exemplos ilustrativos.

Unidade V **Paralelismo**

- Uma breve história do 5° postulado de Euclides e suas consequências;
- Intersecções entre paralelas cortadas por uma transversal;
- Ângulos determinados por um par de retas, cortadas por uma transversal;
- Formulações equivalentes do 5° postulado de Euclides;
- Verificação experimental da soma dos ângulos internos de um triângulo, com a utilização de origamis;
- Uma versão do teorema do ângulo externo, com a utilização de igualdade, ao invés de desigualdade;
- Distâncias entre retas paralelas;
- Quadriláteros: Definições e classificações;
- Algumas definições equivalentes de paralelogramo;
- Teorema Fundamental da Proporcionalidade e sua recíproca;
- Teorema do feixe de paralelas cortadas por duas transversais.

Unidade VI **Semelhança de Triângulos**

- Triângulos semelhantes: Definições e motivação. Exemplos Ilustrativos;
- Os três casos clássicos de semelhança de triângulos e consequências;
- O teorema de Pitágoras e sua recíproca;
- Aplicações na resolução de Problemas.

Unidade VII Circunferências e Arcos

- A circunferência: elementos e definições básicas;
- Perpendicularidade entre um raio e uma corda;
- Retas tangentes a uma circunferência em um de seus pontos e sua perpendicularidade com o raio;
- Ângulo central: definição e medição;
- Relação entre congruência de cordas e ângulos centrais;
- Ângulo Inscrito: definição e medição;
- Relação entre a medida de um ângulo inscrito e o raio da circunferência;
- Relação entre as medidas dos segmentos, determinados em duas cordas que se interceptam;
- Ângulo circunscrito: definição e medição;
- Inscrição de triângulos. Determinação de uma circunferência por três pontos não colineares;
- Pontos de encontro das mediatrizes, bissetrizes, alturas e medianas, em um triângulo qualquer. Circunscrição de triângulos;
- Polígonos Regulares: definição;
- Inscrição e circunscrição de polígonos regulares.

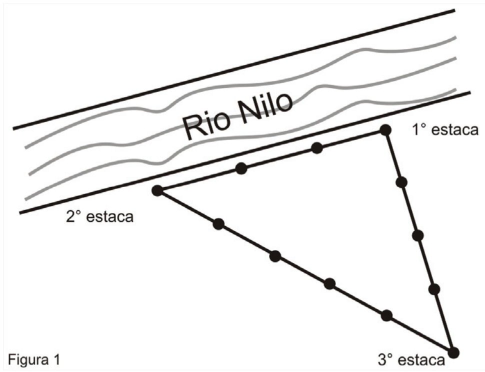
Unidade I: Uma Breve Introdução Histórica da Geometria Euclidiana

1. - Situando a Temática

A palavra Geometria tem origem grega e significa medida da terra.

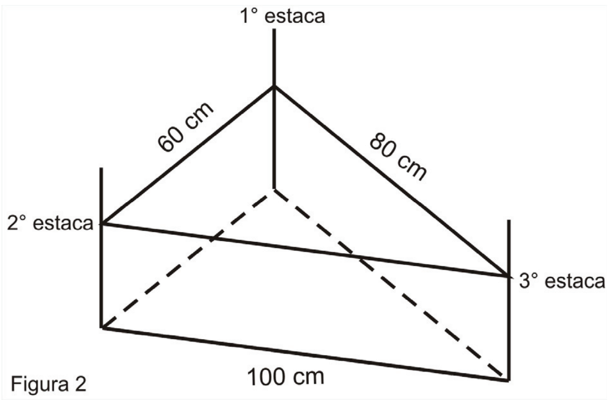
Conta a história que no Egito antigo, em torno do ano 3.600 a.C., as planícies que ficavam as margens do Rio Nilo, durante os meses do ano em que as águas baixavam, eram divididas em lotes para o plantio. Nessa divisão, havia necessidade de lotes retangulares, e para obtê-los era preciso marcar “ângulos retos”. Esses ângulos retos eram obtidos, mesmo que fosse de modo intuitivo, com a utilização do “Teorema de Pitágoras”, para o caso de um triângulo particular, cujos lados mediam 3,4 e 5 unidades de comprimento. O procedimento utilizado pelos egípcios era o seguinte:

Uma corda não elástica e com 13 nós igualmente espaçados, era esticada a partir de estacas fincadas no chão, de modo que em cada estaca ficasse um nó; além do que, a 1° e a 2° estacas ficavam a uma distância de três unidades. Feito isso, a 3° estaca seria fincada em um ponto, de modo a obter um triângulo cujos lados medissem 3, 4 e 5 unidades de comprimento, conforme ilustrado na figura ao lado:



Observação: Na estaca 1 estão o 1° e o 13° nós.

Procedendo desse modo, os homens que dividiam as terras sabiam que havia um ângulo reto localizado na 1° estaca. Isso nos faz crer que a Geometria surge a partir das necessidades naturais do ser humano.



Nos dias de hoje, quando se vai demarcar um terreno plano retangular, para em seguida iniciar a escavação do alicerce de uma construção, alguns mestres-de-obras usam um procedimento análogo ao que era utilizado pelos egípcios naquela época. Nesse caso, para marcar as quatro quinas de um retângulo, utilizam pedaços de tábuas medindo 60 cm, 80 cm e 100 cm, pregados em estacas, conforme ilustrado na figura ao lado:

Procedendo desse modo, os mestres-de-obras sabem que há um ângulo reto localizado na 1° estaca.

Esses dois exemplos de utilização da Geometria no cotidiano do ser humano, ilustrados nas figuras 1 e 2, nos servem para verificar as relações numéricas:

$5^2 = 4^2 + 3^2$ e $(5\cdot20)^2 = (4\cdot20)^2 + (3\cdot20)^2$, as quais são pitagóricas, ou seja, satisfazem ao Teorema de Pitágoras.

Com o passar dos séculos e dos milênios, a Matemática foi se desenvolvendo com os mais variados objetivos até que, no século III a.C, na Grécia, um dos maiores sábios da antiguidade, Euclides, sistematizou todo o conhecimento matemático até então conhecido, em uma magistral obra intitulada “Elementos”, na qual apresenta a Geometria Euclidiana de forma axiomática. Essa obra, ao lado da bíblia, é sem dúvida o livro mais reproduzido e estudado, de todos que já foram escritos, na história do mundo ocidental.

É claro que outras civilizações, além da egípcia e da Grega, também deram suas contribuições para o desenvolvimento da Matemática. Que me perdoem esses povos por não ter condições de citá-los aqui, porém fica aqui o convite àqueles leitores mais curiosos para que pesquisem um pouco da belíssima história da Matemática.

Unidade II: Preliminares da Geometria Euclidiana

1. - Situando a Temática

A Geometria Euclidiana tem como elementos básicos: o ponto, a reta e o plano, os quais são denominados “entes primitivos”. Os pontos e as retas serão representados, respectivamente, por letras maiúsculas e minúsculas do nosso alfabeto, enquanto um plano será geralmente representado por uma letra grega.

A partir desses três entes primitivos, os quais são aceitos sem definição, juntamente com cinco “noções comuns”, as quais parecem aceitas como hipóteses fundamentais a todas as ciências, e mais cinco axiomas (ou postulados) fundamentais, os quais seriam hipóteses peculiares da Geometria, Euclides apresenta como um sistema dedutivo, na sua obra “Elementos”, o que conhecemos como Geometria Euclidiana.

As cinco noções comuns são:

- Coisas que são iguais a uma mesma coisa são também iguais.
- Se iguais são adicionados a iguais, os totais são iguais.
- Se iguais são subtraídos de iguais, os restos são iguais.
- Coisas que coincidem uma com a outra são iguais.
- O todo é maior do que qualquer uma de suas partes.

Os cinco axiomas são:

1. Pode-se traçar uma única reta ligando quaisquer dois pontos distintos.
2. Pode-se continuar de uma única maneira qualquer segmento em uma reta.
3. Pode-se traçar um círculo com qualquer centro e com qualquer raio.
4. Todos os ângulos retos são iguais.
5. E verdade que, se uma reta, ao cortar duas outras, formando ângulos internos, no mesmo lado, cuja soma é menor do que dois ângulos retos, então as duas retas, se continuadas, encontrar-se-ão no lado onde estão os ângulos cuja soma é menor do que dois ângulos retos.

Ilustração Gráfica do 5° axioma

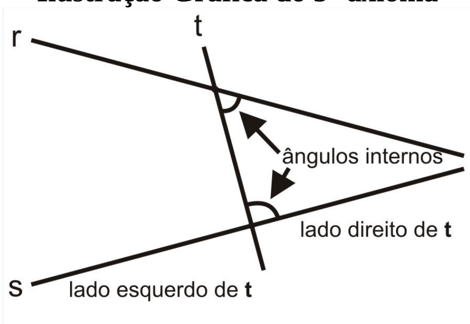


Figura 3

Observação:
Na ilustração gráfica acima, os dois ângulos internos (situados entre as retas **r** e **s**) representados, somam menos do que dois ângulos retos do lado direito da reta **t,** portanto o 5° axioma afirma que, se as retas **r** e **s** forem prolongadas, elas irão se encontrar desse lado.

Na realidade, ao escrever as noções comuns e os axiomas, não foram exatamente essas as palavras utilizadas por Euclides; além disso, especialistas em Geometria observaram que fica subtendida a utilização de outras hipóteses fundamentais. Uma coisa, não há dúvidas, é que o quinto axioma gerou, ao longo de mais de 2000 anos, uma das maiores polêmicas da Matemática. Conta-se que o próprio Euclides, teria chegado a desconfiar desse axioma.

Ao longo dos mais de 2000 anos após a obra de Euclides, muitos matemáticos ilustres obtiveram muitos resultados importantes para o desenvolvimento da Matemática, a partir de tentativas da negação ou da demonstração do 5° axioma.

Dialogando e construindo o seu conhecimento

Passemos agora a apresentar algumas definições básicas, fundamentais para construirmos os polígonos, os quais constituem os principais objetos de estudo da Geometria Plana. Para isso utilizaremos alguns conhecimentos oriundos do Ensino Básico, como por exemplo as correspondências biunívocas existentes entre

I. Os pontos de qualquer reta e o conjunto dos números reais, a qual é utilizada para medir segmentos de retas, com a utilização do “valor absoluto” e um sistema de unidades de medidas de comprimentos.
II. Os pontos de qualquer semicircunferência e o conjunto dos números reais de 0 a 180, o qual é utilizado para medir ângulos planos, em graus

Definição 1: Segmentos de Reta

Dados dois pontos distintos **A** e **B** em uma reta *r*, o conjunto de todos os pontos de *r,* entre A e B é dito segmento de reta, conforme ilustra a figura 4

Figura 4

Observações:

- Os pontos *A* e *B* são os extremos do segmento. *A* é extremo inicial e *B* extremo final.
- O segmento será representado por *AB* e sua medida por $\overline{AB}$, a qual é obtida a partir dos números reais correspondentes a *A* e *B* na reta *r*, tomando-se o valor absoluto da diferença entre esses números, considerados em um mesmo sistema de unidades de medidas de comprimento.
- Se do segmento *AB* for excluído *A* ou *B,* o comprimento não se altera.

Definição 2: Semi-reta

Dados uma reta *r* e um ponto *P* sobre *r,* cada uma das partes de *r*, constituídas pelo ponto *P* e todos os outros pontos de *r* que estão de um mesmo lado do ponto *P*, é dita semi-reta, conforme ilustra a figura 5**.**

Figura 5

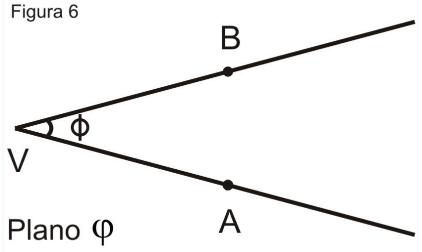
Observações:

- Os pontos *A* e *B* representados em *r*, diferenciam uma parte da outra, as quais serão denotadas por S_{PB} e S_{PA}, respectivamente, para as semi-retas que têm origem em *P* e passam por *B* ou por *A.*
- Uma reta *r* em um plano φ, divide o plano em duas partes, cuja interseção é *r*. Cada uma dessas partes é dita semiplano.

Definição 3: Ângulo Plano

A região do plano formada por quaisquer duas semi-retas de mesma origem, é denominada ângulo plano, conforme ilustra a figura abaixo:

Figura 6



Observações

- As semi-retas de mesma origem serão denotadas por S_{VA} e S_{VB}. Elas são os lados do ângulo e V é o vértice.
- O ângulo pode ser representado de algumas maneiras, como por exemplo $A\hat{V}B$ (ou $B\hat{V}A$). Dependendo do contexto poderemos utilizar outras representações.
- A medida do ângulo será representada por *“med* $A\hat{V}B$ *”*, o que significa *“medida do ângulo* $A\hat{V}B$ ”. Nesse caso, utilizamos na figura a letra grega ϕ *(fi)* para denotar essa medida.
- Quando os pontos *A, V* e *B* estiverem sobre uma mesma linha reta (alinhados), $A\hat{V}B$ é dito “ângulo raso” e sua medida é 180° (*ou π radianos*)
- Quando as semi-retas S_{VA} e S_{VB} coincidirem teremos um ângulo nulo, cuja medida é 0° (ou zero radiano).
- Qualquer ângulo plano divide o plano onde ele está situado em duas partes, uma delas é o seu interior e a outra o exterior. A parte onde, dados dois pontos quaisquer *A* e *B*, o segmento de reta *AB* está inteiramente contido nela, é o interior. Esse tipo de caracterização, o qual será utilizado a seguir, para a definição de polígonos convexos, só é satisfeita em ambas as partes, quando o ângulo é raso.
- Note que a medida de um ângulo plano, representado pela letra ϕ, na figura anterior, está associada ao interior do ângulo. O caso do ângulo raso, $\phi = 180°$, independentemente de associarmos a medida ao

Definição 4: Ângulo Reto

Um ângulo reto é aquele cuja medida é 90°.

Definição 5: Ângulos opostos pelo vértice.

Quando duas retas *r* e *s* interceptam-se em um único ponto *V*, como ilustra a figura abaixo, os dois pares de ângulos determinados $A\hat{V}B$ e $C\hat{V}D$, bem como $A\hat{V}C$ e $B\hat{V}D$ são denominados “opostos pelo vértice”.

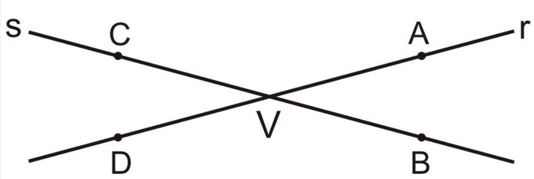


Figura 7

Observações

- Quando fixamos qualquer uma das duas retas (*r* ou *s*) e olhamos para cada semiplano determinado por ela, temos dois ângulos que juntos perfazem um ângulo raso; diremos que um é o suplemento do outro ou que os dois são suplementares, por exemplo: $A\hat{V}C$ e $C\hat{V}D$ são suplementares.
- Caso qualquer um desses ângulos seja reto, os outros três também serão e as retas *r* e *s*, nesse caso, são ditas perpendiculares.

Para finalizar esta unidade, apresentaremos duas proposições e suas demonstrações.

Teorema 1:

Se dois ângulos são opostos pelo vértice, então eles têm a mesma medida.

Demonstração

Sejam r e s duas retas que se interceptam em um único ponto V. Considere o par de ângulos $A\hat{V}B$ e $C\hat{V}D$ opostos pelo vértice, conforme ilustrado na figura 8:

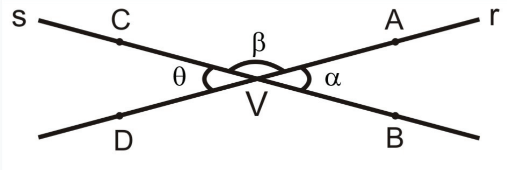


Figura 8

Gostaríamos de mostrar que $\alpha = \theta$. Para isso, note que $A\hat{V}B$ e $A\hat{V}C$ bem como $C\hat{V}D$ e $A\hat{V}C$ são suplementares. Portanto $\alpha + \beta = 180°$ e $\theta + \beta = 180°$, donde se segue que $\alpha + \beta = \theta + \beta$ e portanto $\alpha = \theta$.

> **Observação:** Caso tivéssemos escolhido o outro par de ângulos opostos pelo vértice, $A\hat{V}C$ e $B\hat{V}D$, teríamos mostrado, de modo inteiramente análogo, que os mesmos têm a mesma medida.

Teorema 2:

Por qualquer ponto P de uma reta r, existe uma única reta s, perpendicular a r.

Demonstração

1° Parte: Existência

Dados a reta r e um ponto P sobre ela, as duas semi-retas determinadas por P, em r, formam um ângulo raso. Considere agora um dos semiplanos determinados por r, nesse semiplano, podemos postular que existirá uma semi-reta, dentre todas que tem origem em P, a qual será perpendicular à reta r. O prolongamento da semi-reta S_{PQ} nos dá a reta s perpendicular a r, pelo ponto P, conforme ilustra a figura 9:

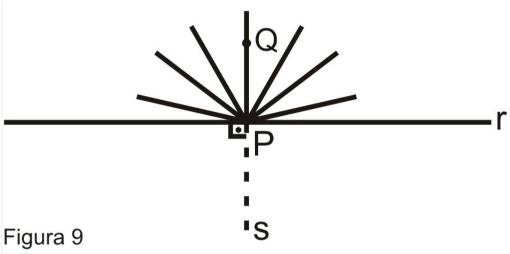


Figura 9

2° Parte: Unicidade

Para obtermos a unicidade, vamos supor que existam duas retas t e s, passando por P e ambas perpendiculares a r. Em um dos semiplanos determinados por r, obtemos três ângulos, cujas medidas são β, α e θ, conforme ilustrado na figura 10:

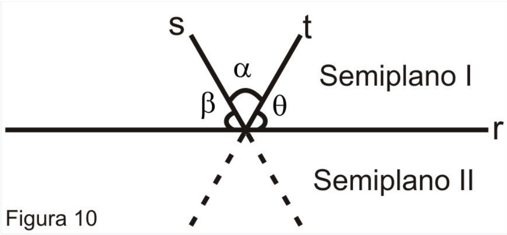


Figura 10

Por um lado, em virtude dos três ângulos, no semiplano I, somarem um ângulo raso, obtemos que $\alpha + \beta + \theta = 180°$. Como s e t são perpendiculares a reta r, segue-se que $\beta = \theta = 90°$ e portanto, da igualdade anterior, decorre que $\alpha + 90° + 90° = 180°$ e assim $\alpha = 0°$. Isto significa que as retas s e t são coincidentes, ficando assim provado a unicidade.

> **Observação:**
>
> Na demonstração da unicidade, foi utilizado o princípio de redução ao absurdo!!! Pois, no início, fizemos a suposição de que existisse mais de uma. Ao final chegamos que as retas s e t, supostamente distintas, coincidem.

Definição 6: Poligonal

Dados n segmentos de reta $A_0A_1, A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-2}A_{n-1}$ e $A_{n-1}A_n$, $n \geq 2$, onde a partir do segmento A_1A_2, a extremidade final do anterior coincide com a extremidade inicial do seguinte. A figura formada por esses segmentos assim dispostos, é denominada **poligonal**. As extremidades e os segmentos são denominados, respectivamente, vértices e lados da poligonal.

Aqui, só iremos trabalhar com poligonais (ou linhas poligonais), onde todos os segmentos vão estar em um mesmo plano.

Exemplos Ilustrativos

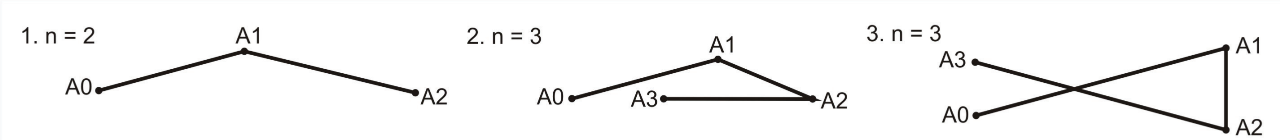


Figura 11

Em 3, A_0A_1 e A_2A_3 interceptam-se fora das extremidades

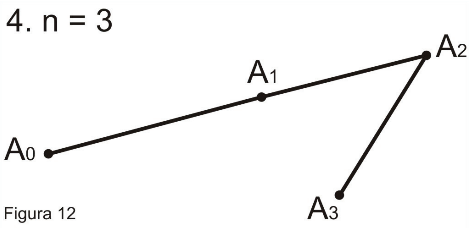


Figura 12

Aqui, $A_0\ A_1$ e $A_1\ A_2$ são "colineares", pois $A_{0,}$ A_1 e A_2 estão alinhados. Além disso, eles são "consecutivos" pois um vem logo após o outro.

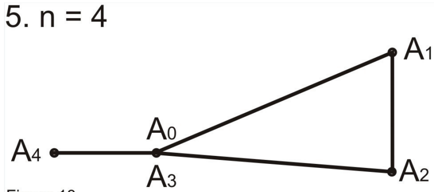


Figura 13

Aqui, A_0 coincide com A_3

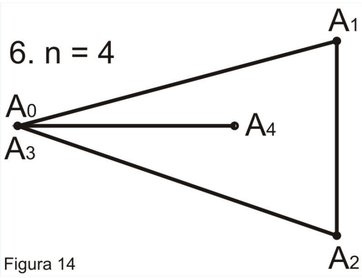


Figura 14

Aqui, também A_3 coincide com A_0

Figura 15

Aqui, A_4 coincide com A_0 e ai, começa e termina a poligonal

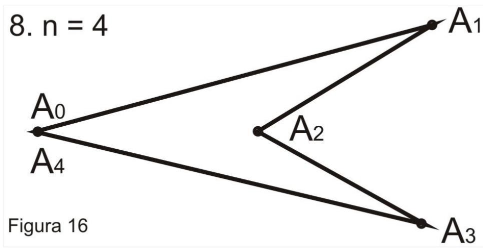


Figura 16

Aqui, A_4 também coincide com A_0 e ai, a poligonal

também começa e termina.

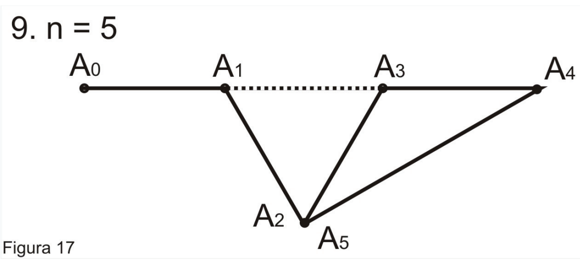


Figura 17

Aqui, A_5 coincide com A_2 e além disso A_0A_1 e A_3A_4 são colineares

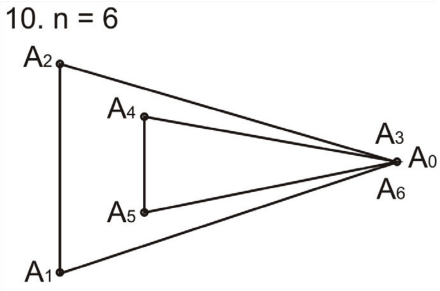


Figura 18

Aqui, A_0 coincide com A_3 e A_6

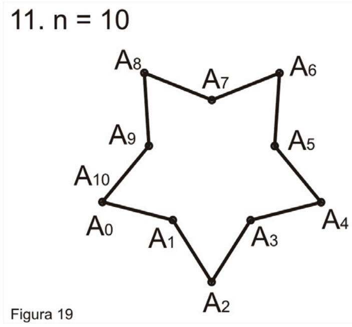


Figura 19

Aqui, A_{10} coincide com A_0 e ai, começa e termina a poligonal.

Ampliando o seu conhecimento...

Imaginem que fôssemos aqui explorar poligonais em três dimensões, teríamos uma variedade de exemplos muito mais diversificada. Como o nosso objetivo é chegar à definição de polígonos no plano, não se faz necessário esse tipo de exploração, no entanto é salutar e deveras recomendável aos leitores, usarem da sua imaginação para obter exemplos de linhas poligonais tridimensionais.

Definição 7: Polígonos

Uma linha poligonal com n lados, $n \geq 3$, sem segmentos consecutivos colineares, sem interseções fora das extremidades e cujo ultimo vértice coincide com o primeiro, apenas no momento em que a poligonal fecha, é dita polígono, o qual será representado por $A_0A_1A_2 \ldots A_{n-1} A_n$.

Observações

- Os vértices $A_0, A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 3)$ e os segmentos $A_0A_1, A_1A_2, \ldots, A_{n-1} A_n$ são ditos, respectivamente, os vértices e os lados do polígono. O segmento de reta que liga dois vértices não consecutivos é dito diagonal do polígono.

- Dos exemplos ilustrativos de poligonais apresentados anteriormente, note que

  - ❖ 1 e 2 não representam polígonos pois não são poligonais fechadas

  - ❖ 3 não representa polígono pois, além da poligonal não ser fechada, ocorre interseção de lados fora das extremidades.

  - ❖ 4 não representa polígono pois, além da poligonal não ser fechada, os lados A_0A_1 e A_1A_2 são consecutivos colineares.

  - ❖ 5, 6 e 9 não representam polígonos, pois o último vértice de cada uma dessas poligonais não coincide com o primeiro.

  - ❖ 10 não representa polígono pois, apesar do primeiro e o último vértice coincidirem, há ainda um outro vértice que coincide com os mesmos.

  - ❖ 7, 8 e 11 representam polígonos, pois satisfazem às condições da definição.

- Todo polígono divide o plano em duas partes, onde apenas uma delas é limitada. A parte ilimitada do plano, associada ao polígono é o seu exterior, a outra parte é o seu interior.

- Em cada vértice de um polígono vamos sempre associar um ângulo interno e um externo.

Definição 8: Polígonos Convexos

Um polígono é dito convexo, quando dados quaisquer dois pontos *A* e *B* no seu interior, o segmento de reta *AB* está inteiramente contido no interior do polígono.

Observações

Dos três exemplos de polígonos, ilustrados anteriormente, somente o que está representado em *7* é convexo. Nos exemplos *8* e 11 temos polígonos não convexos.

Em cada vértice *V*, de um polígono convexo, o ângulo determinado pelas duas semi-retas que têm origem em *V* e contém os dois lados que por ele passam é denominado ângulo interno do polígono. Já o suplemento do ângulo interno é denominado ângulo externo.

Definição 9: Polígonos Regulares

Um polígono no qual todos os lados têm a mesma medida e todos os ângulos também têm a mesma medida é denominado Polígono Regular.

Exemplo Ilustrativo

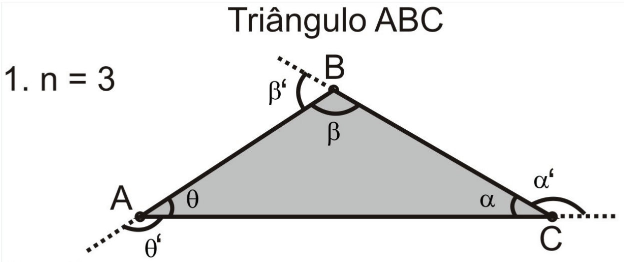


Figura 20

Os ângulos internos do triângulo *ABC*, podem ser representados por $C\hat{A}B$, $A\hat{B}C$ e $B\hat{C}A$, cujas medidas são, respectivamente, α, β, θ conforme representado na figura acima.

Os ângulos externos do triângulo *ABC* podem ser representados a partir dos prolongamentos dos lados, conforme ilustrado na figura acima, com medidas α', β', θ'.

Na natureza, algumas espécies de abelhas constroem seus favos em forma de tubinhos, onde aparecem polígonos de seis lados. As aranhas tecem suas teias, criando padrões poligonais variados.

Para o leitor mais observador, não só as formas poligonais, como quaisquer outros tipos são notados no mundo que nos rodeia...

Junte-se com mais algumas pessoas do curso e, juntos, tentem executar as seguintes tarefas:

TAREFA 1

Dispondo de papel, lápis e material para desenho, esboce, em uma folha de papel, um polígono com três lados, sendo cada um deles com 5 cm. Espero que todos consigam!!! Em seguida, para os que conseguiram, recorte com o auxílio de uma tesoura (por exemplo) o interior do polígono. Após cada um ter recortado, preferencialmente cada um trabalhando isoladamente, tente observar se podem ser superpostos um ao outro.

TAREFA 2

Repita a TAREFA 1, mudando apenas de três para quatro lados, sendo cada um deles com 5 cm.

Essas tarefas são motivadoras para a introdução, na próxima unidade, do conceito de congruência de triângulos.

Unidade III: Congruência de Triângulos

1. - Situando a Temática

Neste capítulo, introduziremos o conceito de congruência de triângulos. A idéia principal é dar condições de podermos trabalhar com "cópias fiéis" de figuras geométricas. Particularmente, nos interessaremos aqui pelos triângulos. É claro que poderíamos utilizar figuras geométricas das mais variadas formas, isso se faz necessário, por exemplo, numa indústria cujo objetivo é a produção, em série, de qualquer tipo de objeto.

Apresentaremos aqui algumas definições básicas, além dos três casos clássicos de congruência de triângulos e algumas consequências.

Definição 1: Segmentos Congruentes

Dois segmentos de reta são ditos congruentes quando eles têm a mesma medida.

Notação: $AB = CD$ significa "segmento AB é congruente ao segmento CD".

Definição 2: Ângulos Congruentes

Dois ângulos planos são congruentes quando eles têm a mesma medida.

Notação: $A\hat{B}C = D\hat{E}F$ significa "ângulo $A\hat{B}C$ é congruente ao ângulo $D\hat{E}F$"

Definição 3: Triângulos Congruentes.

Dois triângulos ABC e DEF são ditos congruentes, quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e do outro, de modo que aos vértices correspondentes estão associados ângulos congruentes e os lados opostos aos vértices correspondentes também são congruentes, e serão denominados de lados "homólogos".

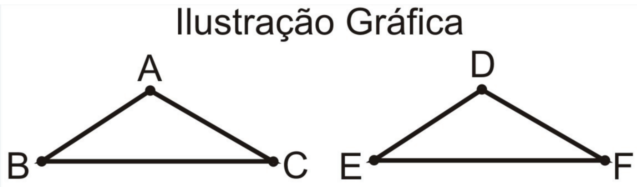


Figura 21

Admitimos a correspondência biunívoca:

$A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E \text{ e } C \leftrightarrow F$

Neste caso, a congruência entre os triângulos *ABC e DEF*, a qual será denotada por $ABC = DEF$, significa que:

$$A\hat{B}C = D\hat{E}F,\ B\hat{C}A = E\hat{F}D,\ C\hat{A}B = F\hat{D}E,\ AB = DE,\ BC = EF \text{ e } CA = FD\ .$$

Exemplos Ilustrativos

(1) Na figura ao lado, estão representados os triângulos *ABC e DEF*, com as respectivas medidas dos seus lados, em uma mesma unidade de comprimento. Sabendo-se que $ABC = DEF$, calcule se possível, o(s) valor(es) de x, y e z.

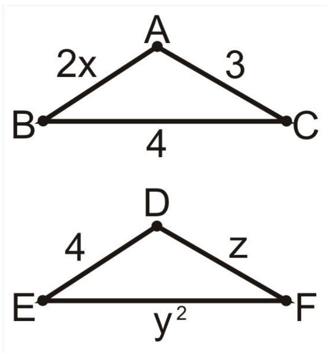


Figura 22

Resolução

ABC = DEF significa que o triângulo *ABC* é congruente ao triângulo *DEF* é a correspondência biunívoca entre os vértices é dada por: $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E \text{ e } C \leftrightarrow F$, portanto segue-se que

$$AB = DE \qquad 2x = 4 \qquad x = \frac{4}{2} = 2$$

$$BC = EF \quad \therefore \quad 4 = y^2 \quad \therefore \quad y = \pm\sqrt{4} = \pm 2$$

$$CA = FD \qquad 3 = z \qquad z = 3$$

Resposta: $x = 2, y = \pm 2 \text{ e } z = 3$

Ainda com relação ao exemplo anterior, note que

$\overline{AB} = \overline{BC} = 4, \overline{CA} = 3 \text{ e } \overline{DE} = \overline{EF} = 4, \overline{FD} = 3$. Além disso temos $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \text{ e } \hat{C} = \hat{F}$.

(2) Dados dois triângulos *ABC* e *DEF* congruentes, com *AB = DE, BC = EF* e *CA = FD;* sabe-se que as medidas, em graus, dos ângulos internos desses triângulos, estão representadas na figura abaixo. Calcule, se possível, o(s) valor(es) de α, β e γ.

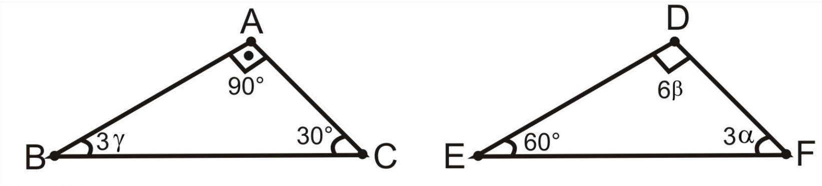


Figura 23

Resolução

A partir das hipóteses do problema, seguem-se as seguintes conclusões:

BC = EF $\rightarrow$ *o vértice A é correspondente do D*

CA = FD $\rightarrow$ *o vértice B é correspondente do E*

AB = DE $\rightarrow$ *o vértice C é correspondente do F*

Daí, decorre que $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E} \text{ e } \hat{C} = \hat{F} \text{ e } \hat{C} = \hat{F}$, donde obtemos:
$90° = 6\beta \therefore \beta = 15° \text{ e } 3\lambda = 60° \therefore \lambda = 20° \text{ e } 30° = 3\alpha \therefore \alpha = 10°$

Resposta: $\alpha = 10°, \beta = 15° \text{ e } \lambda = 20°$

Observação

Quando tivermos dois triângulos congruentes, representados em uma folha de papel, ao recortarmos os pedaços da folha, correspondentes aos interiores dos dois triângulos, poderemos verificar que é possível obtermos superposição de um dos pedaços sobre o outro. É claro que a precisão desses recortes vai depender muito do instrumento de corte, bem como da pessoa encarregada de recortar. Nesse caso, foram recortadas duas formas triangulares, mas é claro que vale o mesmo para duas figuras geométricas congruentes quaisquer. Inclusive, em virtude disso, cometemos muito frequentemente, o abuso de linguagem, que ao invés de usarmos a terminologia “figuras geométricas congruentes”, em lugar do termo “congruentes” usamos “iguais” que não é correto. No entanto, o mais importante é que o conceito tenha sido compreendido.

Na observação anterior foi descrito um "procedimento experimental", o qual também podemos chamar de verificação concreta informal da congruência de duas figuras geométricas planas. O princípio utilizado foi o da superposição. No entanto, do ponto de vista teórico-formal da Matemática, isto não constitui uma demonstração, uma vez que as demonstrações matemáticas podem até utilizar figuras como auxiliares, mas não podem depender diretamente de figuras ou recortes... Até o presente momento, só foram apresentadas duas demonstrações matemáticas, para os teoremas 1 e 2, localizados na unidade 2. A partir da apresentação dos casos clássicos de congruência de triângulos, passaremos a dar mais ênfase às demonstrações, tornando a apresentação do conteúdo aqui presente cada vez mais formal.

Casos de Congruência de Triângulos

O primeiro caso de congruência de triângulos, o qual será codificado por LAL ou Lado – Ângulo – Lado será admitido como verdadeiro, sem uma demonstração, por isso vamos batizá-lo de Axioma. Os 2° e 3° casos, serão codificados, respectivamente por ALA ou Ângulo – Lado – Ângulo e LLL ou Lado – Lado – Lado. Estes dois serão demonstrados e também apresentaremos algumas consequências dos mesmos.

Axioma (1° caso: LAL)

Se, em dois triângulos ABC e DEF, temos $AB = DE$, $\hat{B} = \hat{E}$ e $BC = EF$, então ABC = DEF.

Note que, nesse caso de congruência, necessitamos apenas de verificar três igualdades, ao passo que, pela definição de congruência, necessitamos de verificar seis igualdades, três das quais dizem respeito à congruência de lados e outras três à congruência de ângulos.

Refletindo...

Essencialmente, o que o 1° caso de congruência de triângulos nos garante é que um triângulo fica muito bem determinado, a menos de congruência, por um de seus três ângulos internos e pelos dois lados que formam esse ângulo.

Teorema 1: (2° caso: ALA)

Se, em dois triângulos ABC e DEF, temos $\hat{A} = \hat{D}$, $AB = DE$ e $\hat{B} = \hat{E}$, então ABC = DEF.

Demonstração

Sejam ABC e DEF dois triângulos, nos quais $\hat{A} = \hat{D}$, $AB = DE$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Gostaríamos de mostrar que $ABC = DEF$. Para isso, vamos inicialmente marcar um ponto G na semi-reta S_{AC}, de modo que $AG = DF$, conforme ilustrado na figura abaixo.

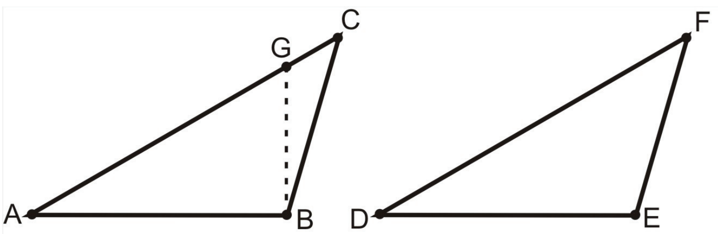


Figura 24

Note agora, que pelo caso de congruência LAL, segue-se que $ABG = DEF$, pois $AG = DF$ (por construção), $\hat{A} = \hat{D}$ (por hipótese) e $AB = DE$ (por hipótese). Como consequência da congruência dos triângulos ABG e DEF, obtemos que $A\hat{B}G = \hat{E}$. Mas, por hipótese, $A\hat{B}C = \hat{E}$, logo $A\hat{B}G = A\hat{B}C$. E consequentemente as semi-retas S_{BG} e S_{BC} coincidem. Portanto também coincidem os triângulos ABC e ABG. Como já provamos anteriormente que $ABG = DEF$, segue-se que $ABC = DEF$, como queríamos demonstrar.

Refletindo...

Essencialmente, o 2° caso de congruência de triângulos nos garante que, a menos de congruência, um triângulo fica muito bem determinado por um de seus lados e pelos dois ângulos situados nos vértices desse lado.

Vamos agora obter algumas conseqüências, mas, antes disso, apresentaremos algumas definições.

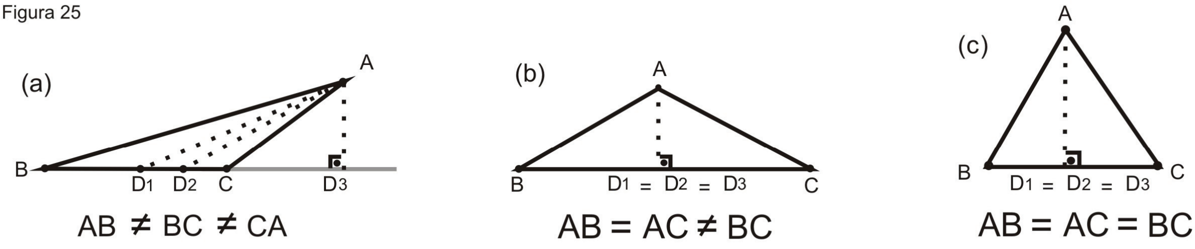
Definição 1:

Considere *ABC* um triângulo qualquer e *D* um ponto na reta que passa por *B* e *C*. Quando *D* for ponto médio de *BC* (isto é: BD = DC), o segmento de reta AD é dito mediana do triângulo *ABC*, relativamente ao lado *BC*.

Quando a semi-reta S_{AD}, dividir o ângulo $C\hat{A}B$ em dois ângulos congruentes, o segmento *AD* é dito bissetriz do ângulo $\hat{A}$, isto é, $C\hat{A}D = D\hat{A}B$.

Quando *AD* for perpendicular à reta que possa por *B* e *C*, o segmento *AD* é dito altura do triângulo *ABC*, relativamente ao lado *BC*. (Ver ilustração nas figuras abaixo)

Figura 25



Nos triângulos acima, estão representadas as medianas AD_1 e as alturas AD_3 relativas ao lado *BC*, e as bissetrizes AD_2 do ângulo $\hat{A}$. Em cada caso, temos $BD_1 = D_1C$, $B\hat{A}D_2 = C\hat{A}D_2$ e o ângulo $A\hat{D}_3C$ é reto. Em (a), mediana, bissetriz e altura são todas distintas. Em (b) e (c) todas coincidem. Já se, ao invés do vértice *A*, tivéssemos tomado como referência o vértice *B* ou *C*, em (a) e (b) teríamos todas distintas, enquanto que em (c) todas coincidentes.

Note que sempre existem três medianas, três bissetrizes e três alturas, em qualquer triângulo. Um dos muitos fatos interessantes sobre os triângulos é que as três medianas têm um ponto em comum. Isso também é verdadeiro para as bissetrizes e alturas.

Definição 2:

Dado um triângulo, quando dois dos seus lados são congruentes, ele é dito isósceles. Neste caso, esses dois lados congruentes são denominados laterais, enquanto o outro é a base do triângulo. Já quando os três lados do triângulo são congruentes, ele é dito equilátero. E se quaisquer dois lados de um triângulo não são congruentes, ele é dito escaleno.

É importante notar que um triângulo com os três lados congruentes (equilátero), evidentemente tem dois lados congruentes, portanto é isósceles. Este argumento justifica a proposição.

P: Se um triângulo é equilátero, então ele é isósceles.

A recíproca da proposição P é

Q: Se um triângulo é isósceles, então ele é equilátero.

Enquanto P é verdadeira, Q é falsa. Pois o triângulo pode ter dois lados congruentes, sem que o terceiro lado seja congruente a nenhum dos outros dois.

Na linguagem da lógica simbólica, podemos então concluir que, as proposições "um triângulo é isósceles" e "um triângulo é equilátero", não são equivalentes.

Teorema 2:

Se um triângulo é isósceles, então os ângulos da base são congruentes.

Demonstração

Seja *ABC* um triângulo isósceles, no qual *AB* = *AC*. Gostaríamos de mostrar que $\hat{B}=\hat{C}$.

Para isso, consideremos duas cópias do triângulo, conforme a figura abaixo.

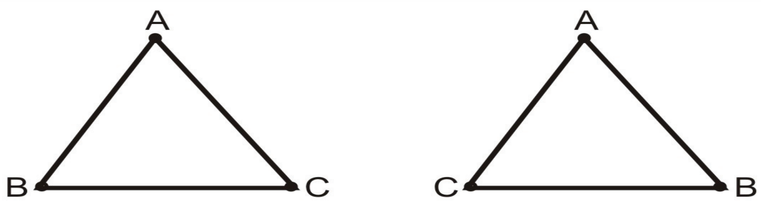


Figura 26

Ao estabelecermos a correspondência biunívoca $A \leftrightarrow A, B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow B$, obtemos que *ABC* = *ACB*, pois *AB* = *AC* e *AC* = *AB,* por hipótese, enquanto $B\hat{A}C = C\hat{A}B = \hat{A}$, já que qualquer ângulo é igual a si próprio. A congruência dos triângulos *ABC* e *ACB* decorre do caso *LAL*. Finalmente, como na correspondência biunívoca estabelecida acima, temos $B \leftrightarrow C$. Decorre dai, que $\hat{B}=\hat{C}$, como queríamos demonstrar.

Teorema 3:

Se um triângulo *ABC* tem dois ângulos congruentes, então ele é isósceles.

Demonstração

Considere um triângulo *ABC,* no qual $\hat{B}=\hat{C}$. Gostaríamos de mostrar que *AB* = *AC*. Para isso, consideremos as duas cópias do triângulo e a correspondência biunívoca, como na demonstração do teorema 2 acima. Como $\hat{B}=\hat{C}$ e $\hat{C}=\hat{B}$, segue-se pelo caso *ALA*, que a correspondência biunívoca $A \leftrightarrow A$, $B \leftrightarrow C$ e $C \leftrightarrow A$ nos garante a congruência dos triângulos *ABC* e *CAB*, dai decorre particularmente que *AB* = *AC*, como queríamos demonstrar.

Teorema 4:

Se um triângulo é isósceles, então a mediana relativa à base também é bissetriz e altura.

Demonstração

Sejam *ABC* um triângulo isósceles de base *BC* e *AD* sua mediana relativa à base. Gostaríamos de mostrar que $B\hat{A}D = C\hat{A}D$ e $A\hat{D}C$ é um ângulo reto. Para isso, considere os triângulos *CDA* e *BDA,* conforme ilustrado na figura ao lado.

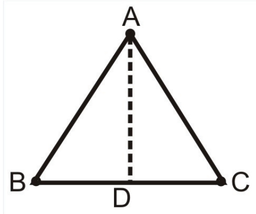


Figura 27

Ao observarmos os triângulos *CDA* e *BDA*, notemos que:

i. *AB = AC,* pois *ABC* é isósceles com base *BC.*

ii. $\hat{B} = \hat{C}$, conforme provado no teorema 3.

iii. *BD = DC,* pois, por hipótese, *AD* é mediana.

De (i), (ii) e (iii), segue-se pelo caso *LAL*, que *CDA = BDA,* portanto, dessa congruência decorre que $B\hat{A}D = C\hat{A}D$, isto significa que *AD* é bissetriz do ângulo *Â*. Da mesma congruência também decorre que $C\hat{D}A = B\hat{D}A$. Como $C\hat{D}A + B\hat{D}A = 180°$, obtemos que $C\hat{D}A = B\hat{D}A = 90°$, como queríamos demonstrar.

Teorema 5: (3° caso: *LLL*)

Se, em dois triângulos *ABC* e *DEF*, temos *AB = DE, BC = EF* e *CA = FD*, então *ABC = DEF.*

Demonstração

Sejam *ABC* e *DEF* dois triângulos tais que *AB = DE, BC = EF* e *CA = FD.* Gostaríamos de mostrar que *ABC = DEF.* Para isso, construa a partir do vértice *A,* um segmento de reta *AG = DF* tal que o ângulo $G\hat{A}B = \hat{D}$. Em seguida ligue *G* a *B*, para obter o triângulo *AGB*, conforme ilustrado na figura abaixo.

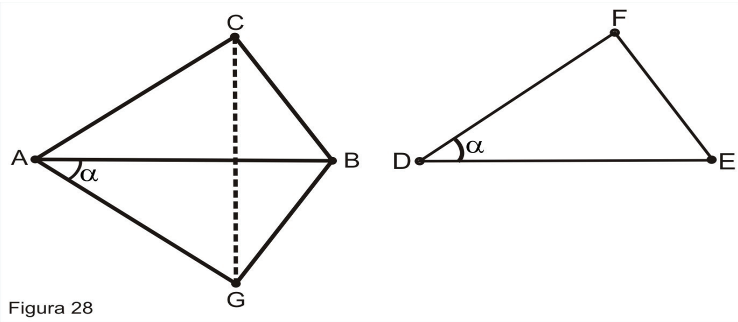


Figura 28

O ponto *G* é escolhido de modo que os pontos *G* e *C* fiquem em semiplanos distintos, os quais têm em comum a reta que passa pelos pontos *A* e *B.*

Observemos agora que *AG = DF = AC* e *GB = EF = BC*, portanto os triângulos *AGC* e *BGC* são isósceles com base comum *CG*. Dai, segue-se que $A\hat{G}C = A\hat{C}G$ e $B\hat{G}C = B\hat{C}G$, portanto $A\hat{G}C + B\hat{G}C = A\hat{C}G + B\hat{C}G$ e esta igualdade equivale a dizer que $\hat{G} = \hat{C}$, esse fato, juntamente com *AG = AC* e *GB = BC* nos garante, pelo caso *LAL,* que os triângulos *ABG* e *ABC* são congruentes. Como já mostramos que *ABG* e *DEF* são congruentes, segue-se que *ABC* e *DEF* também são congruentes (note que, nessa conclusão final, usamos o fato de que “dois triângulos que são congruentes a um terceiro, também são congruentes entre si”). Isto conclui a demonstração do Teorema.

Ampliando o seu conhecimento...

Esse caso de congruência de triângulo *LLL*, pode ser interpretado a partir da seguinte situação prática:

Dadas as três medidas dos lados de um triângulo, quaisquer desenhos desse triângulo em uma folha de papel, após recortados, superpõem-se uns aos outros. Isso significa que as medidas dos três lados, amarram as medidas dos três ângulos internos. Só o triângulo tem essa característica, dentre todos os polígonos. Esta é possivelmente a propriedade mais interessante do triângulo, por isso o 3° caso também é conhecido como "Rigidez do Triângulo". Há muitas e belas aplicações desse fato em projetos de estruturas, particularmente em Engenharia Civil.

Apresentamos ao lado a ilustração da porteira de uma fazenda, construída com cinco traves de madeira, presas entre si. O que aconteceria com a rigidez dessa porteira, caso não existisse a trave da diagonal?

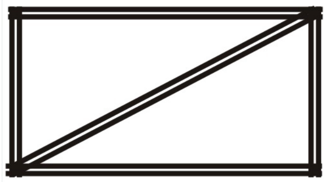


Figura 29

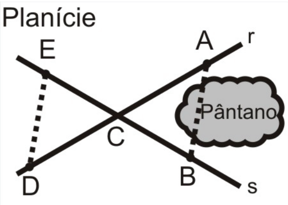


Figura 30

Uma outra situação interessante, a qual também mostra a importância dos casos de congruência de triângulos, é ilustrada na figura ao lado; onde temos uma planície com uma região pantanosa, na qual gostaríamos de fazer medições, sem ter acesso ao pântano, sendo possível fazer medições fora dele. **Como calcular a distância de *A* até *B*?**

O procedimento para o cálculo da distância de *A* até *B* é o seguinte:

1° Passo

Nas retas *r* e *s*, a partir do ponto *C*, marque os pontos *D* e *E*, respectivamente nas retas *r* e *s*, de modo que $AC = CD$ e $BC = CE$.

2° Passo

Ligue os pontos *D* e *E* por um segmento de reta para obter o triângulo *CDE*

3° Passo

Compare os triângulos *CDE* e *CBA*. Para isso, note que $AC = CD$ (por construção), $A\hat{C}D = E\hat{C}D$ (ângulos opostos pelo vértice) e $BC = CE$ (por construção). Destas congruências, segue-se pelo caso *LAL*, que os triângulos *CDE* e *CBA* são congruentes.

4° Passo

Da congruência obtida no 3° passo, obtemos em particular, que os lados *DE* e *BA* são homólogos (ou correspondentes), por serem opostos a ângulos congruentes. Portanto *DE* e *BA* são congruentes.

Conclusão: A distância de *A* até *B* é igual à distância de *D* até *E*, a qual é possível ser medida fora do pântano.

Mais uma situação, cuja origem também está no dia-a-dia, começa quando nos olhamos diante de um espelho (plano!), e percebemos que "nossas medidas", lá na imagem, devem ser iguais, ou melhor dizendo, são iguais as nossas medidas reais... Podemos, a partir dessa situação, elaborar o seguinte problema:

Imagine que um espelho plano seja representado por uma reta *r*, e que os pontos *A* e *B*, refletidos nesse espelho, tenham como respectivas imagens, *A'* e *B'*. Gostaríamos de mostrar que as medidas dos segmentos *AB* e *A'B'* são iguais. Esse problema será resolvido na Unidade IV.

O caminho para se chegar até a resolução de um problema começa com uma rica “leitura e compreensão”, seguida naturalmente da tentativa de “descoberta de uma estratégia” de resolução do problema. Descoberta uma, ou mais de uma estratégia de resolução, o passo seguinte é a escolha e implementação de uma estratégia, para após sua “execução”, chegar a uma provável “solução do problema”, que após uma “verificação”, torna-se de fato uma solução para o problema. Essas etapas, constituem parte da “metodologia de Resolução de Problemas”, segundo a Heurística de George Pólya*.[*]

Para concluir estes comentários, gostaríamos de enfatizar aqui a necessidade e o poder da “argumentação matemática”, quer seja nas demonstrações de teoremas ou nas aplicações a situações-problema do cotidiano. Os exemplos ilustrativos aqui apresentados têm a intenção de facilitar a compreensão das idéias aqui exploradas, quer sejam na forma de definições básicas, axiomas, demonstrações de teoremas, exemplos ilustrativos, etc.

Por fim, enfatizamos aqui que, nesse nível de aprendizagem da Geometria, onde a dedução formal e o rigor matemático são protagonistas, a “Geometria Experimental” não deixa de ter a sua importância, mesmo que seja como coadjuvante. É bom lembrar aqui que, no Ensino Fundamental, a Geometria é introduzida informalmente, com forte apelo ao mundo concreto do cotidiano, com a utilização do lúdico, porém com o objetivo de, nos últimos anos desse nível, convergir gradativamente para o lógico-dedutivo. Isso de acordo com o modelo Van Hiele de desenvolvimento do pensamento geométrico, ver referencia bibliográfica [3].

[*] George Pólya (1887 – 1985) Matemático Húngaro

Unidade IV: O Teorema do Ângulo Externo e Consequências

1. - Situando a Temática

Nesta unidade, o teorema do ângulo externo não é apresentado como na grande maioria dos textos do Ensino Básico; ao invés de uma igualdade, usaremos uma desigualdade Geométrica. Dentre as consequências aqui apresentadas, destacam-se a existência e unicidade da perpendicular a uma reta *r*, por um ponto *P*, fora dela, e a desigualdade triangular.

Definição 1:

Dado um triângulo *ABC*, ao prolongarmos, a partir de cada vértice, as semi-retas S_{AB}, S_{BC} e S_{CA}, obtemos três ângulos, cada um dos quais é o suplemento de um dos ângulos internos. Cada um deles é dito "ângulo externo" do triângulo *ABC* conforme ilustrado na figura abaixo:

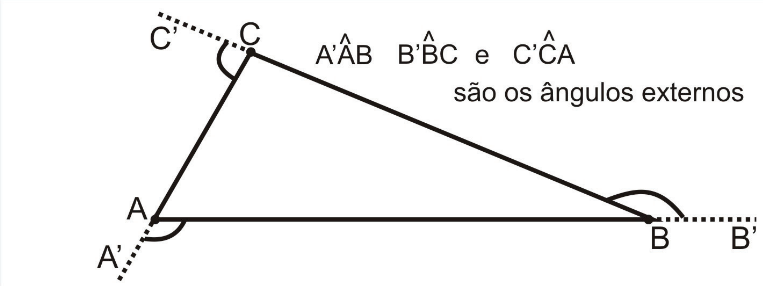


Figura 31

Teorema 1: (Teorema do Ângulo Externo)

Qualquer ângulo externo de um triângulo é maior do que os dois ângulos internos que não lhe são adjacentes.

Demonstração

Sejam *ABC* um triângulo e $B'\hat{B}C$ um dos seus três ângulos externos, conforme ilustra a figura ao lado. Gostaríamos de mostrar que $B'\hat{B}C > \hat{C}$ e $B'\hat{B}C > \hat{A}$.

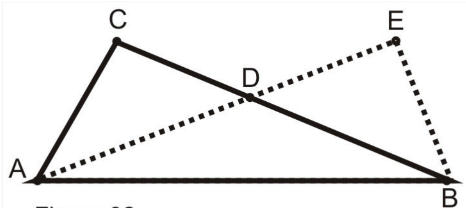


Figura 32

Primeiramente vamos marcar um ponto *D*, em *BC*, de modo que *BD* = *DC* (*D* é o ponto médio do segmento *BC*). Em seguida, prolonguemos a semi-reta S_{AD} até um ponto *E*, de modo que *D* seja ponto médio de *AE*. Liguemos agora os pontos *B* e *E* e comparemos os triângulos *ADC* e *EDB.* Note que:

BD = *DC,* pois *D* é ponto médio de *BC,* $C\hat{D}A = B\hat{D}E$, pois são ângulos opostos pelo vértice e *AD* = *DE*, por construção. Dai, segue-se que os triângulos *ADC* e *EDB* são congruentes e portanto, em particular, obtemos que $E\hat{B}D = \hat{C}$. Como a semi-reta S_{BE} divide o ângulo $B'\hat{B}C$, decorre que $B'\hat{B}C > E\hat{B}D = \hat{C}$. Usando uma construção análoga, mostra-se que $B'\hat{B}C > \hat{A}$. Isto conclui a demonstração.

Teorema 2:
A soma das medidas de dois ângulos internos quaisquer de um triângulo, é menor do que 180°.

Demonstração
Seja *ABC* um triângulo. Escolhamos, por exemplo, os ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$. Gostaríamos de mostrar que $\alpha + \beta < 180°$, conforme figura ao lado.

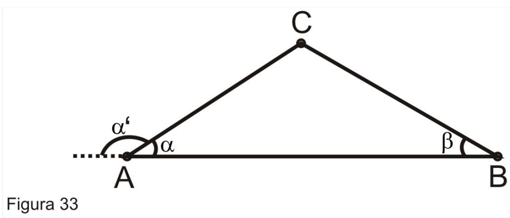


Figura 33

Pelo Teorema do ângulo externo, obtemos que $\alpha' > \beta$, somando α a ambos os membros da desigualdade acima, segue-se que
$\alpha' + \alpha > \alpha + \beta$, ou seja:

$180° > \alpha + \beta$, já que $\alpha' + \alpha = 180°$.

Portanto $\alpha + \beta < 180°$. Isto conclui a demonstração.

Corolário 1:

Em qualquer triângulo, existem pelo menos dois ângulos internos agudos.

Demonstração

Suponha, por absurdo, que em um triângulo *ABC*, quaisquer dois ângulos internos, por exemplo $\hat{A}$ e $\hat{B}$, não sejam agudos, isto é, cada um deles mede mais do que 90°, dai, a soma das medidas dos dois ângulos internos $\hat{A}$ e $\hat{B}$ é maior do que 180°. Isto é absurdo pois contradiz o teorema anterior.

Portanto não podemos ter em um triângulo *ABC*, dois ângulos internos, cada um deles medindo mais do que 90°. Concluímos então que em qualquer triângulo *ABC,* existem pelo menos dois ângulos internos, cuja medida de cada um deles é menos de 90°. Isto conclui a demonstração.

Corolário 2

Se duas retas *r* e *s* são perpendiculares a uma terceira reta *t*, então *r* e *s* não tem ponto em comum.

Demonstração

Sejam dadas uma reta *t* e outras duas retas distintas *r* e *s*, perpendiculares a *t*, nos pontos *A* e *B*, respectivamente, conforme ilustra figura ao lado.

Figura 34

Gostaríamos de mostrar que *r* e *s* não têm ponto em comum, ou seja, *r* e *s* são paralelas. Para isso, suponha por absurdo, que *r* e *s* se interceptassem em um ponto *P*. Neste caso, teríamos um triângulo *ABP* com dois ângulos retos. Já sabemos, pelo corolário 1, que isso é impossível! Portanto o ponto *P*, como descrito acima, não existe. Concluímos então que as retas *r* e *s* são paralelas, o que equivale dizer que não têm ponto em comum. Isto conclui a demonstração.

Teorema 3:

Por um ponto *P*, fora de uma reta *r*, passa uma única reta *s*, perpendicular à reta *r*.

Demonstração

Primeiro mostraremos que existe a reta *s*, como descrita no teorema, em seguida mostraremos a unicidade.

Existência

Considere a reta *r* e o ponto *P*, fora dela, como ilustrado na figura ao lado.

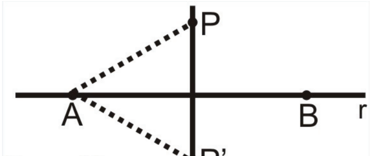


Figura 35

Em seguida, escolha dois pontos distintos *A* e *B,* em *r*. Trace agora o segmento *PA*, caso a reta que contém *PA* seja perpendicular a *r*, fica provada a existência. Caso isso não ocorra, considere, no semiplano que não contém *P*, uma semi-reta com origem *A*, formando com a semi-reta $S_{AB,}$ um ângulo congruente a $P\hat{A}B$. Na semi-reta com origem *A*, escolha um ponto *P'* tal que *AP'* = *AP* (ver figura).

Afirmação: O segmento *PP'* é perpendicular a *r*. De fato, pois o triângulo *PAP'* é isósceles, já que *AP'* = *AP* (por construção). Como *PÂB* = *P'ÂB* também por construção, segue-se que a reta *r* contém a bissetriz do ângulo *PÂP'*, no triângulo isósceles *PAP'*, cuja base é *PP'*. Como já provamos, no teorema 4 da unidade 3, que essa bissetriz é perpendicular à base, concluímos que a reta *s*, que passa por *P* e *P'*, é perpendicular a *r*. Isto conclui a demonstração da existência.

Unicidade

Suponha que existissem duas retas *s* e *s',* ambas passando por *P* e perpendiculares a *r*, conforme ilustra figura ao lado.

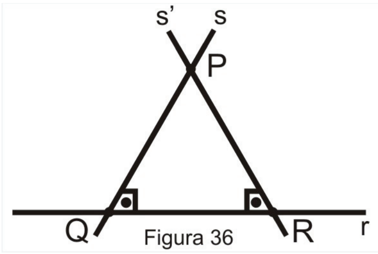


Figura 36

Nesse caso, teríamos um triângulo *PQR* com dois ângulos retos. Mas já sabemos que isso é impossível. Concluímos então que, nas condições do teorema, *s* é unicamente determinada.

Dialogando e construindo o seu conhecimento

Note que a demonstração desse teorema nos dá um método para construção de retas perpendiculares. Além disso, se, ao invés de apenas o ponto *P*, fora de *r*, tivéssemos dois pontos distintos *P* e *Q*, ambos fora de *r*, obteríamos uma perpendicular *s*, que passa por *P*, e outra perpendicular *t*, que passa por *Q*. Em virtude do corolário 2 acima, as retas *s* e *t* são paralelas ou coincidentes. Portanto também temos um método para construção de retas paralelas.

Observação

O ponto *P'*, como obtido na demonstração anterior é dito "reflexo" de *P*, relativamente à reta *r*. Portanto, a partir de um plano α e de uma reta *r*, nele contida, podemos definir a transformação do plano α, por $F_r(P) = P'$, F_r é a "transformação do plano α" por uma reflexão, relativamente a uma reta *r*, de α.

Essa transformação é simples de ser entendida geometricamente. Para isso, imaginemos um ponto *P* qualquer no plano α, o qual contém a reta *r*. o seu reflexo *P = Fr(P)* pode ser obtido, traçando-se a reta *s* perpendicular a *r*, que passa em *P*, em seguida o ponto *P'* é escolhido, em *s*, de modo que *AP = AP'*, onde *A* é o ponto de interseção das retas *r* e *s*. Esse ponto *A* é o pé da perpendicular. Dentre propriedades da reflexão *Fr*, a preservação da distância é uma das mais importantes. Ela será apresentada abaixo, como mais um teorema, nesta unidade.

Teorema 4:

A transformação do plano α, por uma reflexão relativamente a uma reta *r*, contida em α, denotada por F_r, preserva distâncias, isto é:

Dados quaisquer dois pontos *P* e *Q*, em α, os segmentos de reta *PQ* e $F_r(P)F_r(Q) = P'Q'$ têm a mesma medida.

Demonstração

Sejam α um plano, *r* uma reta contida em α e F_r a transformação do plano α, relativamente a *r*. Dados agora quaisquer dois pontos *P* e *Q*, pertencentes a α, gostaríamos de mostrar que os segmentos *PQ* e *P'Q'* são congruentes, quando $P' = F_r(P)$ e $Q' = F_r(Q)$, conforme ilustrado na figura ao lado.

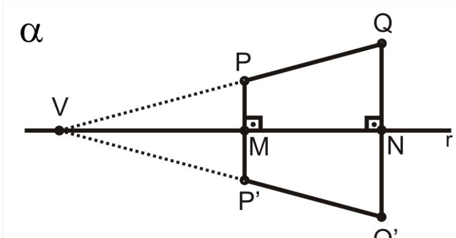


Figura 37

O ponto *V* foi escolhido, de modo que esteja alinhado com *P* e *Q*. Pela própria construção dos pontos *P'* e *Q'*, decorre que *V, P'* e *Q'* também estão alinhados. Vamos agora comparar os triângulos *VQN* e *VQ'N*. Temos que: *VN = VN* (lado comum), $V\hat{N}Q = V\hat{N}Q'$ (são ângulos retos) e *QN = Q'N* (pois *Q'* é o reflexo de *Q*). Dai, pelo caso *LAL*, de congruência de triângulos, *VQN=VQ'N*. Analogamente mostramos a congruência dos triângulos *VPM* e *VP'M*.

Dessas congruências, obtemos que *VQ = VQ'* e *VP = VP'*, como consequência disso os segmentos *PQ* e *P'Q'* tem a mesma medida. Isto equivale dizer que *PQ = P'Q'* e conclui a demonstração.

Observação:

Essa demonstração não é valida quando *PQ* é paralelo à reta *r*. Como você o demonstraria nesse caso?

Teorema 5:

Em qualquer triângulo, a lados não congruentes opõem-se ângulos não congruentes. E o menor ângulo opõe-se ao menor lado.

Demonstração

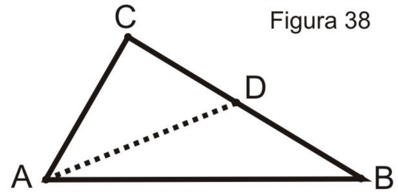


Figura 38

Como já mostramos, nos teoremas 2 e 3, da Unidade III, que “dois lados de um triângulo são congruentes, se e só se, os ângulos que se opõem a esses lados também são congruentes”. É claro que decorre dai que “lados não congruentes de um triângulo opõem-se a ângulos não congruentes”. Resta-nos agora mostrar que “o menor ângulo opõe-se ao menor lado”. Para isso, seja *ABC,* um triângulo qualquer, onde $\overline{AC} < \overline{BC}$, ou seja, a medida do segmento *AC* é menor do que a medida do segmento *BC.* Gostaríamos de mostrar que $A\hat{B}C < C\hat{A}B$, ou seja, a medida do ângulo $A\hat{B}C$ é menor do que a medida do ângulo $C\hat{A}B$. Ver ilustração na figura ao lado.

Como, por hipótese, $\overline{AC} < \overline{BC}$, podemos marcar um ponto *D*, entre *B* e *C*, de modo que $\overline{CD} = \overline{AC}$. Consequentemente a semi-reta S_{AD} divide o ângulo $C\hat{A}B$ (ver figura). Dai, decorre que $C\hat{A}B > C\hat{A}D = C\hat{D}A$, esta igualdade em virtude do triângulo *CAD* ser isósceles de base *AD.* Agora, como $C\hat{D}A$ é ângulo externo do triângulo *ABD* (ver figura), segue-se que $C\hat{D}A > A\hat{B}C$. Como já mostramos anteriormente que $C\hat{A}B >$ $C\hat{D}A$, obtemos que $C\hat{A}B > C\hat{D}A > A\hat{B}C$, donde finalmente concluímos que $A\hat{B}C < C\hat{A}B$. Isto conclui a demonstração.

Observação: Note que o teorema 5 pode ser reescrito na forma:

Teorema 6:

Em qualquer triângulo, a ângulos não congruentes, opõem-se lados não congruentes. E o menor lado opõe-se ao menor ângulo.

Vamos agora apresentar alguns resultados, com o objetivo de resolvermos o seguinte problema sobre “construtibilidade de triângulos.”

Problema:

Dados três segmentos de reta *AB, BC e CD,* cujas medidas, em uma mesma unidade de comprimento, sejam representadas por $\overline{AB} = c$, $\overline{BC} = a$ e $\overline{CA} = b$. Suponhamos que $c \le b \le a$. Mostre que só é possível construir um triângulo, tendo os segmentos *AB, BC* e *CD* como lados se e só se $a < b + c$.

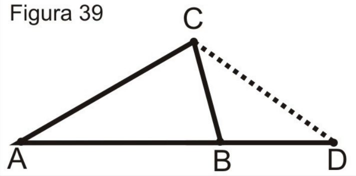
A resolução desse problema vai nos mostrar que, uma vez construído um triângulo qualquer, a medida de cada lado é menor do que a soma das medidas dos outros dois lados. Para isso vamos demonstrar os teoremas abaixo.

Teorema 7:

Em qualquer triângulo, a medida de qualquer lado sempre é menor do que a soma das medidas dos outros dois.

Demonstração

Figura 39



Sejam *ABC* um triângulo qualquer e *AC* um de seus lados. Gostaríamos de mostrar que $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Para isso, marque um ponto *D* na semi-reta S_{AB}, tal que $\overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$; consequentemente $\overline{BC} = \overline{BD}$. Portanto o triângulo *CBD* é isósceles de base *CD*, conforme ilustra figura ao lado.

Dai, obtemos que $C\hat{D}B = B\hat{C}D$. E como *B* está entre *A* e *D*, segue-se que $B\hat{C}D < A\hat{C}D$, dai, $C\hat{D}B < A\hat{C}D$. Portanto, se olharmos para o triângulo *ACD,* o teorema 6 acima nos garante que a medida do lado que se opõe ao ângulo $C\hat{D}B$ é menor do que a medida do lado que se opõe ao ângulo $A\hat{C}D$, ou seja: $\overline{AC} < \overline{AD} = \overline{AB} + \overline{BC}$ e assim $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$. Isto conclui a demonstração.

Teorema 8 :(Desigualdade Triangular)

Se *A, B* e *C* são três pontos distintos de um plano α, então $\overline{AC} \le \overline{AB} + \overline{BC}$. A igualdade ocorre se e somente se *B* é um ponto do segmento *AC.*

Demonstração

Sejam *A, B* e *C* pontos distintos de um plano α. Caso eles não estejam alinhados (em uma mesma reta *r*), teremos um triângulo, cujos vértices são os pontos *A, B* e *C.* Nesse caso, o teorema 7 acima nos garante que $\overline{AC} < \overline{AB} + \overline{BC}$ e evidentemente isto implica que $\overline{AC} \le \overline{AB} + \overline{BC}$, o que conclui a prova.

Caso *A, B* e *C* estejam alinhados sobre uma reta *r*, a cada um deles corresponde um único número real (coordenada do ponto), digamos *a, b*, e *c*, respectivamente. Neste caso, vamos admitir o seguinte fato:

Sejam *A, B* e *C* pontos distintos de uma mesma reta, cujas coordenadas são, respectivamente *a, b* e *c.* O ponto *C* está entre *A* e *B* se, e somente se, o número *c* está entre *a* e *b.* Este fato encontra-se demonstrado como o teorema 2.2 da referência bibliográfica [1]

A demonstração é portanto concluída como consequência imediata do fato acima citado.

Teorema 9:

Sejam *a, b* e *c* três números positivos. Se $| a - b | < c < a + b$, então é possível construir um triângulo, cujas medidas dos lados, em uma mesma unidade de comprimento, sejam *a, b* e *c.*

Demonstração

Suponha *a, b* e *c* em uma mesma unidade de comprimento. Trace agora uma reta *r* e marque sobre ela, dois pontos *A* e *B*, tais que $\overline{AB} = c$. Use um compasso e descreva duas circunferências; uma de centro *A* com raio *b* e a outra de centro *B* com raio *a*, conforme ilustra a figura ao lado.

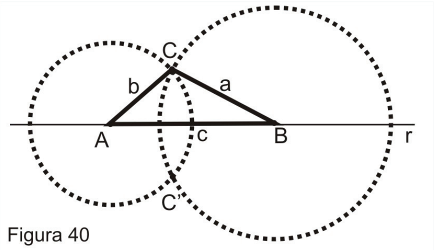


Figura 40

As duas circunferências só se interceptam por causa da hipótese $| a - b | < c < a + b$. E um triângulo *ABC* pode ser construído, a partir da escolha de um dos dois pontos de interseção das duas circunferências; *C* ou *C'* (ver figura).

Caso $c \ge a + b$, as duas circunferências só poderão ter, no máximo, um ponto em comum, no segmento *AB.* Portanto é impossível construir um triângulo, cujos lados medem *a, b* e *c.*

Caso $c \le |a - b|$, uma das circunferências fica no interior da outra e, no máximo, tem um ponto em comum, na reta r. Portanto, também é impossível construir um triângulo, cujos lados medem *a, b* e *c.*

Tente ilustrar geometricamente as duas situações de impossibilidade da construção do triângulo.

Concluímos aqui a demonstração.

Exemplos Ilustrativos

(1) Sabendo-se que as medidas, em cm, dos lados de um triângulo *ABC*, são representadas por números naturais, e que $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$. Quantas e quais são as possibilidades para o triângulo *ABC?*

Resolução

Seja $\overline{BC} = x > 0$. Como $\overline{AB} = \overline{AC} = 3$, a condição de construtibilidade de um triângulo *ABC*, pelo Teorema 9, é dada por

$$|\,3 - 3\,| < x < 3 + 3 \Leftrightarrow 0 < x < 6$$

Como $x \in IN$, as possibilidades para *x*, são *1, 2, 3, 4 ou 5.* Portanto o total de triângulos possíveis é cinco sejam T_1 ,T_2 ,T_3 ,T_4 e T_5 esses triângulos. As medidas dos seus lados, em cm, podem ser representadas, respectivamente, pelos ternos de numeros reais: 3, 3 e 1; 3, 3 e 2; 3, 3 e 3; 3, 3 e 4; 3, 3 e 5.

(2) Na figura abaixo, sabe-se que $\alpha > \beta$.

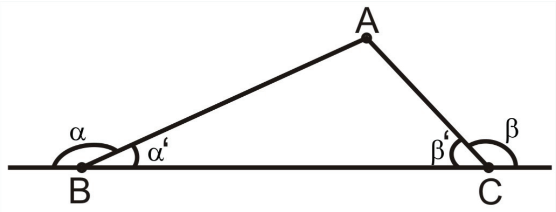


Figura 41

Nessas condiçoes, $\alpha' < \beta'$. Como justificar ficar esse fato?

Resolução:

(I) O teorema do ângulo externo, aplicado no triângulo *ABC*, nos garante que $\alpha' < \beta$.

(II) É claro que $\beta < \beta + \beta'$, e como $\beta + \beta' < \beta'$, segue-se que $\beta < \beta'$.
De (I) e (II), decorre que $\alpha' < \beta < \beta'$. Daí, obtemos que $\alpha' < \beta'$. Isto completa a justificativa.

(3) Como determinar o menor caminho de um ponto *P* ate uma reta *r*? Ou como calcular a distância de *P* até *r*?

Dados um ponto *P* e uma reta *r*. Primeiramente, caso *P* esteja na reta *r*, essa distancia é zero. A única outra possibilidade, ou seja, caso *P* não esteja sobre a reta *r*, o segmento PP_0, onde P_0 é pé da perpendicular traçada de P_0 a *r*, conforme ilustra a figura ao lado, nos dá esse "caminho mínimo".

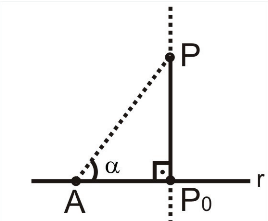


Figura 42

Para justificar isso, basta considerar um ponto *A*, em *r*, diferente de P_0. Em seguida considere o triângulo PAP_0 e note que $\alpha < 90°$ implica que o segmento P_0P é menor do que *PA*, pois em qualquer triângulo, ao menor ângulo opõe-se o menor lado.

Unidade V: Paralelismo

1. - Situando a Temática

Em Geometria, o significado do termo "paralelo" é de imensa importância. Foi justamente no 5° postulado (ou 5° axioma), o qual é apresentado na grande maioria dos textos de Ensino Básico, bem resumido, mas naturalmente de forma equivalente ao enunciado original proposto por Euclides, da seguinte forma:

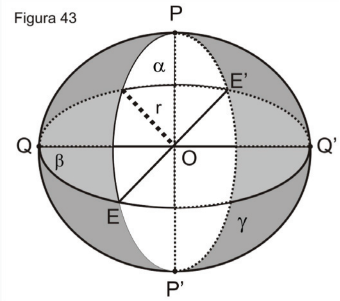
"Por um ponto *P*, fora de uma reta *r*, é possível traçar uma única reta *s*, paralela a *r*".

Como notamos, nesse postulado, o conceito de paralelismo, no caso, entre duas retas, é de fundamental importância. É claro que o conceito de paralelismo não se restringe apenas ao caso de duas retas, mas é aí que está a essência do significado de paralelismo, em Geometria. γ

Na unidade IV, mostramos um método a partir do qual é possível construir retas paralelas. Isto justifica a existência delas, lá no plano. No entanto, no 5° postulado, além da existência, a questão da unicidade também é determinante no modelo de Geometria a ser construído. Só a título de curiosidade, imaginemos que o "universo" seja a "superfície de uma esfera", cujo centro é o ponto 0 e o raio é $r > 0$. Já imaginou? Pois bem, pensando assim, vamos imaginar agora, um ponto *P* sobre essa superfície, a qual podemos pensar com se fosse a "casca do planeta Terra", caso a Terra fosse modelada como uma esfera perfeita, é claro! A situação que apresentamos é a seguinte:

Considerando o ponto *P,* como sendo o "pólo Norte" e deslocando-o, sempre sobre a superfície e seguindo uma direção "retilínea", rumo ao "pólo Sul", o movimento vai descrever uma "curva", que voltará para o mesmo ponto de partida, após uma volta completa, em torno do centro da esfera. Essa curva está contida em um plano α , e tem a forma de uma circunferência de raio $r > 0$, já que este é o raio da esfera, conforme ilustra a figura ao lado.

Figura 43



Essa curva, em Matemática, é denominada "grande círculo" da esfera. Já em Geografia, por exemplo, ela é conhecida como um Meridiano. Particularmente, por uma questão de simplicidade, dentre os infinitos meridianos que tem o planeta Terra, suponhamos que esse desenhado na figura, seja o Meridiano de Greenwich, o qual divide a Terra, em Oriente e Ocidente, ou equivalentemente, hemisférios direito e esquerdo, respectivamente. Em termos de pontos cardeais, Oriente é o Leste e Ocidente, o Oeste".

Consideremos agora outros dois grandes círculos sobre a esfera, um situado no plano γ , o qual é um outro meridiano, passando em *P* e que divide a esfera, nos hemisférios da frente e de trás; o outro, situado no plano β , o qual divide a esfera, nos hemisférios norte e sul, respectivamente, acima e abaixo. Esse grande círculo, em Geografia, é denominado "Equador terrestre", ver figura.

Observe que esses três grandes círculos juntos, dividem a esfera em "oito partes iguais". Imaginando agora apenas a superfície da esfera, note que os oito pedaços iguais têm forma "triangular". Na próxima figura, representaremos o "triângulo" *EPQ*, cujos lados são os arcos de circunferência de raio *r*, cada um deles correspondendo à quarta parte da circunferência inteira. As medidas dos ângulos, nos vértices *E*,*P* e *Q*, são definidas como as medidas dos ângulos entre os dois arcos, em cada um dos pontos; por exemplo, em *E*, esse ângulo mede 90°. Pois, o ângulo entre os dois arcos, em *E*, é medido a partir do ângulo entre as "retas tangentes" aos arcos que estão nos planos α e β . Essas duas retas tangentes, em *E*, são perpendiculares, portanto o ângulo em *E,* é reto. A mesma medida têm os ângulos em *P* e *Q*. Portanto cada um dos três ângulos internos, do "triângulo esférico" *EPQ*, é reto, e assim esse triângulo não é euclidiano, pois já mostramos a consequência do teorema do ângulo externo: "Em qualquer triângulo, é impossível dois ângulos internos retos", além disso mostraremos, nessa unidade, que a soma das medidas dos três ângulos internos, de qualquer triângulo, é 180°, na Geometria euclidiana.

Na figura abaixo, apresentamos uma ilustração geométrica do triângulo *EPQ*, sobre a superfície *P* esférica de centro *O* e raio $r > O$.

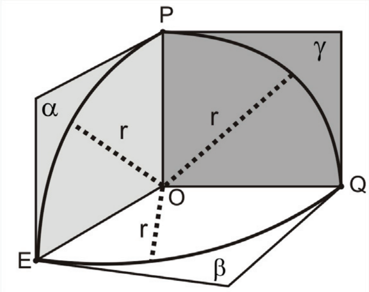


Figura 44

Um fato muito importante e interessante, sobre uma superfície esférica, é que os grandes círculos determinam as "circunferências máximas", as quais fazem o mesmo papel das retas, no plano. Elas nos dão o menor caminho de um ponto até outro. A demonstração desse fato foge ao nível do nosso curso, mas esperamos que, mesmo que seja apelando para o lado lúdico, esse fato seja aceito. É justamente isso que justifica as retas sobre a superfície de uma esfera com raio $r > 0$, e centro *O*, como as circunferências de centro *O* e raio *r* (ou circunferências máximas). Com isso, mesmo que seja só brincando com pedaços de cordão, colados em uma superfície esférica, de borracha ou isopor (por exemplo, uma bola de futebol). É importantíssimo notar, que quaisquer duas retas (circunferências máximas) sempre se interceptam em dois pontos. É um fato que, nessa "Geometria da esfera", não vale o 5° postulado da Geometria euclidiana, pois quaisquer duas retas têm um ponto em comum, ou seja, não são paralelas. Portanto, nessa Geometria não existem retas paralelas.

Um outro tipo de situação, é aquela em que a unicidade no 5° postulado não se verifica, ou seja, "por um ponto *P*, fora de uma reta *r*, passa mais de uma reta paralela a *r*". Este é o novo postulado das paralelas, nessa outra Geometria. Na Geometria da esfera, anteriormente apresentada, o enunciado do 5° postulado é "Por um ponto *P*, fora de uma reta *r*, não passa nenhuma reta paralela a *r*".

No mundo da Física Quântica, o modelo da Geometria euclidiana, apesar de resolver os problemas da Mecânica Clássica Newtoniana, não resolve questões no nível de partículas subatômicas. Nesse nível, a necessidade da utilização de um modelo de Geometria não-euclidiana é veemente. Portanto, temos aí registrada, mais uma vez, a utilidade da Geometria, em situações-problema associadas a pesquisas avançadas, em áreas da Física.

Dialogando e construindo o seu conhecimento

Apresentaremos agora, a partir da ilustração do "esqueleto de um cubo", uma possibilidade de duas retas não terem ponto em comum, a qual é impossível de ocorrer no plano, por ele ter "dimensão 2". São as "retas reversas", as quais só ocorrem a partir da dimensão 3. Para isso, observemos inicialmente, a ilustração na figura abaixo, a qual representa o esqueleto de um cubo, mostrado a partir das suas doze arestas.

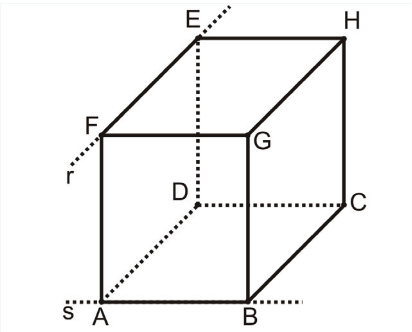


Figura 45

Note que as retas *r* e *s*, que contêm as arestas *AB* e *FE* não têm ponto comum, mas elas estão em planos distintos, determinados pelas faces quadradas *ABGF* e *ADEF*. São retas que não têm ponto em comum, situadas em planos diferentes, ditas "retas reversas".

Vamos a partir de agora, apresentar alguns resultados extremamente ligados ao 5° postulado da Geometria euclidiana.

Teorema 1:

Se uma reta *r* é paralela às retas *s* e *t*, então *s* e *t* são paralelas ou coincidentes.

Demonstração

Suponhamos que *s* e *t* não coincidem, mas são paralelas a *r*. Caso *s* e *t* não fossem paralelas entre si, existiria um ponto *P* de interseção delas duas. Então *s* e *t* seriam paralelas a *r* ,distintas, e passando por *P*. Isto contradiz o 5° postulado. Como a suposição de que *s* e *t* não são paralelas nos leva a um absurdo, concluímos que, caso *s* e *t* não coincidam, elas são paralelas. Isto conclui a demonstração do teorema.

Teorema 2:

Se uma reta *t* intercepta uma reta *s*, paralela a uma outra reta *r*, então a reta *t* também intercepta a reta *r*.

Demonstração

Suponha que *t* interceptasse *s* em *P*, mas não interceptasse *r*; nesse caso, como por hipótese *r* é paralela a *s*, teríamos pelo ponto *P*, fora de *r*, duas retas paralelas a *r*. Isto contradiz o 5° postulado. Portanto, caso *t* intercepte uma reta *s*, também interceptará qualquer outra reta *r*, paralela a *s*. Isto conclui a demonstração.

Observação

A definição de retas paralelas, a partir da existência de um ponto, na interseção dessas retas, é aparentemente simples, porém na prática é muito difícil de trabalhar com ela. Com o intuito de facilitar esse trabalho, vamos utilizar ângulos determinados por uma reta, que intercepta outras duas, conforme ilustra a figura abaixo.

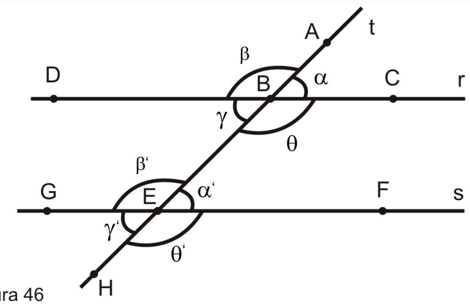


Figura 46

A reta *t* é denominada transversal e os oito ângulos determinados, por essas três retas, cujas medidas, em uma mesma unidade, estão representados por letras gregas, recebem as denominações apresentadas a seguir:

- $D\hat{B}E$, $G\hat{E}B$, $C\hat{B}E$ e $F\hat{E}B$ são ângulos internos (estão entre *r* e *s*)
- $D\hat{B}A$, $G\hat{E}H$, $C\hat{B}A$ e $F\hat{E}H$ são ângulos externos (não estão entre *r* e *s*)
- $D\hat{B}A$, $D\hat{B}E$, $G\hat{E}B$ e $G\hat{E}H$ são ângulos colaterais (estão à esquerda de *t*)
- $D\hat{B}A$ e $G\hat{E}B$, $D\hat{B}E$ e $G\hat{E}H$ são pares de ângulos correspondentes
- $A\hat{B}C$, $C\hat{B}E$, $F\hat{E}B$ e $F\hat{E}H$ são ângulos colaterais (estão à direita de *t*)
- $A\hat{B}C$ e $F\hat{E}B$, $C\hat{B}E$ e $F\hat{E}H$ são pares de ângulos correspondentes
- $C\hat{B}E$ e $G\hat{E}B$, $D\hat{B}E$ e $F\hat{E}B$ são ângulos alternos internos

- $C\hat{B}E$ e $F\hat{E}B$, $D\hat{B}E$ e $G\hat{E}B$ são ângulos colaterais internos
- $C\hat{B}A$ e $G\hat{E}H$, $D\hat{B}A$ e $F\hat{E}H$ são ângulos alternos externos
- $C\hat{B}A$ e $F\hat{E}H$, $D\hat{B}A$ e $G\hat{E}H$ são ângulos colaterais externos

Teorema 3:

Se uma transversal *t* intercepta duas outras retas *r* e *s*, determinando um par de ângulos correspondentes congruentes, então *r* e *s* são paralelas.

Demonstração

Sejam *t*, *r* e *s*, como ilustrados na figura ao lado, onde $\alpha = \alpha'$.

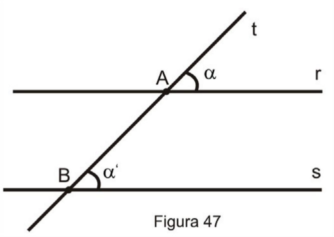


Figura 47

Escolhemos, sem perda de generalidades, α e α' como medidas dos ângulos correspondentes.

Gostaríamos de mostrar que *r* e *s* não têm ponto comum, ou seja, são paralelas. Por isso, vamos supor que exista um ponto *P*, comum a *r* e *s*. Nesse caso, teremos necessariamente um triângulo *ABP*, onde o ponto *P* poderá estar à direita ou à esquerda da reta *t*. Caso esteja à esquerda, teremos um ângulo interno de *ABP*, com medida α, e um ângulo externo de *ABP*, com medida α', o qual não é adjacente a α. Então, pelo teorema do ângulo externo, isto nos leva a $\alpha' > \alpha$. Isto é absurdo pois, por hipótese, $\alpha = \alpha'$. Este absurdo provém de supormos a existência do ponto *P*, como descrito acima. Concluímos então que o tal ponto *P* não existe e portanto *r* e *s* são paralelas.

Caso o ponto *P*, estivesse do lado direito, com um raciocínio análogo, chegaríamos à mesma conclusão (ver figura abaixo). Isto conclui a demonstração.

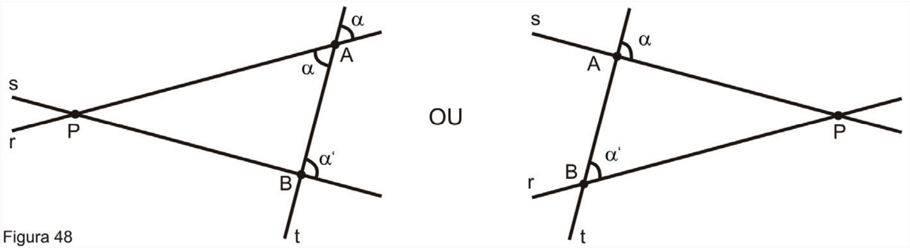


Figura 48

Note que estamos usando as representações originais, das medidas dos oito ângulos, determinados pelas três retas *r*, *s* e *t*. Nesse sentido, poderíamos substituir, no teorema 3, a hipótese $\alpha = \alpha'$ por $\theta + \alpha' = 180°$. Como $\theta + \alpha = 180°$, teríamos $\theta + \alpha' = \theta + \alpha$, portanto $\alpha = \alpha'$; Reciprocamente, o leitor também pode verificar facilmente que $\alpha = \alpha'$ nos leva a $\theta + \alpha' = 180°$. Isto nos garante que o teorema 4 abaixo, é equivalente ao teorema 3.

Teorema 4:

Se uma transversal *t* intercepta duas retas *r* e *s*, determinando um par de ângulos colaterais suplementares, então *r* e *s* são paralelas.

Vamos agora mostrar, com a utilização do 5° postulado, que a recíproca do Teorema 3 é verdadeira.

Teorema 5:

Se duas retas paralelas *r* e *s* são interceptadas por uma transversal *t*, então os ângulos correspondentes são congruentes.

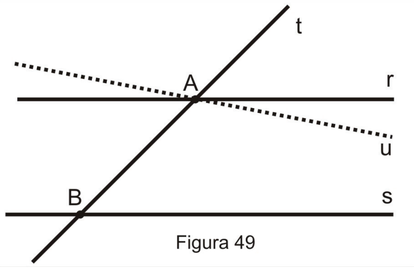


Figura 49

Demonstração

Sejam *r* e *s* duas retas paralelas e *t* uma transversal, que intercepta as duas retas, respectivamente, nos pontos *A* e *B*, conforme ilustra a figura ao lado.

Construa a reta *u* (ver figura), a qual determina, juntamente com *s*, os quatro pares de ângulos correspondentes, congruentes. Daí, pelo teorema anterior, as retas *u* e *s* são paralelas, mas, pelo 5° postulado, em um ponto *A*, fora de *s*, passa uma única reta, paralela a *s*. Como *u* e *r* são paralelas a *s*, ambas passando pelo ponto *A*, a única possibilidade para tal é que *r* coincida com *u*. Portanto, em virtude disso, os quatro pares de ângulos correspondentes, determinados pela transversal *t*, juntamente com as retas *r* e *s,* são congruentes. Isto conclui a demonstração.

Refletindo...

Percebemos a importância desses resultados, no sentido de obtermos formas mais práticas, do que ter de pesquisar a existência e unicidade de ponto, comum às duas retas, as quais não sabemos, a priori, se são paralelas ou não. A idéia principal é descobrir formas equivalentes de trabalhar com o 5° postulado. Nesse sentido, vamos nessa unidade apresentar mais consequências do “postulado das paralelas”, culminando, no final, com um importante teorema sobre proporcionalidade de segmentos, determinados por duas transversais distintas, ao cortarem um “feixe de paralelas”. Conhecido como teorema de Tales (séc. *VI a.C.*), o qual justamente com Euclides e Pitágoras, todos gregos, foram dos “sete maiores sábios da antiguidade”...

Teorema 6:

A soma das medidas dos ângulos internos de qualquer triângulo é 180°.

Demonstração

Seja *ABC* um triângulo. Vamos considerar agora, a reta *r*, que contém o segmento *AB* (reta suporte do lado *AB*), e o ponto *C*, fora dela, conforme ilustrado na figura ao lado.

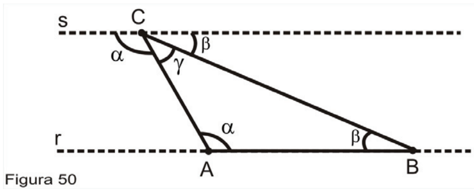


Figura 50

O 5° postulado nos garante, que pelo ponto *C*, passa uma única reta *s* (ver figura), paralela a *r*. Agora é só usar o teorema 5, duas vezes, uma usando a reta suporte do lado *AC*, como transversal e outra, a reta suporte do lado *BC.* Dai, os ângulos internos do triângulo *ABC,* nos vértices *A* e *B*, são transportados para o vértice *C* (ver figura). Finalmente, é só notar que os três ângulos internos juntos, perfazem um ângulo raso, ou seja, a soma das medidas é 180°. Isto conclui a demonstração.

Ampliando o seu conhecimento...

Só a título de curiosidade, a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo, também pode ser menor ou maior do que 180°, respectivamente, nos triângulos dos modelos de Geometria Hiperbólica e Elíptica, os quais, juntamente com o modelo euclidiano, constituem, num certo sentido, todos os modelos de Geometria.

Ainda com relação ao teorema 6, uma atividade lúdica, a qual não funciona como uma “demonstração matemática formal”, porém é importante de ser mostrada, principalmente em nível de Ensino Fundamental, pode ser feita com origamis (ou dobraduras). A atividade é a seguinte:

1° Passo:

Recortar a partir de uma folha de papel, um pedaço com forma triangular.

2° Passo:

Marcar os três pontos do pedaço recortado com três cores distintas.

3° Passo:

Escolher, convenientemente, um dos três pontos para dobrar, de modo que ao final a dobradura fique paralela ao lado oposto à ponta escolhida, tocando nesse lado, conforme ilustra a figura ao lado.

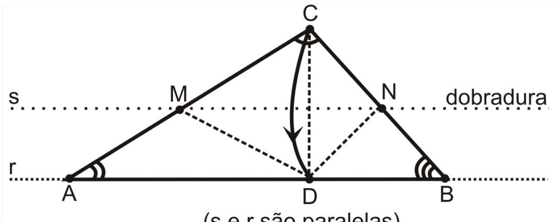


Figura 51

4° Passo

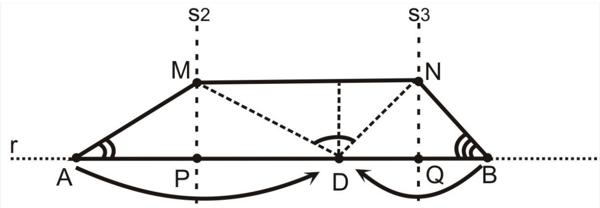


Figura 52

Dobre em seguida as pontas em *A* e *B*, até que esses pontos coincidam com *D*, conforme ilustra a figura ao lado:

5° Passo:

De posse agora do resultado da dobradura anterior, conforme ilustra a figura ao lado, é só obter a conclusão desejada.

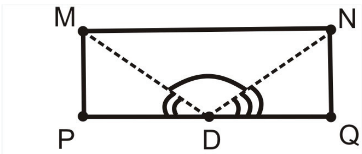


Figura 53

Conclusão: como se observa, em *D*, os três ângulos internos do triângulo *ABC*, perfazem um ângulo raso, ou seja, a soma dos três medidas é 180°.

Algumas consequências imediatas, porém importantes, do teorema 6, são apresentadas no teorema seguinte.

Teorema 7:

a) Cada ângulo externo de um triângulo ABC tem medida igual à soma das medidas dos ângulos internos, a ele não adjacentes.
b) A soma das medidas dos ângulos internos de um quadrilátero é 360°.

Demonstração

(a) No triângulo *ABC*, estão destacadas as medidas α, β e γ dos seus três ângulos internos, bem como a medida γ', do ângulo externo localizado no vértice *C*, conforme ilustra a figura ao lado.

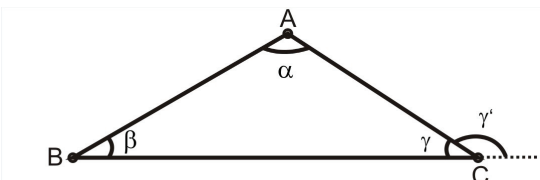


Figura 54

Como, pelo Teorema 6, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$, e $\gamma + \gamma' = 180°$, já que cada ângulo externo é o suplemento do ângulo interno, que lhe é correspondente. Dai, $\alpha + \beta + \gamma = \gamma + \gamma'$, donde se segue que $\gamma' = \alpha + \beta$. Isto pode ser feito de modo análogo para cada ângulo externo. Dai concluímos que “a medida de qualquer ângulo externo de um triângulo, é igual à soma das medidas dos ângulos internos, que não lhe são adjacentes”. Inclusive é dessa maneira que é enunciado o Teorema do Ângulo Externo, na grande maioria dos livros do Ensino Básico.

(b) Sejam *ABCD* um quadrilátero qualquer e α, β, γ e σ as medidas dos seus ângulos internos, como mostra a figura ao lado. Gostaríamos de mostra que $\alpha + \beta + \gamma + \sigma = 360°$.

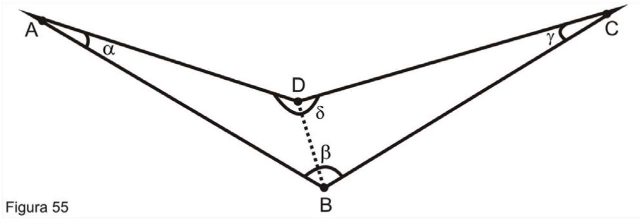


Figura 55

Para isso, considere o segmento *BD* (ver figura), o qual liga dois vértices não consecutivos de um polígono e é denominado “diagonal” desse polígono. Note que o quadrilátero, após o traçado da diagonal, ficou subdividido em dois triângulos, *ABD* e *CBD*. Portanto a soma dos ângulos internos do triângulo *ABD*, que é 180°, mais a soma dos ângulos internos do triângulo *CBD*, que também é 180°, é igual à soma das medidas dos ângulos internos do quadrilátero *ABCD*, portanto essa soma é 180° + 180° = 360°, como queríamos demonstrar.

Dialogando e construindo o seu conhecimento

Em (b), note que a figura ilustrada é um quadrilátero não convexo. Portanto, a demonstração não depende dele ser convexo, e assim vale para qualquer quadrilátero plano. Uma pergunta que se faz é:

Um polígono com *n* lados, tem como soma de seus ângulos internos, $(n-2)180°$?

Tente verificar o que ocorre para alguns valores particulares de *n*.

Uma outra pergunta que se faz é:

O que acontece com a soma dos ângulos internos de um quadrilátero, com dois lados em um plano e dois noutro plano? Será que essa soma é também igual a 360°? Fica como desafio a tentativa de resposta.

Vamos em seguida apresentar alguns resultados, principalmente sobre quadriláteros, os quais constituem o final da preparação para o Teorema de Tales, com o qual concluiremos essa unidade.

Teorema 8:

Se *A* e *B* são dois pontos quaisquer sobre uma reta *r*, então suas distâncias até qualquer reta *s*, paralela a *r*, são iguais.

Demonstração

Sejam *r* e *s* duas retas paralelas. Dados dois pontos quaisquer *A* e *B*, sobre *r*, gostaríamos de mostrar que suas distâncias até a reta *s*, são iguais. Essas distâncias são, respectivamente, as medidas dos segmentos *AD* e *BC*, onde $A\hat{D}F$ e $B\hat{C}F$ são ângulos retos (por definição), conforme ilustra a figura ao lado.

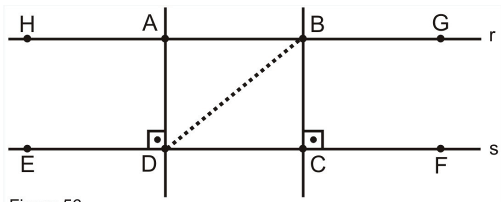


Figura 56

Para mostrarmos que *AD* = *BC*, consideremos a diagonal *BD* (ver figura) e em seguida comparemos os triângulos *ABD* e *CDB*.

Note que, nesses dois triângulos, temos que:

$B\hat{D}C = A\hat{B}D$, pois são os suplementos de ângulos correspondentes congruentes, *BD* = *BD* pois é lado comum e $A\hat{D}B = C\hat{B}D$, já que a transversal que contém *AD*, nos garante que $B\hat{A}D$ mede 90° e podemos aplicar o teorema 6, para os triângulos *ABD* e *CDB*. Portanto *ABD* = *CDB*. Dessa congruência, segue-se o resultado desejado, ou seja, *AD* = *BC*.

A título de desafio, verifique se a recíproca do teorema anterior é verdadeiro. Caso afirmativo, faça uma demonstração, caso contrário , apresente um contra-exemplo.

O teorema nos motiva a apresentação das definições do tipo de polígono, que aparece logo após os triângulos. São os quadriláteros, que apesar de não usual, poderiam também ser denominados de "quadriângulos", da mesma forma que, os triângulos poderiam ser denominados de triláteros.

Definição:

Um quadrilátero plano que

(1) Tem os lados opostos paralelos é dito paralelogramo

(2) Tem os ângulos internos retos é dito retângulo

(3) Tem os ângulos internos retos e os lados congruentes é dito quadrado

(4) Tem os quatro lados congruentes e os pares de lados opostos paralelos é dito losango (ou rombo)

(5) Tem apenas um par de lados opostos paralelos é dito trapézio. Os lados paralelos de um trapézio são ditos bases e os outros são as laterais do trapézio

(6) Não satisfaz a nenhuma das cinco condições anteriores é dito irregular

Antes de passar aos exemplos ilustrativos, é importante observar que algumas das definições acima apresentadas, às vezes são substituídas por outras que lhe são equivalentes. Isso é feito quase sempre em função do contexto, da clientela para qual o texto é destinado, do objetivo, etc. Uma coisa rara de acontecer, mas ocasionalmente acontece, é substituirmos uma definição qualquer, por outra que não lhe é equivalente, pois isto quase sempre causa problemas. Para ser mais claro, vamos observar o que ocorre com a definição de trapézio, dada anteriormente, quando retiramos dela, a palavra "apenas". Ou seja, a nova definição passa a ser:

(5') Um quadrilátero que tem dois lados opostos paralelos é dito trapézio.

Note que com esta definição, paralelogramos, retângulos, quadrados e losangos são exemplos de "trapézios especiais". É claro que existem outros tipos de trapézios diferentes dos anteriores, por exemplo: um trapézio com apenas dois lados paralelos e cujos lados não paralelos são congruentes, o qual é dito isósceles. Esse trapézio satisfaz ambas as definições, no entanto as anteriores satisfazem à definição (5'), mas não satisfazem à definição (5). Aos leitores mais curiosos, fica a sugestão de fazer uma pesquisa bibliográfica, com o objetivo de encontrar os dois tipos de definições. Tente desenhar, preferencialmente em papel quadriculado, vários tipos de quadriláteros. Use sua imaginação! Como pensava Albert Einstein, o pai da Teoria da Relatividade, "a imaginação é mais importante do que o conhecimento."

Dialogando e construindo o seu conhecimento

Com as seis definições acima apresentadas, é importante observar:

- Todo quadrado é retângulo. A recíproca é verdadeira? Justifique.
- Paralelogramos, retângulos, quadrados e losangos não são trapézios.
- Todo quadrado é losango? Justifique.
- Todo losango é quadrado? Justifique.
- Existem quadriláteros na Bandeira oficial do Brasil?

Poderíamos formular muitas outras questões sobre quadriláteros, pois esse tipo de conteúdo é muito rico em aplicações, tanto de natureza inter quanto intradisciplinar, preconizadas inclusive, nos *PCN* ou Parâmetros Curriculares Nacionais da Educação Brasileira. Esses tipos de questionamentos vão surgir naturalmente, nos encontros via plataforma Moodle.

Teorema 9:

Se *ABCD* é um paralelogramo, então os lados e os ângulos opostos são congruentes.

Demonstração

Consideremos um quadrilátero *ABCD*, determinado pelas retas *r, s, t,* e *u*, onde *r* e *s* são paralelas bem como *t* e *u*. Tracemos em seguida a diagonal *AC*, conforme ilustra a figura ao lado. Gostaríamos de mostrar que $B\hat{A}D = B\hat{C}D$, $A\hat{B}C = A\hat{D}C$, $AB = DC$ e $BC = AD$

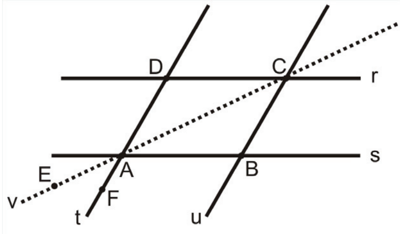


Figura 57

Vamos comparar os triângulos *ABC* e *CDA*. Para isso, note que $C\hat{A}B = A\hat{C}D$, pois a reta *v*, suporte da diagonal *AC* (ver figura), é transversal às paralelas *r* e *s*. Temos também que $B\hat{C}A = C\hat{A}D$, pois *v* é transversal às paralelas *t* e *u*, logo $B\hat{C}A = E\hat{A}F$. Mas o ângulo $C\hat{A}D$ é oposto pelo vértice a $E\hat{A}F$, assim $B\hat{C}A = E\hat{A}F = C\hat{A}D$. Como *AC* = *AC*, pois é lado comum aos triângulos *ABC* e *CDA*. Concluímos agora pelo caso *ALA*, de congruência de triângulos, que *ABC* = *CDA*. Dai, decorre que:

$$A\hat{B}C = A\hat{D}C,\ B\hat{A}C = D\hat{C}A \text{ e } C\hat{A}D = B\hat{C}A$$

Somando as duas ultimas igualdades, obtemos $B\hat{A}C + C\hat{A}D = D\hat{C}A + B\hat{C}A$, ou seja $B\hat{A}D = B\hat{C}D$. Com relação aos lados, obtemos *AB* = *DC* e *BC* = *AD*. Isto conclui a demonstração.

Teorema 10:

Se *ABCD* é um paralelogramo, então suas diagonais *AC* e *BD* se cruzam em um ponto *M*, com *AM* = *MC* e *BM* = *MD*.

Demonstração

Seja *ABCD* um paralelogramo, cujas diagonais são *AC* e *BD*. Caso as diagonais não se cruzassem em um ponto *M*, elas teriam retas suportes paralelas e, neste caso, a diagonal *BD* estaria inteiramente contida em um dos dois semiplanos determinados pela reta suporte da diagonal *AC*. Isto é absurdo! Portanto existe um ponto *M*, interseção das diagonais *AC* e *BD*. Resta-nos provar que *M* é ponto médio das duas diagonais, ver figura ao lado. Para isso, vamos comparar os triângulos *AMB* e *CMD*.

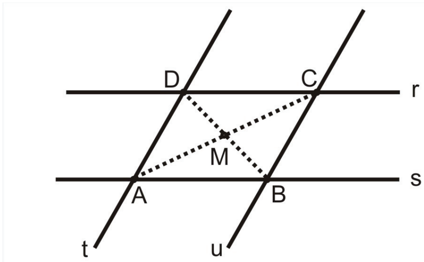


Figura 58

Na demonstração do teorema 9, mostramos que *AB* = *CD* e $C\hat{A}B = A\hat{C}D$ de modo análogo, mostra-se que $C\hat{D}B = A\hat{B}D$. Portanto, segue-se do caso *ALA*, de congruência de triângulos, que *AMB* = *CMD*. Dai, decorre que *AM* = *MC* e *BM* = *MD*, pois são lados opostos a ângulos congruentes, nesses dois triângulos. Isto conclui a demonstração.

Teorema 11:

Se, em um quadrilátero *ABCD*, os lados opostos são congruentes, então ele é um paralelogramo.

Demonstração

Seja *ABCD* um quadrilátero e *AC* uma de suas diagonais, conforme ilustra a figura abaixo. Gostaríamos de mostrar que *ABCD* é um paralelogramo, ou seja, seus lados opostos são paralelos.

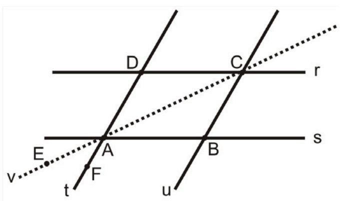


Figura 59

Para isso, vamos comparar triângulos *ABC* e *CDA*. Sabemos, por hipótese, que *AB* = *CD* e *BC* = *AD*. Como *AC* = *AC*, pois temos esse lado comum aos dois triângulos, concluímos que $ABC = CDA$, pelo caso de congruência de triângulos *LLL*. Dai, decorre que $B\hat{C}A = D\hat{A}C$, mas $D\hat{A}C = E\hat{A}F$ (opostos pelo vértice), portanto $B\hat{C}A = E\hat{A}F$. Logo, a transversal *v* determina um par de ângulos correspondentes congruentes, relativamente às retas *t* e *u*. Também decorre, da congruência dos triângulos, que $D\hat{C}A = B\hat{A}C$. Logo, a transversal *v* determina um par de ângulos correspondentes congruentes, relativamente às retas *r* e s. Podemos então concluir que *t* é paralela a *u*, bem como *r* é paralela a *s*. Portanto *ABCD* é um paralelogramo. Isto conclui a demonstração.

Teorema 12:

Se dois lados opostos de um quadrilátero *ABCD* são congruentes e paralelos, então *ABCD* é um paralelogramo.

Demonstração

Sejam *r* e *s* as retas suportes dos lados *AB* e *CD*, de um quadrilátero *ABCD* com $AB = CD$ e *r* paralelo a *s*. gostaríamos de mostrar que *ABCD* é um paralelogramo. Para isso, tracemos a diagonal *AC* e sua reta suporte *v*, conforme ilustra a figura ao lado.

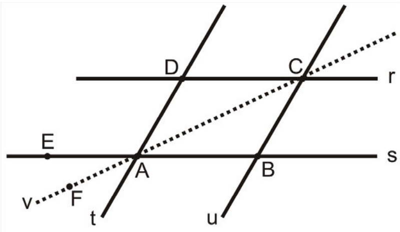


Figura 60

Consideremos agora as retas suporte *t* e *u*, dos lados *AD* e *BC*, respectivamente. Vamos comparar os triângulos *ABC* e *CDA*. Como *r* é paralela a *s*, por hipótese, a transversal *v*, a essas retas forma os ângulos correspondentes $A\hat{C}D$ e $E\hat{A}F$, os quais são congruentes, ou seja, $A\hat{C}D = E\hat{A}F$. Como $E\hat{A}F = C\hat{A}B$ (opostos pelo vértice), segue-se que $A\hat{C}D = C\hat{A}B$. Como $AB = CD$, também por hipótese. Alem disso, $AC = AC$ (lado comum). Dai, decorre do caso *LAL*, de congruência de triângulos, que $ABC = CDA$. Como consequência disso, obtemos em particular que $C\hat{A}D = A\hat{C}B$, mas $C\hat{A}D = E\hat{A}F$ (opostos pelo vértice) e portanto $E\hat{A}F = A\hat{C}B$. Assim as retas *t* e *u* são paralelas, pois determinam, juntamente com a transversal *v*, o par de ângulos correspondentes $E\hat{A}F$ e $A\hat{C}B$, os quais são congruentes. Concluímos então que o quadrilátero *ABCD* tem os dois pares de lados opostos paralelos, ou seja, é um paralelogramo. Isto conclui a demonstração.

Teorema 13:

Se *ABC* é um triângulo e *M, N* são pontos médios dos lados *AC* e *BC*, respectivamente, então o segmento *NM* é paralelo a *AB* e $\overline{NM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$.

Demonstração

Sejam ABC um triângulo e *M, N* os pontos médios dos lados *AB* e *AC*, respectivamente. Gostaríamos de mostrar que *MN* é paralelo a *AB* $\overline{NM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Para isso, prolongue a semi-reta S_{NM} até o ponto *P* tal que $NM = MP$, em seguida trace o segmento de reta *AP*, conforme ilustra a figura ao lado.

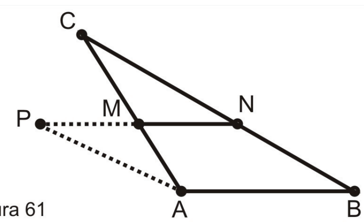


Figura 61

Vamos comparar agora os triângulos *APM* e *CNM*. Temos que $CM = AM$, pois *M*, por hipótese, é ponto médio de *AC*; $C\hat{M}N = A\hat{M}P$, pois são ângulos opostos pelo vértice e $NM = MP$, por construção. Dai, pelo caso de congruência *LAL*, segue-se que $APM = CNM$. Dai, decorre que $C\hat{N}M = A\hat{P}M$, e como consequência disso, as retas determinadas por *AP* e *BN*, cortadas pela transversal determinada por *MN*, formam um par de ângulos correspondentes congruentes. Portanto *AP* e *BN* são paralelas. Como $BN = NC$, pois *N*, por hipótese, é ponto médio de *BC* e $AP = BN$. Temos, portanto, no quadrilátero *ABNP* dois lados opostos paralelos e congruentes. Segue-se então, do teorema 12, que *ABNN* é um paralelogramo. Dai, *NM* é paralelo a *BC*. Além disso, como $\overline{NM} = \overline{MP}$ e $\overline{NP} = \overline{AB}$, decorre que $\overline{NM} + \overline{MP} = \overline{AB}$, de onde obtemos $\overline{NM} + \overline{NM} = \overline{AB}$ e finalmente $\overline{NM} = \frac{1}{2}\overline{AB}$. Isto conclui a demonstração.

A recíproca deste teorema é verdadeira e deixamos sua demonstração como mais um desafio para os leitores.

Refletindo...

Este teorema que acabamos de demonstrar afirma que, ao subdividirmos em duas partes congruentes quaisquer dois lados de um triângulo *ABC*, obtemos um outro triângulo *MNC* (ver figura acima), cuja razão entre as medidas dos lados, pode ser dada por $\frac{\overline{MN}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{NC}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{CM}}{\overline{CA}} = \frac{1}{2}$ ou $\frac{\overline{AB}}{\overline{MN}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{NC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CM}} = 2$. A razão entre as medidas desses lados, nessa ordem, tanto no primeiro quanto segundo caso, ilustram uma situação entre dois triângulos, a qual será objeto de estudo, na próxima unidade. Trata-se do conceito de "triângulos semelhantes".

Ainda com relação ao teorema anterior, o que acontece quando, ao invés de subdividirmos em duas partes congruentes, subdividimos em três partes congruentes, os lados *AC* e *BC* do triângulo *ABC*? E em quatro, cinco, ... ? No sentido de obter respostas para essas questões, apresentamos a seguir mais um teorema.

Teorema 14:

Sejam *r, s* e *u* três retas paralelas, cortadas por duas transversais t_1 e t_2, em pontos *R, S, U* e *R', S', U'*, respectivamente. Se *S* está entre *R* e *U*, na reta t_1, então *S'* está entre *R'* e *U'*, na reta t_2. Além disso, se *RS* = *SU*, então *R'S'* = *S'U'*.

Demonstração

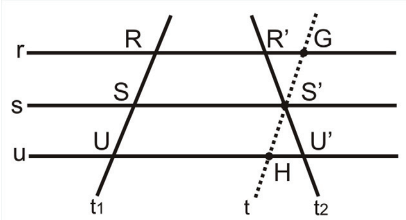


figura 62

Considere as retas paralelas *r*, s e *u*, cortadas pelas transversais t_1 e t_2, nos pontos *R, S, U* e *R', S', U'*, respectivamente. Vamos mostrar inicialmente que, se *S* está entre *R* e *U*, na reta t_1, então *S'* está entre *R'* e *U'*, na reta t_2. Para isso, observe que os pontos *R* e *U* estão em semiplanos distintos, relativamente à reta *s*, pois, por hipótese, *S* é um ponto da reta *s* que está entre *R* e *U*. Note também que *R* e *R'* estão em um dos dois semiplanos determinados por *s*, uma vez que *r* e *s* são paralelas, além do que *R* e *R'* estão na reta *r*. analogamente, obtemos que *U* e *U'* estão em um dos dois semiplanos determinados por *s*. Dai, segue-se que *R'* e *U'* estão em semiplanos distintos, relativamente à reta *s*. Portanto a reta *s* intercepta o segmento *R'U'* em um único ponto. Como, por hipótese, *S'* é o ponto de intersecção das retas *s* e t_2, além do que *R'* e *U'* estão em t_2, segue-se que o ponto de intersecção de *R'U'* com a reta *s* é exatamente o ponto *S'*. Logo *S'* está em *R'U'*. Concluímos dai a primeira parta da demonstração, ou seja, *S'* está entre *R'* e *U'*, conforme ilustra a figura acima.

Vamos mostrar agora que, se *RS* = *SU*, então *R'S'* = *S'U'*. Para isso, tracemos por *S'* uma reta *t,* paralela a t_1, a qual corta as retas *r* e *s*, respectivamente, nos pontos *G* e *H*, conforme ilustrado na figura acima. Comparemos agora os triângulos *S'GR'* e *S'HU'*. Pelo fato de *RSS'G* e *USS'H* serem paralelogramos, decorre que *RS* = *GS'* e *SU* = *S'H*. Como, por hipótese, *RS* = *SU*, segue-se que *GS'* = *S'H*. Em virtude do paralelismo das retas *r* e *u*, obtemos que $R'\hat{G}S' = U'\hat{H}S'$ (ângulos alternos internos). Já $R'\hat{S}'G = U'\hat{S}'H$, por serem ângulos opostos pelo vértice. Dai, segue-se do caso *ALA*, sobre congruência de triângulos, que $S'GR' = S'HU'$. Como consequência disso, obtemos em particular que *R'S'* = *S'U'*. Isto conclui a demonstração.

O teorema a seguir é uma consequência natural do anterior. A sua demonstração é análoga e será deixada como desafio para os leitores.

Teorema 15:

Sejam $r_1, r_2, \ldots$ e r_n, $n \geq 3$, retas paralelas cortadas por duas transversais t_1 e t_2, em pontos $R_1, R_2, \ldots, R_n$ e $R'_1, R'_2, \ldots, R'_n$, respectivamente. Se R_j está entre R'_{j-1} e R'_{j+1}, em t_1, então R'_j está entre R'_{j-1} e R'_{j+1}, em t_2, isto para $j = 2, 3, \ldots, n$. Além disso, se $R_1 R_2 = R_2 R_3 = \ldots = R_{n-1} R_n$, então $R'_1 R'_2 = R'_2 R'_3 = \ldots = R'_{n-1} R_n$.

Teorema 16:

Se uma reta r é paralela a um dos lados de um triângulo e intercepta os outros dois lados, então ela divide esses lados na mesma razão.

O leitor mais curioso pode pesquisar a demonstração deste teorema, nas referências bibliográficas [1] ou [2].

A razão pela qual não apresentamos aqui a demonstração desse teorema é que, além da necessidade de utilização do conceito de "Limite", também necessitamos de usar fatos além do nível e objetivos aqui almejados. Porém, é importante ressaltar que, além de muito importante, trata-se de um belíssimo exemplo de demonstração matemática. Apresentamos ao lado, apenas uma ilustração geométrica do teorema.

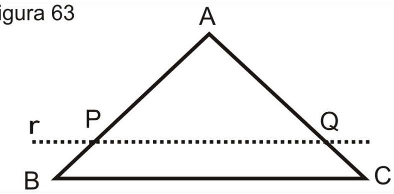


figura 63

Nesse caso, temos que $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}$. Apresentaremos a seguir, a recíproca do teorema anterior, a qual é verdadeira.

Teorema 17:

Se uma reta r intercepta dois lados de um triângulo, dividindo-os na mesma razão, então ela é paralela ao terceiro lado.

Demonstração

Sejam ABC um triângulo qualquer e r uma reta que intercepta os lados AB e AC nos pontos P e Q, respectivamente. Vamos mostrar que, se $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}$, então r é paralela ao lado BC. Para isso, suponhamos por absurdo, que r não seja paralela a BC. Nesse caso, tracemos pelo ponto P a reta s, paralela a BC e interceptando o lado AC em um ponto R, conforme ilustra a figura ao lado.

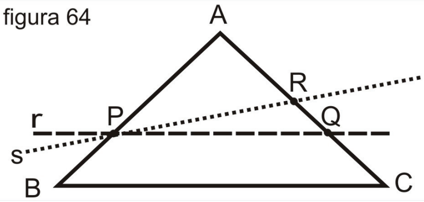


figura 64

Segue-se agora, pelo teorema anterior, que $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AR}}{\overline{AC}}$, donde obtemos que $\overline{AR} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \cdot \overline{AC}$, mas da igualdade $\dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{AQ}}{\overline{AC}}$, apresentada na hipótese inicial, decorre que $\overline{AQ} = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{AB}} \cdot \overline{AC}$. Portanto $\overline{AR} = \overline{AQ}$, assim os pontos R e Q coincidem. Daí, as retas r e s também coincidem e, portanto, r é paralela a BC, uma vez que s também o é. Isto conclui a demonstração.

Chegamos finalmente agora ao teorema de Tales, sobre um feixe de paralelas cortadas por duas transversais.

Teorema 18: (Tales)

Se um feixe de retas paralelas $r_1, r_2, \ldots r_n$, $(n \geq 3)$ é cortado por duas transversais t_1 e t_2, então a razão entre as medidas dos comprimentos, de quaisquer dois segmentos determinados em t_1, é igual a razão entre as medidas dos comprimentos dos segmentos correspondentes, determinados na reta t_2.

Não apresentaremos aqui a demonstração deste teorema, no entanto, é importante observar que, a menos da utilização de algumas propriedades das proporções entre números reais, ela segue essencialmente os passos da demonstração do teorema 16.

A figura seguinte ilustra uma situação de proporcionalidade, decorrente do Teorema de Tales.

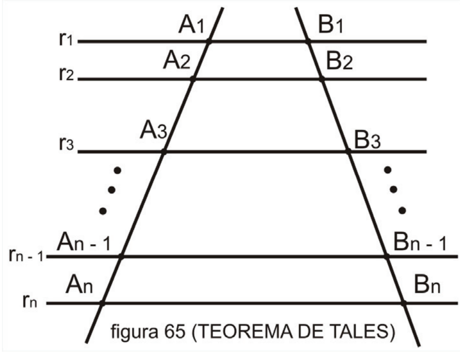


figura 65 (TEOREMA DE TALES)

Em seguida temos a descrição de uma situação, onde a utilização do teorema de Tales resolve o problema em questão.

Na Figura 64, temos por exemplo, que $\frac{\overline{A_1A_n}}{A_1A_2} = \frac{\overline{B_1B_n}}{B_1B_2}$. É claro que o total de possibilidades para a proporcionalidade, depende do total de retas paralelas.

Situação Problema

Dispomos de duas folhas de papel quadradas e com as mesmas medidas. Uma dessas folhas é pautada e desejamos transformar uma outra folha lisa (ou em branco), em um papel quadriculado. Para isso, vamos usar o teorema do feixe de paralelas, cortadas por duas transversais (ou teorema de Tales). É claro que vamos necessitar de material básico para desenho.

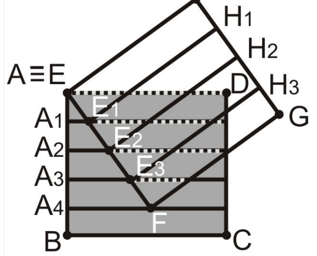
Resolução

Vamos representar as duas folhas de papel, pelos seus contornos quadrados *ABCD* e *EFGH*. Por questão de simplificações, a folha pautada *ABCD*, apresenta apenas quatro linhas, ou equivalentemente, cinco espaços. Já a folha lisa *EFGH* será subdividida em "pequenos quadrados", nesse caso, faremos uma subdivisão no maior numero de partes iguais e quadradas, que for possível, ou seja, dezesseis. O procedimento é o seguinte:

1° Passo

Superponha as duas folhas, de forma que a pautada fique por baixo, enquanto os pontos *A, B, C* e *D* coincidem, respectivamente, com *E, F, G* e *H.*

figura 66



2° Passo

Gire no sentido anti-horário, em torno do ponto *A* (o qual coincide em *E*), a folha lisa *EFGH*, até o instante que o ponto *H* tocar a primeira das quatro linhas, conforme ilustra a figura ao lado.

3° Passo

Por cada um dos pontos E_1, E_2 e E_3, determinados no passo anterior, trace os segmentos E_1H_1, E_2H_2 e E_3H_3 paralelos a *EH*, conforme figura acima.

4° Passo

Como a folha pautada deva ser escolhida, de modo que $AA_1 = A_1A_2 = A_2A_3 = A_3A_4 = A_4B$, decorre pelo Teorema de Tales que $EE_1 = E_1E_2 = E_2E_3 = E_3F$.

Para obtermos a folha de papel quadriculado, resta-nos agora, repetir os quatro passos, onde no 1° Passo teremos *A, B, C* e *D* coincidindo, respectivamente, com *H, E, F,* e *G*.

A partir dessa situação, podemos imaginar outras possibilidades. Por exemplo, qual modificação deve ser feita no procedimento anterior, para que o papel liso fique subdividido em quatro quadrados, ao invés de dezesseis?

É possível fazer outras modificações na situação, de forma a obter outros problemas. Use sua imaginação e crie outros problemas.

Unidade VI: Semelhança de Triângulos

1. - Situando a Temática

Nesta unidade vamos introduzir o conceito de triângulos semelhantes, apresentar os três casos clássicos de semelhança entre dois triângulos e obter algumas consequências, destacando-se o Teorema de Pitágoras.

A idéia intuitiva de "figuras geométricas semelhantes" está associada a "ampliação" ou "redução" de um objeto, mantendo-se a sua "forma" e respeitando as "proporções". Poderíamos aqui apresentar vários exemplos ilustrativos, de como esse conceito é utilizado nas práticas do cotidiano, por exemplo, na revelação de fotografias, na produção de maquetes, na leitura de cartas geografias, etc. Porém, esses exemplos vão ficar para o final da unidade. Só a título de ilustração, mostraremos a seguir, como ampliar um triângulo *ABC* em outro *A'B'C'*, "semelhante" ao anterior, com $\overline{A'B'} = 2\overline{AB}$, $\overline{B'C'} = 2\overline{BC}$ e $\overline{C'A'} = 2\overline{CA}$. Para isso, vamos considerar um ponto *V*, no exterior do triângulo *ABC*, para em seguida traçar as semi-retas S_{VA}, S_{VB}, S_{VC} e escolher sobre elas os pontos *A'*, *B'* e *C'*, respectivamente, de modo que $\overline{VA'} = 2\overline{VA}$, $\overline{VB'} = 2\overline{VB}$ e $\overline{VC'} = 2\overline{VC}$. Procedendo assim obtemos o triângulo desejado, conforme ilustrado na figura ao lado.

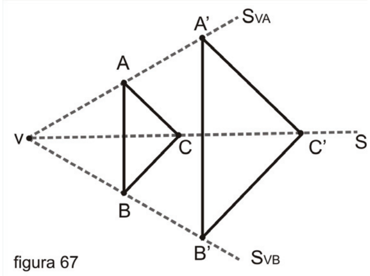
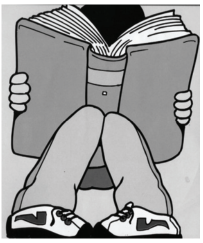


figura 67

Ampliação do triângulo *ABC*

Ampliando o seu conhecimento...



O procedimento ilustrado anteriormente pode naturalmente ser generalizado para figuras geométricas, não necessariamente triangulares, bem como para figuras tridimensionais. A figura abaixo ilustra uma situação análoga à anterior, onde o triângulo *ABC* foi substituído por uma outra figura plana, inclusive sem a forma de um polígono. Também poderíamos considerar o ponto *V* no interior da figura.

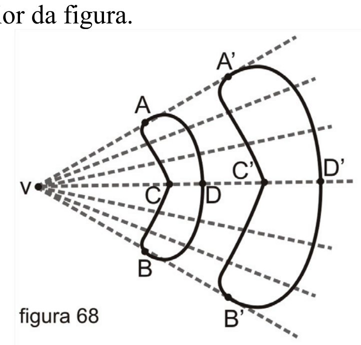


figura 68

Dialogando e construindo o seu conhecimento

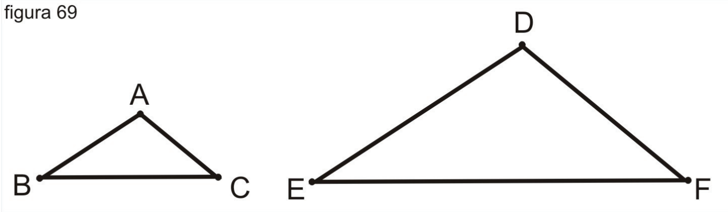
Antes de passarmos aos casos clássicos de semelhança de triângulos, é importante ressaltar aqui que o conceito de "semelhança", quando aplicado a seres vivos, no campo conceitual da Biologia, já tem outro significado, pois dois seres vivos quaisquer de uma mesma espécie, são semelhantes, independentemente das relações entre suas formas e proporções.

Definição 1: Triângulos semelhantes

Dois triângulos são ditos semelhantes quando é possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os vértices de um e do outro, de modo que:

- Ângulos com vértices correspondentes sejam congruentes e
- Lados opostos a vértices correspondentes sejam proporcionais. Esses lados são ditos "homólogos" ou correspondentes. (Veja ilustração na figura abaixo)

figura 69



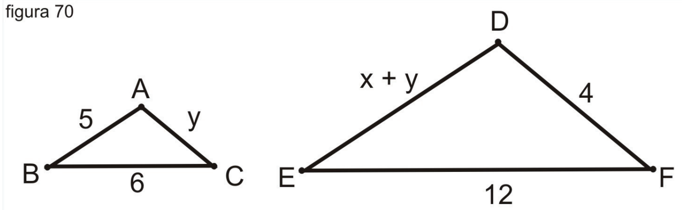
Usaremos a notação $ABC \sim DEF$ para denotar a semelhança dos triângulos, quando $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E \text{ e } C \leftrightarrow F$. A razão constante entre as medidas dos lados é dita "razão de semelhança" ou "razão de proporcionalidade". Na ilustração apresentada anteriormente, supomos que a correspondência biunívoca entre os vértices é dada por $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E \text{ e } C \leftrightarrow F$. Dai, valem as seguintes relações:

$\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}, \hat{C} = \hat{F} \text{ e } \dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$, pois os lados *AB, BC* e *CA* do triângulo *ABC* são homólogos aos lados *DE, EF* e *FD* do triângulo *DEF*, respectivamente. Apresentamos a seguir dois exemplos básicos, os quais ilustram a utilização do conceito de triângulos semelhantes.

Exemplo 1

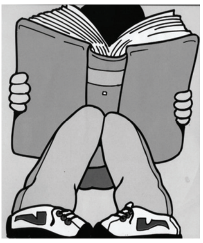
Suponhamos que as medidas dos lados de dois triângulos, *ABC* e *DEF*, representados na figura abaixo, estejam em uma mesma unidade. Sabendo-se que *ABC* ~ *DEF*, calcule *x* e *y*.

figura 70



Como *ABC* ~ *DEF* significa que $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E \text{ e } C \leftrightarrow F$ é a correspondência biunívoca, decorre que $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$. Dai obtemos que $\dfrac{5}{x+y} = \dfrac{6}{12} = \dfrac{y}{4}$. Nesse caso, a razão de semelhança é $\dfrac{6}{12} = \dfrac{1}{2}$ e portanto $\dfrac{5}{x+y} = \dfrac{1}{2}$, de onde obtemos que $x + y = 10$. Também obtemos que $\dfrac{y}{4} = \dfrac{1}{2}$, de onde se segue que $y = 2$ e, como consequência, $x + 2 = 10$, de onde se segue que $x = 8$. Concluímos então que os lados do triângulo *DEF* que são homólogos aos lados do triângulo *ABC* são sempre, em medida, iguais ao dobro.

Ampliando o seu conhecimento...



Note que a proporção $\dfrac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \dfrac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = \dfrac{1}{2}$, implica que $\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \dfrac{\overline{FD}}{\overline{CA}}$ tem constante de proporcionalidade igual a $\dfrac{12}{6} = 2$. Isto equivale dizer que *DEF* ~ *ABC*, o que já era bastante natural de se esperar. Na verdade, além disso, também valem as relações:

- *ABC* ~ *ABC*, qualquer que seja o triângulo *ABC*
- Se *ABC* ~ *DEF* e *DEF* ~*GHI*, então *ABC* ~*GHI*

Podemos então concluir que a relação "~" de semelhança entre triângulos, quando considerada no universo de todos os triângulos, tem as propriedades de simetria, reflexividade e transitividade. Essas três propriedades caracterizam, em Matemática, uma "relação de equivalência", neste caso, dentro do conjunto formado por todos os triângulos. Elas são muito importantes na Matemática.

Exemplo 2

Suponhamos que as medidas dos ângulos de dois triângulos *ABC* e *DEF*, representados na figura abaixo, estejam em uma mesma unidade. Sabendo-se que *ABC* ~ *DEF,* calcule $\alpha,\ \beta\ e\ \gamma$.

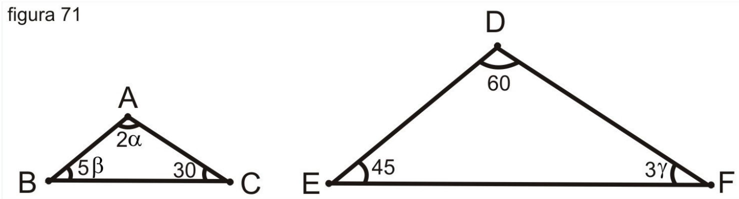


figura 71

Resolução

Como *ABC* ~ *DEF* significa que $A \leftrightarrow D, B \leftrightarrow E\ e\ C \leftrightarrow F$ é a correspondência biunívoca, decorre que $\hat{A} = \hat{D}, \hat{B} = \hat{E}\ e\ \hat{C} = \hat{F}$. Dai obtemos que $2\alpha = 60, 5\beta = 45\ e\ 30 = 3\gamma$, de onde obtemos que $\alpha = 30, \beta = 9\ e\ \gamma = 10$.

> Observação:
>
> Note que na resolução não necessitamos utilizar, pelo menos diretamente, a proporcionalidade dos lados. Analogamente, no exemplo 1, não necessitamos utilizar a congruência dos ângulos com vértices correspondentes.

Teorema 1 (1° caso de semelhança de triângulos)

Se dois ângulos internos de um triângulo são congruentes a dois ângulos internos de outro, então esses triângulos são semelhantes.

Demonstração

Sejam *ABC* e *DEF* dois triângulos com dois ângulos internos de um, iguais a dois ângulos internos do outro. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $\hat{A} = \hat{D}$ e $\hat{B} = \hat{E}$. Gostaríamos de mostrar que *ABC* ~ *DEF*. Para isso, primeiramente vamos mostrar que $\hat{C} = \hat{F}$. De fato, pois já mostramos, no teorema 6 da unidade ***V***, que $\alpha + \beta + \gamma = 180°\ e\ \alpha' + \beta' + \gamma' = 180°$, onde $\alpha, \beta\ e\ \gamma$ são medidas de $\hat{A}, \hat{B}\ e\ \hat{C}$, enquanto $\alpha', \beta'\ e\ \gamma'$ são medidas de $\hat{D}, \hat{E}\ e\ \hat{F}$ respectivamente. Como, por hipótese, $\alpha = \alpha'\ e\ \beta = \beta'$; decorre da igualdade $\alpha + \beta + \gamma = \alpha' + \beta' + \gamma'$ que $\gamma = \gamma'$, portanto $\hat{C} = \hat{F}$. Assim, resta-nos mostrar que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$. Vamos supor que $\overline{EF} > \overline{BC}$. Marque no lado *EF*, um ponto *G* tal que *EG* = *BC* e, por esse ponto, trace uma reta *r*, paralela ao lado *FD*. Esta reta corta a semi-reta S_{ED} em um ponto *H*, conforme ilustra a figura abaixo.

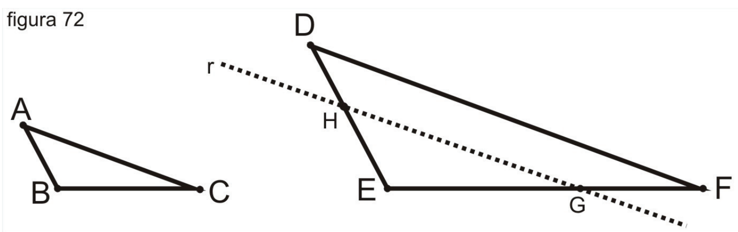


figura 72

Comparemos agora, os triângulos *ABC* e *HEG*. Temos $\hat{B} = \hat{E}$, por hipótese, e *BC* = *EG* por construção. Mas $\hat{F} = E\hat{G}H$, pois *r* é paralela a *DF*. Como já mostramos que $\hat{F} = \hat{C}$, segue-se que $\hat{C} = E\hat{G}H$. Portanto, do caso *ALA* de congruência de triângulos, decorre que *ABC* = *HEG*. Dessa congruência obtemos que *AB* =

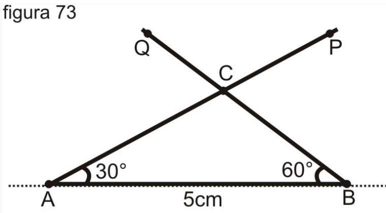
HE. Usando agora o teorema 16 da unidade **V**, no triângulo DEF, segue-se que $\frac{\overline{DE}}{\overline{HE}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{EG}}$. Mas isto equivale a dizer que $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}}$, pois já sabíamos que $AB = HE$ e $BC = EG$. De modo inteiramente análogo, apenas com a reta r paralela ao lado EG, construímos uma "cópia" do triângulo ABC, de onde obtemos que $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{CA}}$. Portanto $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{CA}}$. Isto mostra que os lados homólogos são proporcionais. Portanto $DEF \sim ABC$ e, como vale a simetria, concluímos que $ABC \sim DEF$. Como queríamos demonstrar.

Atividade de Desenho.

1° Parte

Desenhe, em uma folha de papel, um segmento de reta AB, cuja medida seja *5 cm*. Em seguida, a partir do ponto A trace uma semi-reta S_{AP}, formando com S_{AB} um ângulo de 30°. Depois, a partir do ponto B, trace uma semi-reta S_{BQ}, formando um ângulo de 60°, de modo que os pontos P e Q estejam em um mesmo semiplano, determinado pela reta suporte de AB. Estas duas semi-retas S_{AP} e S_{BQ} se cruzam em um ponto C, formando um triângulo ABC, conforme ilustra a figura ao lado.

figura 73



2° Parte

Repita o procedimento descrito na 1° parte, apenas trocando a medida do segmento de 5cm para 10cm. Construa então um outro triângulo DEF.

3° Parte

Conclua que $ABC \sim DEF$ e justifique

4° Parte

Recorte com a maior precisão que lhe for possível, os dois pedaços de papel, cujos contornos são os triângulos ABC e DEF.

5° Parte

Verifique que $\hat{C} = \hat{F}$ (são ângulos retos) e $\frac{\overline{DE}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{FD}}{\overline{CA}} = 2$.

Conclusão:

O 1° caso de semelhança de triângulos nos permite construir triângulos semelhantes a partir de dois ângulos internos e do lado compreendido entre eles.

Teorema 2 (2° caso de semelhança de triângulos)

Se em dois triângulos ABC e DEF temos $\hat{A} = \hat{D}$ *e* $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, então ABC é semelhante a DEF.

Demonstração

Sejam ABC e DEF dois triângulos tais que $\hat{A} = \hat{D}$ *e* $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $\overline{BC} > \overline{EF}$. Gostaríamos de mostrar que $ABC \sim DEF$. para isso marquemos os pontos G e

H, nos lados *AB* e *AC* do triângulo *ABC*, respectivamente, de modo que *AG* = *DE* e *AH* = *DF*. Em seguida liguemos *G* a *H*, de forma a obter o triângulo *AGH*, conforme ilustra a figura abaixo.

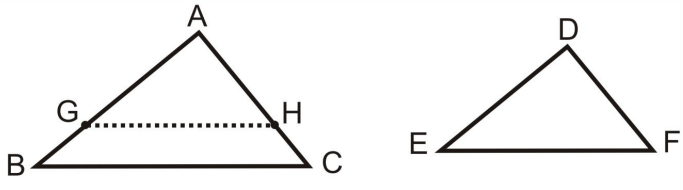


figura 74

Comparemos agora os triângulos *AGH* e *DEF*. Temos por hipótese que $\hat{A} = \hat{D}$, já por construção *AG* = *DE* e *AH* = *DF*. Portanto, do caso *LAL* de congruência de triângulos, decorre que *AGH* = *DEF*. Como consequência disso, $A\hat{G}H = \hat{E}$ e $A\hat{H}G = \hat{F}$. Sabemos, por hipótese, que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{DF}}$, dai $\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AH}}$, pois *AG* = *DE* e *AH* = *DF*. Portanto podemos agora aplicar o teorema 17 da unidade ***V*,** para garantir que *GH* é paralelo a *BC*. Desse paralelismo, segue-se que $A\hat{G}H = \hat{B}$ e $A\hat{H}G = \hat{C}$. Portanto $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \hat{F}$ e como consequência do 1° caso de semelhança de triângulos, decorre que *ABC* ~ *DEF*. Isto conclui a demonstração.

Teorema 3 (3° caso de semelhança de triângulos)

Se em dois triângulos ABC e DEF temos $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$, então ABC é semelhante a DEF.

Demonstração

Sejam *ABC* e *DEF* dois triângulos tais que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$. Gostaríamos de mostrar que *ABC* ~ *DEF*. Para isso, marquemos os pontos *G* e *H*, nos lados *AB* e *BC* do triângulo *ABC*, respectivamente, de modo que *AG* = *DE* e *AH* = *DF*. Em seguida liguemos *G* a *H*, de modo a obter o triângulo *AGH*, conforme ilustra a figura abaixo.

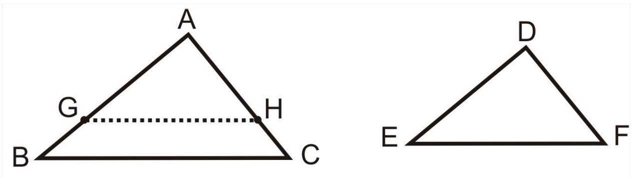


figura 75

Como por hipótese $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$, segue-se que $\frac{\overline{AB}}{\overline{AG}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AH}}$. E agora pelo teorema 17 da unidade ***V***, obtemos que *GH* é paralelo a *BC*. Como consequência desse paralelismo, decorre que $A\hat{G}H = \hat{B}$ e $A\hat{H}G = \hat{C}$. Portanto do 1° caso de semelhança de triângulos, segue-se que *ABC* ~ *AGH*. Como consequência disso $\frac{\overline{GH}}{\overline{BC}} = \frac{\overline{AG}}{\overline{BC}}$, de onde obtemos que $\overline{GH} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} . \overline{AG} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} . \overline{DE}$. Por outro lado, temos por hipótese que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}$, de onde obtemos que $\overline{EF} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}} . \overline{DE}$. Comparando agora com a igualdade obtida anteriormente para $\overline{GH}$, decorre que $\overline{EF} = \overline{GH}$. Como consequência *AGH* = *DEF*, pelo caso *LLL* de congruência de triângulos, uma vez que, por construção, já sabíamos que *AG* = *DE* e *AH* = *DF*. Como consequência dessa congruência, obtemos que $A\hat{G}H = \hat{E}$ e $A\hat{H}G = \hat{F}$. Lembrando agora que já temos $A\hat{G}H = \hat{B}$ e $A\hat{H}G = \hat{C}$, segue-se que $\hat{B} = \hat{E}$ e $\hat{C} = \vec{F}$. Agora, pelo 1° caso de semelhança de triângulos, decorre que *ABC* ~ *DEF*. Isto conclui a demonstração.

Dialogando e construindo o seu conhecimento

Uma análise dos casos, tanto de semelhança quanto de congruência de triângulos, nos permite inicialmente concluir que o mínimo de condições necessárias e suficientes, para que dois triângulos sejam congruentes ou semelhantes é dado em cada um dos respectivos casos. Para justificar isso, é necessário apresentar apenas uma "argumentação matemática", a qual pode ser dada com a apresentação de um contra-exemplo. Só para que isso fique mais claro, no 1° caso de semelhança de triângulos, ao invés de "dois", suponha que apenas "um" ângulo interno de um triângulo *ABC* é congruente a um ângulo interno de outro triângulo *DEF*. Podemos justificar com contra-exemplo, que a afirmação não é verdadeira. Ou seja, é possível construir dois triângulos, *ABC* e *DEF*, de modo que $\hat{A} = \hat{D}$, mas *ABC NÃO* é semelhante a *DEF*. Neste caso basta, por exemplo, considerar dois triângulos, onde cada um deles tem um ângulo reto (triângulos retângulos), mas apenas um deles é isósceles. Os detalhes dessa justificativa podem ser apresentados tanto pela via da "Geometria Experimental" quanto da "Geometria Formal". Fica aqui a sugestão para que os leitores façam o experimento e usem os teoremas corretamente. É um bom exercício!

Um detalhe que pode passar meio que despercebido é que uma opção escolhida, neste texto, foi não apresentar os casos, tanto de congruência quanto de semelhança de triângulos retângulos. Eles podem ser pesquisados nas referências bibliográficas [1] e [2]. Um outro detalhe que só agora, após concluirmos os casos de semelhança de triângulos podemos notar, é que quando a razão de semelhança é igual a 1, além de semelhantes, os triângulos em questão também são congruentes. Ou seja, "se *ABC* = *DEF*, então *ABC* ~ *DEF*" é verdadeira. A recíproca é verdadeira? Justifique sua resposta.

Considere *ABC* um triângulo retângulo, cujo ângulo reto está localizado no vértice *A*, oposto à hipotenusa *BC* e seja *AH* a altura de *ABC* relativa à hipotenusa. Daí, segue-se que *ABH* e *ACH* também são triângulos retângulos, com o ângulo reto de ambos, no vértice *H*. Representando as medidas dos segmentos *BC, CA, AB, AH, BH* e *CH*, em uma mesma unidade, pelas letras *a, b, c, h, m* e *n*, respectivamente, vamos mostrar que:

1. $h^2 = m.n$, ou seja, a altura relativa à hipotenusa é igual à média geométrica das projeções ortogonais dos catetos *AB* e *CA*, sobre a hipotenusa *BC*.

2. $c^2 = a.m$ e $b^2 = a.n$, ou seja, cada cateto do triângulo *ABC* é igual à média geométrica entre sua projeção ortogonal sobre a hipotenusa e a própria.

3. $bc = ah$.

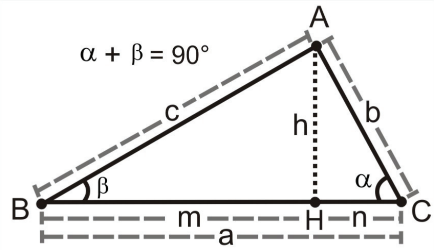


figura 76

Isto tudo, de acordo com a ilustração apresentada na figura acima.

Demonstração

Note que o ângulo $B\hat{A}H$ também mede α, pois $A\hat{H}B$ é o ângulo reto do triângulo *ABH*, cuja soma dos ângulos internos é 180°. Analogamente obtemos que o ângulo *CÂH* também mede β. Dai, os três triângulos *ABC, ABH* e *ACH* são semelhantes, por terem dois ângulos internos de cada um deles congruentes a dois ângulos internos de qualquer um dos outros dois. Isso é garantido pelo 1° caso de semelhança de triângulos. Mais precisamente, temos que *ABC* ~ *HBA* ~ *HAC*. Da semelhança *ABC* ~ *HBA*, decorre que $\frac{\overline{AB}}{\overline{HB}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BA}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{AH}} \therefore \frac{c}{m} = \frac{a}{c} = \frac{b}{h}$ e, portanto, da igualdade $\frac{c}{m} = \frac{a}{c}$, segue-se que $c^2 = a.m$. Da igualdade $\frac{a}{c} = \frac{b}{h}$, segue-se que $bc = ah$. Da semelhança *ABC* ~ *HAC*, decorre que $\frac{\overline{AB}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CH}} \therefore \frac{c}{h} = \frac{a}{b} = \frac{b}{n}$ e portanto, da igualdade $\frac{a}{b} = \frac{b}{n}$, segue-se que $b^2 = a.n$. Da semelhança *HBA* ~ *HAC* decorre que

$\dfrac{m}{h}=\dfrac{c}{b}=\dfrac{h}{n}$ e portanto, da igualdade $\dfrac{m}{h}=\dfrac{h}{n}$, segue-se que $h^2=m.n$. Isto conclui o que pretendíamos mostrar. Agora vamos obter, como consequência, o célebre Teorema de Pitágoras.

Teorema 4 (Pitágoras)

Em qualquer triângulo retângulo, a soma dos quadrados das medidas dos catetos é igual ao quadrado da medida de sua hipotenusa.

Demonstração

Considere a mesma figura usada na ilustração anterior. Gostaríamos então de mostrar que $a^2=b^2+c^2$. Para isso, vamos inicialmente utilizar os fatos $b^2=a.n$ e $c^2=a.m$, demonstrados anteriormente, para obtermos que $b^2+c^2=a.n+a.m=a.(n+m)$.

Como $m+n=a$, segue-se que $b^2+c^2=a.a$, ou seja $a^2=b^2+c^2$. Isto conclui a demonstração.

Teorema 5 (recíproca do teorema de Pitágoras)

Em um triângulo qualquer, cujas medidas dos lados, em uma mesma unidade, são representadas por *a, b* e *c*, se $a^2=b^2+c^2$, então o triângulo é retângulo e a sua hipotenusa é o lado cuja medida é *a*.

Demonstração

Sejam *ABC* um triângulo, cujas medidas dos lados, em uma mesma unidade, sejam representadas por *a, b* e *c*. Além disso, suponha que $a^2=b^2+c^2$. Gostaríamos de mostrar que *ABC* é um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa é *a*. Para isso, a partir das medidas *b* e *c* construa um triângulo retângulo *A'B'C'*, cujos catetos *A'B'* e *C'A'* tenham medidas *c* e *b*, respectivamente. Nesse triângulo retângulo *A'B'C'*, obtemos pelo teorema de Pitágoras, que sua hipotenusa *B'C'* tem medida igual a $\sqrt{b^2+c^2}$. Mas, por hipótese, $a^2=b^2+c^2$, ou seja, $a=\sqrt{b^2+c^2}$. Portanto, as medidas dos três lados do triângulo *A'B'C'*, são iguais às medidas dos três lados do triângulo *ABC*. Dai, decorre, pelo terceiro caso de congruência de triângulos, que *ABC = A'B'C'*, ou seja, *ABC* é um triângulo retângulo cuja medida da hipotenusa é *a*, enquanto os dois catetos têm medidas *b* e *c*. Isto conclui a demonstração.

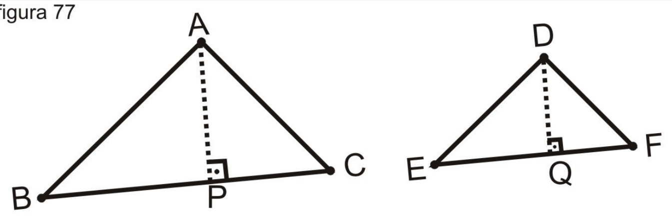
Refletindo...

O conceito matemático de semelhança de triângulos é muito forte e poderoso, por exemplo, na resolução de uma gama de problemas importantes. Ele também tem uma grande importância histórica, não apenas por estar intimamente ligado ao quinto postulado. Até me arriscaria a dizer que ele é a Alma da Geometria! Apresentaremos abaixo alguns exemplos ilustrativos, nos quais utilizamos semelhança de triângulos.

Exemplos Ilustrativos

(1) As alturas relativas a "lados homólogos" de triângulos semelhantes guardam a mesma proporção desses lados, conforme ilustra a figura abaixo.

figura 77



Como *ABC* ~ *DEF*, segue-se que os lados *BC* e *EF*, respectivamente, dos triângulos *ABC* e *DEF*, são homólogos. Foram traçadas as alturas relativas aos lados *BC* e *EF* (ver figura). Gostaríamos então de mostrar que $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DQ}}$. Para isso, vamos comparar os triângulos *ABP* e *DEQ*. Temos $\hat{B} = \hat{E}$, pois *ABC* ~ *DEF*, também $A\hat{P}B = D\hat{Q}E$, pois são ângulos retos, já que *AP* e *DQ* são alturas. Decorre então, pelo 1° caso de semelhança de triângulos, que *ABP* ~ *DEQ*. Dai, obtemos que a razão entre as medidas, dos lados homólogos é constante, ou seja, $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BP}}{\overline{EQ}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DQ}}$. Mas $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}}$. Segue-se dessas duas proporções que $\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{DQ}}$. Isto completa a justificativa.

Ainda com relação ao exemplo 1, digamos que $\frac{\overline{AB}}{\overline{DE}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{FD}} = K$, ou seja, a constante de semelhança é igual a *K*. Neste caso, qual é a relação entre a área do triângulo *ABC* e a área do triângulo *DEF?* E a relação entre os perímetros? Vamos calcular a razão entre as áreas. Temos que a área de um triângulo qualquer é igual à metade do produto das medidas de qualquer um de seus lados e da altura relativa a esse lado. No caso em questão, temos. $\frac{\text{Área de } ABC}{\text{Área de } DEF} = \frac{\frac{1}{2}\overline{BC}\,.\,\overline{AP}}{\frac{1}{2}\overline{EF}\,.\,\overline{DQ}} = \left(\frac{\overline{BC}}{\overline{EF}}\right).\left(\frac{\overline{AP}}{\overline{DQ}}\right) = K\,.\,K = K^2$. Portanto a relação entre as áreas é igual ao quadrado da razão de semelhança. Para determinar a relação entre os perímetros, sugerimos a utilização de propriedades das proporções. Isto fica como desafio para o leitor.

(2) Medição de alturas “inatingíveis”

Para medir a altura da maior pirâmide da cidade de Gizé, no antigo Egito, conta-se que no século VI a.C. Tales (de Mileto), quando estava em viagem comercial ao Egito, teria recebido do Faraó a tarefa de medir a altura da Pirâmide de Quéops (150m, ou equivalente à altura de um prédio com 50 andares). Em se tratando de um monumento de tamanhas proporções, um procedimento utilizável à época estava longe de ser mais simples do que foi proposto pela genialidade de Tales. Para medir a altura da pirâmide reta, de base quadrada e situada em um plano, Tales se valeu do “paralelismo dos raios do sol” que chegam à Terra. Ele se utilizou do conhecimento matemático, particularmente sobre semelhança de triângulos, para calcular “medidas de difícil acesso”, no caso, a altura da pirâmide. Foram feitos medições de uma vareta retilínea e das “sombras” da vareta e da pirâmide, sobre um plano horizontal. A medida do lado quadrado da base é conhecida. Na ilustração apresentada na figura seguinte, apresentamos um esboço dos triângulos semelhantes, utilizados por Tales.

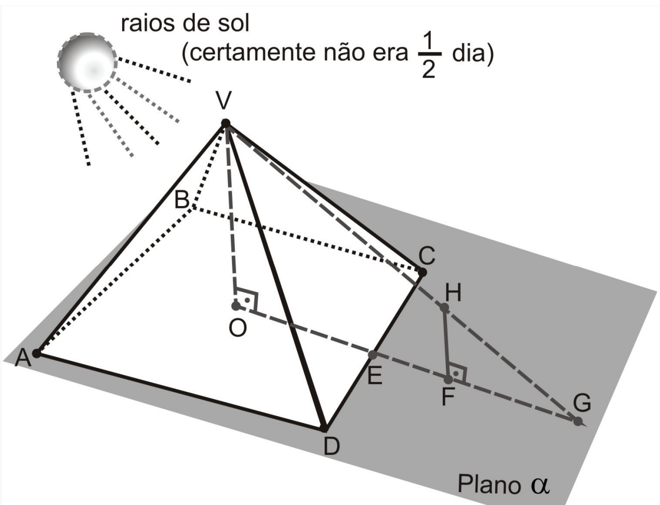


figura 78

Temos $VOG \sim HFG$, pois $V\hat{O}G = H\hat{F}G$ (ângulos retos) e $V\hat{G}O = H\hat{G}F$ (ângulo comum), portanto os triângulos VOG e HFG são semelhantes pelo 1° caso. Como consequência disso, segue-se que $\frac{\overline{VO}}{\overline{HF}} = \frac{\overline{OG}}{\overline{FG}}$ e, portanto fica calculada a medida da altura $\overline{VO} = \overline{HF} \cdot \frac{\overline{OG}}{\overline{FG}}$.

Unidade VII: Circunferências e Arcos

1. - Situando a Temática

A circunferência é uma das curvas planas, cuja importância histórico-cultural se perde ao longo dos tempos. Existem importantes documentos históricos onde a circunferência aparece, seja com motivações para sua utilização em meios de transporte, seja como símbolo de perfeição e beleza. Independentemente da motivação intra ou interdisciplinar, apresentaremos alguns resultados interessantes sobre a Geometria da circunferência, dentre os quais destacamos a inscrição e circunscrição de polígonos.

Definição 1:

Uma circunferência de centro *C* e raio $r > 0$ é uma curva plana, a qual é formada por todos os pontos do plano, cuja distância até o centro *C* é igual ao raio *r*.

Observações:

- Os pontos do plano, cuja distância ao centro *C* é menor do que *r*, constituem o interior. Já se trocamos "menor" por "maior", obtemos o exterior.
- Costumamos chamar de círculo, a região do plano formada pela circunferência, juntamente com o interior.
- Ao ligarmos dois pontos *P* e *Q*, de uma circunferência, por um segmento de reta *PQ*, o mesmo é dito "corda da circunferência". Quando o centro *C* pertence à corda, ela é dita "diâmetro". Ou seja, o diâmetro é uma corda cujo comprimento, em unidades de medida, é o maior possível.
- Como $r > 0$ é, em unidades de comprimento, a medida do raio, referimo-nos a um diâmetro como uma corda cujo comprimento é o dobro do raio, ou seja $2r$.
- Referimo-nos ao raio $r > 0$ também como qualquer segmento de reta ligando o centro a qualquer ponto da circunferência.

Definição 2:

Uma semicircunferência é cada uma das duas partes de uma circunferência, obtidas em cada um dos semiplanos determinados pela reta suporte de qualquer diâmetro, conforme ilustra a figura abaixo.

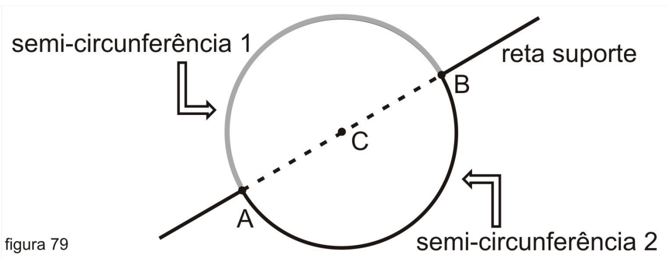


figura 79

AB é um diâmetro e o ponto *C* é o centro. Cada arco equivale à metade da circunferência.

Observação

Quando consideramos a reta suporte de um corda *AB*, sem passar pelo centro *C*, ela também vai dividir a circunferência em duas partes. Uma delas, contida em um dos dois semiplanos ilustrado na figura acima, onde *C* está situado. A outra parte está contida no outro semiplano, conforme ilustra a figura seguinte.

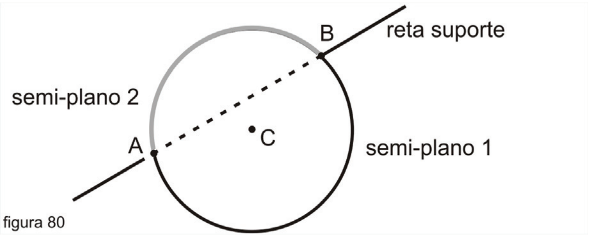


figura 80

O arco do semiplano 1 é dito “arco maior”, o outro é o “arco menor”.

Teorema 1:

Uma corda de uma circunferência intercepta um raio no ponto *P*. Se esse raio é perpendicular à corda, então *P* é o ponto médio dessa corda.

Demonstração

Considere uma circunferência de cento *O*, onde um de seus raios *OC* intercepta uma corda *AB*, em um ponto *P*, conforme ilustra a figura abaixo. Gostaríamos de mostrar que, se *OC* é perpendicular a *AB*, então *P* é o ponto médio dessa corda, ou seja, *AP = PB*. Para isso, trace os raios *AO* e *OB,* conforme ilustra a figura ao lado.

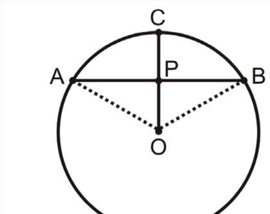


figura 81

Em seguida, compare os triângulos *OAP* e *OBP*. Nesses triângulos temos *OA = OB* (ambos são raios), *OP = OP* (lado comum). Como, por hipótese, o raio *OC* é perpendicular à corda *AB*, obtemos que os triângulos *OAP* e *OBP* são retângulos, com ângulo reto no vértice *P*. Dai, pelo teorema de Pitágoras, segue-se que $\overline{AP}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OP}^2 \; e \; \overline{PB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OP}^2$, portanto $\overline{AP} = \overline{PB}$, o que equivale a dizer que *P* é o ponto médio da corda *AB*. Isto conclui a demonstração.

Refletindo...

Note que a corda desenhada na figura acima não é um diâmetro. Caso ela fosse, os pontos *P* e *O* coincidiriam. Nesse caso, *AP* e *PB* seriam raios, portanto congruentes, ou seja, *P* coincidente com o centro *O*, é ponto médio de *AB*. Concluímos então que o teorema 1 é valido, mesmo que a corda seja um diâmetro. Uma situação que pode ocorrer é *P* ser ponto médio da corda $\overline{AB}$, sem que o raio *OC* seja perpendicular à corda. Esta situação é ilustrada na figura abaixo.

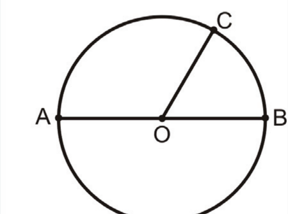


figura 82

Note que *OC* é raio não perpendicular ao diâmetro *AB*, mas *AO = OB*. Caso a corda *AB* não seja um diâmetro, vale a recíproca do teorema 1. Um bom exercício seria enunciar a recíproca e, em seguida, apresentar uma demonstração.

Definição 3:

Quando uma reta e uma circunferência têm em comum apenas um ponto *P*, dizemos que a reta tangencia a circunferência em *P*. ela é dita "reta tangente" e *P* é o "ponto de tangência" ou "ponto de contacto".

As demonstrações dos teoremas 2 e 3, apresentados a seguir, podem ser pesquisadas na referência bibliográfica [1].

Teorema 2:

Se uma reta é tangente a uma circunferência, então ela é perpendicular ao raio que liga o centro ao ponto de tangência.

Teorema 3:

Se uma reta é perpendicular a um raio, em um ponto *P* de uma circunferência, então essa reta tangencia a circunferência no ponto *P*.

Definição 4:

Quando uma corda *AB*, de uma circunferência com centro no ponto *O*, não é um diâmetro, o ângulo $A\hat{O}B$ é denominado ângulo central, conforme ilustra a figura ao lado.

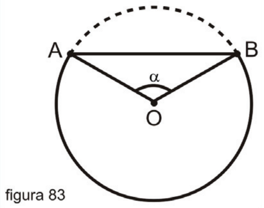


figura 83

Observação

A medida, em graus, correspondente ao arco menor, determinado pelos pontos *A* e *B* da circunferência, é por definição, a medida α, em graus, do ângulo central $A\hat{O}B$. Como esse arco é sempre menor do que uma semicircunferência, sua medida é tal que $0° < \alpha < 180°$. Os casos extremos correspondentes a $\alpha = 0°$ e $\alpha = 180°$ são, respectivamente, ângulos nulo e raso.

Teorema 4:

Cordas congruentes determinam ângulos centrais congruentes em uma mesma circunferência, ou em circunferências de mesmo raio.

Demonstração

Faremos a demonstração para o caso de uma mesma circunferência. O caso em que temos mais de uma circunferência, a demonstração é análoga e deixamos para o leitor.

Considere então uma circunferência de centro *O* e as cordas congruentes *AB* e *CD*, conforme ilustra a figura abaixo. Gostaríamos de mostrar que os ângulos centrais $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes. Para isso, compare os triângulos *AOB* e *COD*, conforme figura ao lado.

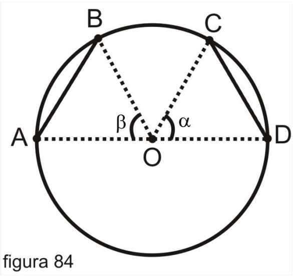


figura 84

Nesses triângulos, temos que $AO = OD$ (são raios), $OB = OC$ (são raios) e $AB = CD$ (por hipótese). Dai, segue-se pelo caso *LLL* de congruência de triângulos que $AOB = COD$. Portanto obtemos como consequência dessa congruência, em particular, que $\alpha = \beta$, ou seja, os ângulos centrais $A\hat{O}B$ e $C\hat{O}D$ são congruentes. Isto conclui a demonstração.

Definição 5: - Ângulo Central $A\hat{V}B$

Dados uma circunferência e um ponto V, sobre ela, o ângulo determinado pelas semi-retas S_{VA} e S_{VB}, onde A e B são pontos distintos da mesma circunferência, é denominado "ângulo inscrito".

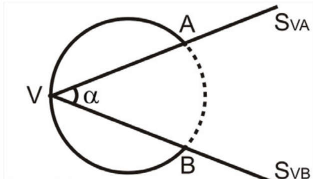


figura 85

Observação

O arco contido no "interior do ângulo" é dito arco correspondente ao ângulo inscrito e $A\hat{V}B$ também pode ser chamado de ângulo inscrito que subtende o arco.

O teorema seguinte nos mostra como medir um ângulo inscrito em uma circunferência, a partir da medida do arco que lhe é correspondente.

Teorema 5:

A medida de um ângulo inscrito em uma circunferência é igual à metade da medida do arco que lhe é correspondente.

Demonstração

Temos três casos a considerar.

1° Caso: Um dos lados do ângulo contém um diâmetro, conforme ilustra a figura ao lado.

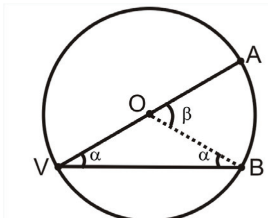


figura 86

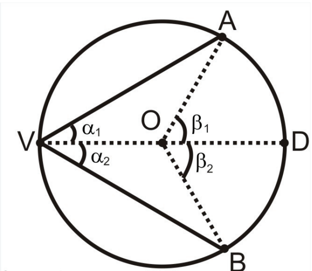


figura 87

Seja VA um diâmetro. Neste caso, primeiro tracemos o raio OB (ver figura). Seja β a medida do ângulo central $A\hat{O}B$. Como OV também é um raio, OVB é um triângulo isósceles, e daí $O\hat{V}B = O\hat{B}V$. Portanto, pelo teorema do ângulo externo, segue-se que $\beta = \alpha + \alpha$, donde obtemos que $\alpha = \frac{\beta}{2}$. Isto conclui a demonstração desse caso.

2° Caso: Nenhum dos lados do ângulo contém um diâmetro, de acordo com a figura a cima.

Nesse caso, primeiro tracemos um diâmetro VD (ver figura). Em seguida considere α_1 e α_2 como medidas dos ângulos inscritos $A\hat{V}D$ e $D\hat{V}B$. Trace agora os raios OA e OB, a partir dos quais temos os ângulos centrais $A\hat{O}D$ e $D\hat{O}B$, cujas medidas são, respectivamente, β_1 e β_2 conforme a figura. Como consequência, obtemos a partir do 1° caso, que $\alpha_1 = \frac{\beta_1}{2}$ e $\alpha_2 = \frac{\beta_2}{2}$. Somando essas duas igualdades, obtemos que $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\beta_1}{2} + \frac{\beta_2}{2} = \frac{\beta_1 + \beta_2}{2}$. Mas $\alpha_1 + \alpha_2$ e a medida do ângulo inscrito $A\hat{V}B$ enquanto $\beta_1 + \beta_2$ é a medida do arco que subtende $A\hat{V}B$. Concluímos então, que também nesse caso, a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco que lhe é correspondente.

3° Caso: Nenhum dos lados do ângulo contém um diâmetro, de acordo com a figura abaixo.

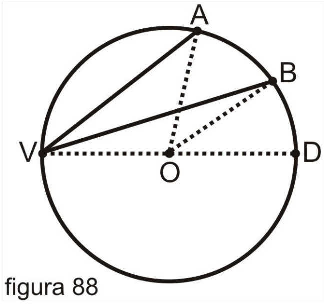


figura 88

Neste caso, primeiro tracemos o diâmetro *VD* e os raios *OA, OB* conforme a figura. Agora é só aplicar o 1° caso aos ângulos inscritos $A\hat{V}D$ e $B\hat{V}D$ e obter o resultado desejado a partir de uma subtração. Deixamos os detalhes para o leitor.

Teorema 6:

Ângulos inscritos em uma mesma circunferência ou em circunferências de mesmo raio, os quais subtendem um mesmo arco, têm a mesma medida.

Demonstração

É imediato! Pois a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida do arco que lhe é correspondente, de acordo com o teorema 5. Esses teoremas, obtidos como consequência imediata, são ditos c*orolários.*

Refletindo...

Um caso particular muito interessante e importante, ocorre quando o ângulo está inscrito em uma semicircunferência. Neste caso, o arco correspondente ao ângulo inscrito mede o mesmo que dois ângulos retos. Portanto a medida do ângulo inscrito é igual à metade da medida de dois ângulos retos, ou seja, 90°. Veja ilustração na figura abaixo.

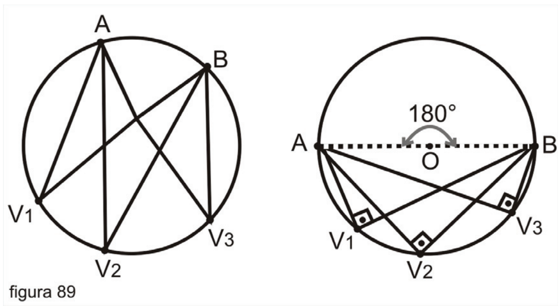


figura 89

Os ângulos inscritos com vértices V_1, V_2 e V_3, no caso geral, têm uma mesma medida. No caso particular, como os pontos *A* e *B* são extremos de um diâmetro, os triângulos AV_1B, AV_2B, AV_3B são retângulos, com hipotenusa comum *AB*.

Teorema 7:

Se AB e CD são cordas de uma mesma circunferência e interceptam-se em um ponto P, então
$\overline{PA} \,.\, \overline{PB} = \overline{PC} \,.\, \overline{PD}$.

Demonstração

Sejam *AB* e *CD* cordas de uma mesma circunferência, os quais se interceptam, em um ponto *P*, conforme ilustra a figura ao lado. Gostaríamos de mostrar que $\overline{PA}\,.\,\overline{PB} = \overline{PC}\,.\,\overline{PD}$.

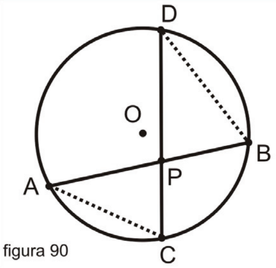


figura 90

Para isso tracemos as cordas *AC* e *BD* e comparemos os triângulos *PBD* e *PCA*. Temos $A\hat{P}C = B\hat{P}D$ (opostos pelo vértice) e $D\hat{B}P = A\hat{C}P$ (ângulos inscritos em uma circunferência subtendendo o mesmo arco). Daí, segue-se, pelo 1°caso de semelhança de triângulos, que *PCA* ~ *PBD*. Como consequência disso, $\dfrac{\overline{PA}}{\overline{PD}} = \dfrac{\overline{PC}}{\overline{PB}}$, ou seja, $\overline{PA}\,.\,\overline{PB} = \overline{PC}\,.\,\overline{PD}$. Isto conclui a demonstração.

Definição 6

Dados um ponto *V* no exterior de um círculo e duas semi-retas S_{VA}, S_{VB}, tangentes à circunferência, nos pontos *A* e *B*, respectivamente, conforme ilustra a figura abaixo. O ângulo $A\hat{V}B$ é denominado ângulo circunscrito.

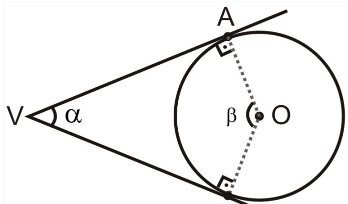


figura 91

Observações

I. Pelo teorema 2 dessa unidade, os raios *AO* e *OB* são perpendiculares às tangentes. Como a soma dos ângulos internos de um quadrilátero plano é 360°, obtemos dai que $\alpha + \beta = 180°$. Portanto podemos definir a medida do ângulo circunscrito, como sendo igual a 180° menos a medida, em graus, do menor dos dois arcos determinados por *A* e *B*.

II. Qualquer que seja a posição do ponto *V*, desde que no exterior do círculo, sempre teremos *VA* = *VB*, pois *AOV* e *BOV* são triângulos retângulos tais que *AO* = *OB* (são raios da circunferência) e *OV* = *OV* (hipotenusa comum). Daí, pelo teorema de Pitágoras em *AOV*, obtemos que $\overline{VA} = \sqrt{\overline{OV}^2 - \overline{OA}^2}$ e no triângulo *BOV*, obtemos que $\overline{VB} = \sqrt{\overline{OV}^2 - \overline{OB}^2}$. Como já sabemos que $\overline{OA} = \overline{OB}$, segue-se que $\overline{VA} = \overline{VB}$. Portanto *VA* = *VB*.

Teorema 8:

Qualquer triângulo pode ser inscrito em uma circunferência, ou seja, seus três vértices são pontos de uma mesma circunferência.

Demonstração

Considere um triângulo qualquer *ABC*. Gostaríamos de mostrar que existe uma circunferência que passa por *A, B* e *C*. Ou, equivalentemente, mostrar que existe um ponto *O*, equidistante de *A, B* e *C*. Para isso, considere as mediatrizes dos lados *AB* e *BC*, ou seja, as retas m_1 e m_2 perpendiculares aos respectivos lados e passando pelos seus pontos médios *M* e *N*, conforme ilustra a figura ao lado.

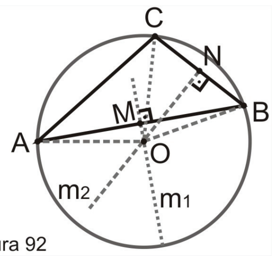


figura 92

É claro que m_1 e m_2 têm um ponto *O* na intersecção $m_1 \cap m_2$, pois os lados *AB* e *BC* têm o ponto *B* em comum. Tracemos agora os segmentos de reta *OA, OB* e *OC* (ver figura). Compare agora os triângulos *OAM* e *OBM*. Temos agora $\overline{AM} = \overline{MB}$ (M é ponto médio de *AB*), $A\hat{M}O = B\hat{M}O$ (são ângulos retos, pois m_1 é mediatriz de *AB*) e $\overline{OM} = \overline{OM}$ (lado comum). Dai obtemos que *OAM* = *OBM*. Como consequência disso, segue-se que $\overline{OA} = \overline{OB}$. Ao compararmos agora os triângulos *OBN* e *OCN*, obtemos analogamente que são congruentes. Como consequência disso, segue-se que $\overline{OB} = \overline{OC}$. Portanto $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$ e os pontos *A, B* e *C*, são equidistantes do ponto *O*. Dai, decorre que *A, B* e *C* pertencem à circunferência de centro *O*, cujo raio tem a mesma medida de *OA* (ver figura). Isto conclui a demonstração.

Refletindo...

Nesta demonstração, utilizamos o fato de que as duas mediatrizes, de quaisquer dois lados, de um triângulo qualquer, interceptam-se em um ponto. Na verdade, vamos mostrar a seguir que, as três mediatrizes dos lados, de qualquer triângulo, interceptam-se em um único ponto *O*. Foi necessário também utilizarmos uma propriedade da mediatriz, de qualquer segmento de reta, exatamente aquela que diz: “todo ponto sobre a reta mediatriz, de qualquer segmento de reta, é equidistante dos seus extremos”.

O ponto *O*, encontro das mediatrizes dos lados de um triângulo qualquer, é denominado “circuncentro”, ou seja, *O* é o centro da circunferência circunscrita ao triângulo. Também dizemos, equivalentemente, que o triângulo está inscrito na circunferência.

Teorema 9:

Se três pontos não estão em linha reta, então passa uma circunferência por eles.

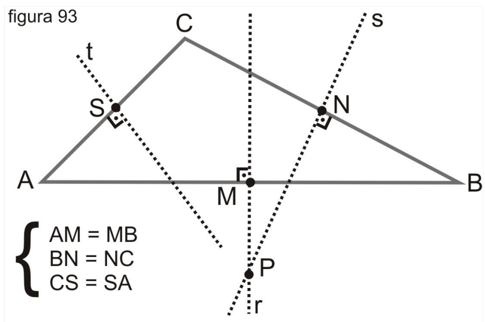
A demonstração é uma consequência imediata do Teorema 8, ou seja, o Teorema 9 é *corolário* do anterior, uma vez que três pontos não alinhados (ou não colineares) sempre determinam um triângulo. Apresentamos abaixo mais uma consequência do Teorema 8.

Teorema 10:

As mediatrizes dos três lados de um triângulo se cruzam em único ponto.

Demonstração

Sejam *ABC* um triângulo qualquer e *r, s* e *t* as retas correspondentes às mediatrizes dos lados *AB, BC* e *CA*, respectivamente. Gostaríamos de mostrar que existe um único ponto *P* tal que $r \cap s \cap t = \{P\}$. Para isso, observemos inicialmente que duas dessas mediatrizes não podem ser paralelas. Consideremos *r* e *s* as mediatrizes de *AB* e *AC*, respectivamente, e vamos admitir que *r* seja paralela a *s*. Como elas são perpendiculares, respectivamente, aos lados *AB* e *AC*, teríamos necessariamente esses lados paralelos. Isto é absurdo. Logo existe um ponto *P* comum às retas *r* e *s*, conforme ilustra a figura ao lado.



Para concluir a demonstração, utilizaremos agora o seguinte fato: “qualquer ponto está sobre a mediatriz de um segmento *AB* se, e só se, ele é equidistante dos extremos”. Utilizando este fato, obtemos que $\overline{PA} = \overline{PB}$, pois *P* está na mediatriz de *AB*. Obtemos também que $\overline{PB} = \overline{PC}$, pois *P* está na mediatriz de *BC*. Como consequência de $\overline{PA} = \overline{PB}$ e $\overline{PB} = \overline{PC}$, decorre que $\overline{PA} = \overline{PC}$. Concluímos então que *P* está na mediatriz de *CA*, ou seja $r \cap s \cap t = \{P\}$. Isto conclui a demonstração.

Observação

Assim como as mediatrizes, as medianas, as alturas e as bissetrizes também têm um único ponto comum. O ponto de encontro das medianas é o centróide ou baricentro, das alturas é o ortocentro e das bissetrizes é o incentro ou centro da circunferência inscrita no triângulo, o que equivale dizer que o triângulo está circunscrito à circunferência, conforme ilustra a figura abaixo.

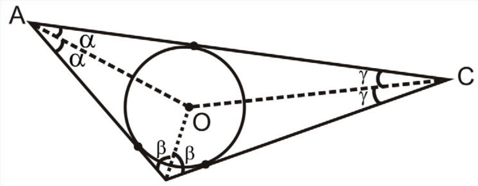


figura 94

Para mais detalhes sobre esses pontos, recomendamos pesquisar referência bibliográfica [2].

Até aqui, ficamos sabendo que um triângulo qualquer, tanto pode ser inscrito quanto circunscrito, em uma circunferência. Em geral não é um problema fácil, saber se um polígono pode ser inscrito ou circunscrito, em uma circunferência. Para concluir o assunto dessa unidade, apresentamos a seguir algumas situações particulares, sobre quadriláteros e polígonos regulares.

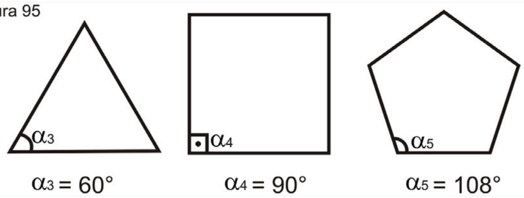
Definição 7:

Um polígono que tem todos os lados congruentes e também todos os ângulos internos congruentes é denominado regular. Ou seja, o polígono é equilátero e equiângulo.

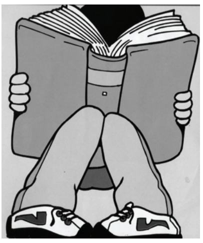
Dialogando e construindo o seu conhecimento

É importante observar que, para todo $n \geq 3$, temos um polígono regular com *n* lados, desde que *n* seja um número natural. Por exemplo, para *n = 3, 4* e *5*, temos respectivamente, o triângulo equilátero, o quadrado e o pentágono regular, os quais se encontram ilustrados na figura abaixo.

figura 95

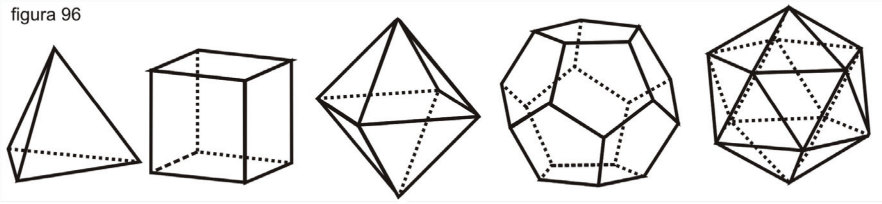


Como a soma das medidas dos ângulos internos de um polígono de n lados é (n – 2)180º e, no caso do polígono regular, todos os ângulos são congruentes, temos $n\alpha_n$ = (n – 2)180º e daí determinamos a medida dos ângulos internos: $\alpha_n = (1 - \frac{2}{n}).\ 180°$



Para o caso de figuras geométricas tridimensionais, o conceito de polígono é generalizado para poliedros. Nesse caso, poderíamos ser levados a pensar que o conceito de "poliedro regular" também nos levasse a uma infinidade de possibilidades, no entanto, só a título de curiosidade, salientamos aqui que só existem cinco poliedros regulares, cujos nomes são: tetraedro, hexaedro (ou cubo), octaedro, dodecaedro e icosaedro, respectivamente, com *4, 6, 8, 12,* e 20 faces, os quais estão ilustrados na figura abaixo.

figura 96



O estudo dos poliedros constitui um belíssimo capítulo da Geometria Euclidiana em três dimensões. Eles são muito admirados e estudados fora da matemática, inclusive são conhecidos como sólidos de Platão. Os quatro elementos primitivos fogo, terra, água e ar são representados, respectivamente, pelo tetraedro, cubo, icosaedro e octaedro. Já o dodecaedro representa o Universo. Isso denota um certo lado filosófico e místico da Geometria.

Teorema 11:

Se um polígono é regular, então ele pode ser inscrito em uma circunferência, ou seja, é inscritível.

Demonstração

Sejam $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_n$ ($n \geq 3$) os vértices de um polígono regular com n lados. Gostaríamos de mostrar que existe uma circunferência que passa por todos os vértices do polígono. Para isso, consideremos primeiramente os vértices P_1, P_2 e P_3. Já mostramos que existe uma circunferência, cujo centro é o ponto de encontro das mediatrizes, dos lados do triângulo $P_1 P_2 P_3$, a qual passa por P_1, P_2 e P_3. Seja O esse centro. A idéia agora é mostrar que P_4 também pertence a essa circunferência. Para isso, vamos comparar os triângulos OA_2A_3 e OA_3A_4. Como $OA_2 = OA_3$ (ambos são iguais ao raio da circunferência), o triângulo OA_2A_3 é isósceles cuja base é o lado A_2A_3, do polígono regular.

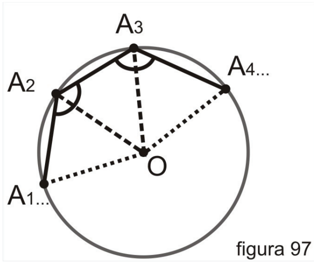


figura 97

Com o mesmo argumento, concluímos que o triângulo OA_1A_2 é isósceles, cuja base é o lado A_1A_2, do polígono regular. Esses dois triângulos, OA_1A_2 e OA_2A_3, são congruentes, em virtude do caso *LLL*, de congruência de triângulos. Com relação ao triângulo OA_3A_4, temos que $A_3A_4 = A_2A_3$ (ambos são lados do polígono regular), $OA_3 = OA_3$ (lado comum). Além disso, temos que $O\hat{A}_3A_2 = O\hat{A}_3A_4$, pois $A_1\hat{A}_2A_3 = A_2\hat{A}_3A_4$ (ambos são ângulos internos de um polígono regular) e $O\hat{A}_2A_1 = O\hat{A}_2A_3 = O\hat{A}_3A_2$. Como consequência disso, segue-se pelo caso *LAL*, de congruência de triângulos, que $OA_2A_3 = OA_3A_4$. Portanto, obtemos, em particular, que $OA_3 = OA_4$. Isto equivale dizer que A_4 também é um ponto da circunferência de centro O e raio $r = \overline{OA_1}$, conforme ilustra a figura a cima.

Com um raciocínio análogo, concluímos que A_5 também é um ponto da circunferência. Como a quantidade de vértices é finita, repetindo o mesmo raciocínio um número finito de vezes, obtemos, por exaustão, que $A_1, A_2, \ldots A_n$ são pontos da circunferência de centro O. Isto conclui a demonstração.

Teorema 12:

Se um polígono é regular, então ele pode ser circunscrito em uma circunferência, ou seja, é circunscritível.

Demonstração

Sejam P_1, P_2, P_3 ... P_n $(n \geq 3)$ os vértices de um polígono regular com n lados. Gostaríamos de mostrar que existe uma circunferência, a qual é tangente a cada um dos lados desse polígono. Para isso, consideremos inicialmente a circunferência circunscrita no polígono, determinado no teorema anterior, conforme ilustra a figura ao lado.

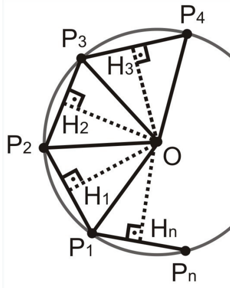


figura 98

Note que os triângulos OP_1P_2, OP_2P_3, ... , OP_nP_1 são isósceles e congruentes entre si. Dai, suas alturas OH_1, OH_2, ... , OH_n (ver figura), relativas às bases P_1P_2, P_2P_3... e P_n P_1, respectivamente, são todas congruentes entre si. É claro que a circunferência de centro O e que passa pelos pontos H_1, H_2, H_3, ... , H_n está inscrita no polígono. Isto conclui a demonstração.

2. - Bibliografia

[1] BARBOSA, J. L. M., **Geometria Euclidiana Plana, Coleção do Professor de Matemática,** SBM, 10° edição, Rio de Janeiro, 2006.

[2] REZENDE, E. Q. F. de Queiroz, M.L.B., **Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas,** Campinas, SP: Editora da Unicamp, São Paulo, SP: Imprensa Oficial, 2000.

[3] LINDOQUIST, M. M.; Shulte, A. P., **Aprendendo e Ensinando Geometria.** São Paulo: Atual Editora, 1994.

[4] POLYA, G., **A Arte de Resolver Problemas.** Rio de Janeiro – R.J.