COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA

(Notas de Aula)

Prof. Sérgio de Albuquerque Souza

Endereço eletrônico: sergio@mat.ufpb.br

Sítio: www.mat.ufpb.br/sergio

18 de fevereiro de 2014

Sumário

Capítulo 1

Funções

1.1 Relações

Definição 1.1 *Dados dois conjuntos A e B não vazios, definimos o* ***produto cartesiano***[1] *entre A e B, denotado por $A \times B$, como o conjunto de todos os pares ordenados da forma (x, y) onde x pertence ao primeiro conjunto A e y pertence ao segundo conjunto B, ou seja*

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$$

Observação 1.1

- *Note que $A \times B \neq B \times A$, se A é não vazio ou B é não vazio.*
- *Se $A = \{\}$ ou $B = \{\}$, por definição: $A \times \{\} = \{\} = \{\} \times B$.*
- *Se A possui m elementos e B possui n elementos, então $A \times B$ possui mxn elementos.*

Exemplo 1.1 *Dados $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3\}$, o produto cartesiano $A \times B$, terá* 12 *pares ordenados e será dado por $A \times B = \{(a, 1),(a, 2),(a, 3),(b, 1),(b, 2),(b, 3),(c, 1),(c, 2),(c, 3),(d,$*

Definição 1.2 *Sejam A e B conjuntos não vazios. Uma* ***relação*** *de A em B é qualquer subconjunto R do produto cartesiano $A \times B$.*

[1]Os nomes Plano Cartesiano e Produto Cartesiano são homenagens ao seu criador René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês. O nome de Descartes em Latim, era Cartesius, daí vem o nome cartesiano.

Exemplo 1.2 *O conjunto* $R = \{(a,3),(b,3),(c,2),(c,3),(d,2),(d,3)\}$ *é uma relação em A em B do exemplo anterior.*

Observação 1.2 *Uma relação* R *de* A *em* B *pode ser denotada por* $R : A \to B$.

Exemplo 1.3 *Se* $A = \{1,2\}$ *e* $B = \{3,4\}$, *o produto cartesiano é* $A \times B = \{(1,3),(1,4),(2,3),(2,4)\}$ *e neste caso, temos algumas relações em* $A \times B$*:*

1) $R_1 = \{(1,3),(1,4)\}$

2) $R_2 = \{(1,3)\}$

3) $R3 = \{(2,3),(2,4)\}$

1.2 Funções

Definição 1.3 *Uma função* f *de* A *em* B *é uma relação em* $A \times B$, *que associa a cada variável* x *em* A, *um único* y *em* B. *Uma das notações mais usadas para uma função de* A *em* B, *é* $f : A \to B$.

Observação 1.3 *Quatro aspectos chamam a atenção na definição apresentada:*

- *O domínio* A *da relação.*
- *O contradomínio* B *da relação.*
- *Todo elemento de* A *deve ter correspondente em* B.
- *Cada elemento de* A *só poderá ter no máximo um correspondente no contradomínio* B.

Estas características nos informam que uma função pode ser vista geometricamente como uma linha no plano, contida em $A \times B$, *que só pode ser "cortada"uma única vez por uma reta vertical, qualquer que seja esta reta.*

Capítulo 2

Derivada

2.1 Definição

Definição 2.1 *Chamaremos de coeficiente de Newton de uma função* $f(x)$ *a razão entre a variação da função* $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$ *e a variação dos valores do domínio da função* $\Delta x = x_1 - x_0$*, ou seja,*

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

2.2 Regras da derivação

2.2.1 Potências de x

Se $f(x) = x^n$ com $n \in R$, então

$$\boxed{f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n.x^{n-1}}$$

Exemplo 2.1 *Se* $f(x) = x^5$ *então* $f'(x) = 5.x^{5-1} = 5x^4$

Exemplo 2.2 *Se* $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ *então:* $f'(x) = \dfrac{3}{2}.x^{3/2-1} = \dfrac{3x^{1/2}}{2} = \dfrac{3\sqrt{x}}{2}$

2.2.2 Constante multiplicada por uma função

Se $f(x) = K.g(x)$ com $K \in R$, então:

$$\boxed{f(x) = K.g(x) \Longrightarrow f'(x) = K.g'(x)}$$

Exemplo 2.3 *Se* $f(x) = 3.x^4$ *então* $f'(x) = 3.[x^4]' = 3.(4x^3) = 12x^3$

Exemplo 2.4 *Se* $f(x) = \dfrac{3}{2x^2} = \dfrac{3}{2}x^{-2}$ *então:*

$$f'(x) = \frac{3}{2}.[x^{-2}]' = \frac{3}{2}.(-2x^{-3}) = -\frac{3}{x^3}$$

2.2.3 Soma ou diferença de duas funções

Se $f(x) = g(x) \pm h(x)$, então

$$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \Longrightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

Exemplo 2.5 *Se* $f(x) = 4x^2 + 3x$ *então* $f'(x) = [4x^2]' + [3x]' = 8x + 3$

Exemplo 2.6 *Se* $f(x) = x - \dfrac{1}{x} = x - x^{-1}$ *então* $f'(x) = [x]' - [x^{-1}]' = 1 + \dfrac{1}{x^2}$

2.2.4 Produto de duas funções

Se $f(x) = g(x).h(x)$, então

$$\boxed{f(x) = g(x).h(x) \Longrightarrow f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)}$$

Exemplo 2.7 *Se* $f(x) = (2x^2 - 1)(x + 2)$ *então considere* $g(x) = 2x^2 - 1$ *e* $h(x) = x + 2$*, logo*

$$f'(x) = (\underbrace{4x}_{g'})(\underbrace{x+2}_{h}) + (\underbrace{2x^2-1}_{g})(\underbrace{1}_{h'})$$

$$f'(x) =$$

Exemplo 2.8 *Se* $f(x) = (5x^3 - x^2)(x^2 - x - 2)$ *então considere* $g(x) = 5x^3 - x^2$ *e* $h(x) = x^2 - x - 2$*, logo*

$$f'(x) = (\underbrace{15x^2-2x}_{g'})(\underbrace{x^2-x-2}_{h}) + (\underbrace{5x^3-x^2}_{g})(\underbrace{2x-1}_{h'})$$

$$f'(x) =$$

2.2.5 Quociente de duas funções

Se $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ com $h(x) \neq 0$, então

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}}$$

Exemplo 2.9 *Se* $f(x) = \dfrac{2x^2-1}{x+2}$ *então considere* $g(x) = 2x^2 - 1$ *e* $h(x) = x + 2$, *logo*

$$f'(x) = \frac{(\overbrace{\ 4x\ }^{g'})(\overbrace{x+2}^{h}) - (\overbrace{2x^2-1}^{g})(\overbrace{\ 1\ }^{h'})}{\underbrace{(x+2)^2}_{h^2}}$$

$$f'(x) = \frac{}{(x+2)^2}$$

Exemplo 2.10 *Se* $f(x) = \dfrac{5x^3 - x^2}{x^2 - x - 2}$ *então considere* $g(x) = 5x^3 - x^2$ *e* $h(x) = x^2 - x - 2$, *logo*

$$f'(x) = \frac{(\overbrace{15x^2 - 2x}^{g'})(\overbrace{x^2 - x - 2}^{h}) - (\overbrace{5x^3 - x^2}^{g})(\overbrace{2x - 1}^{h'})}{\underbrace{(x^2 - x - 2)^2}_{h^2}}$$

$$f'(x) = \frac{}{(x^2 - x - 2)^2}$$

2.2.6 Função logarítmica

Observação 2.1 $\ln x = \log_e x$, *onde* $e = 2,7182818284590452354$ *é constante de Euler.*

Observação 2.2 $\log_b x = \dfrac{\log_e x}{\log_e b} = \dfrac{\ln x}{\ln b} = \dfrac{1}{\ln b} \ln x$

Se $f(x) = \ln x$ com $K \in R$, então

$$\boxed{f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$$

Exemplo 2.11 *Se* $f(x) = 5 \ln x$ *então* $f'(x) = 4[\ln x]' = 4\dfrac{1}{x} = \dfrac{4}{x}$

2.2.7 Função exponencial

Observação 2.3 $b^x = e^{\ln b^x} = e^{x \ln b}$

Se $f(x) = e^x$ com $e = 2,7182818284590452354$ (constante de Euler), então

$$\boxed{f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x}$$

Exemplo 2.12 *Se* $f(x) = 4e^x$ *então* $f'(x) = 4[e^x]' = 4e^x$

Exemplo 2.13 *Se* $f(x) = 4x^2e^x$ *então considere* $g(x) = 4x^2 - 1$ *e* $h(x) = e^x$*, logo*

$$f'(x) = (\underbrace{4x}_{g'})(\underbrace{e^x}_{h}) + (\underbrace{4x^2}_{g})(\underbrace{e^x}_{h'})$$

$$f'(x) = (4x + 4x^2)e^x$$

Exemplo 2.14 *Se* $f(x) = e^x \ln x$ *então considere* $g(x) = e^x$ *e* $h(x) = \ln x$*, logo*

$$f'(x) = (\underbrace{e^x}_{g'})(\underbrace{\ln x}_{h}) + (\underbrace{e^x}_{g})(\underbrace{\frac{1}{x}}_{h'})$$

$$f'(x) = (\ln x + \frac{1}{x})e^x$$

2.2.8 Funções compostas (Regra da cadeia)

Se $f(x) = g[h(x)]$, então

$$\boxed{f(x) = g[h(x)] \Longrightarrow f'(x) = g'[h(x)].h'(x)}$$

Exemplo 2.15 *Se* $f(x) = (x^3 - 2x)^7$ *então considere* $g(x) = x^7$ *e* $h(x) = x^3 - 2x$*, note que* $f(x) = g[h(x)]$*, portanto*

$$f'(x) = \underbrace{7(x^3 - 2x)^6}_{g'[h(x)]} . \underbrace{(3x^2 - 2)}_{h'(x)}$$

$$f'(x) = (21x^2 - 14)(x^3 - 2x)^6$$

A regra da cadeia pode ser usada para funções definida por várias composições, bastando derivar reutilizando a regra da cadeia seguidas vezes.

Exemplo 2.16 *Se* $f(x) = [\ln(x^3 - 2x)]^7$ *então considere* $g(x) = x^7$*,* $h(x) = \ln x$ *e* $i(x) = x^3 - 2x$*, note que* $f(x) = g\{h[i(x)]\}$*, portanto*

$$f'(x) = \underbrace{7[\ln(x^3 - 2x)]^6}_{g'\{h[i(x)]\}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3x^2 - 2x}\right)}_{h'[i(x)]} \cdot \underbrace{(6x - 2)}_{i'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{7(6x - 2)[\ln(x^3 - 2x)]^6}{3x^2 - 2x}$$

Desafio: Derive a seguinte função: $f(x) = \dfrac{\sqrt{[\ln(x^3 - 4x)]^3}}{2x^3 e^{2x^3 - \sqrt{x}}}$

Capítulo 3

Integrais

3.1 Primitivas

Antes de iniciar propriamente as integrais e as propriedades, iremos calcular alguns exemplos de primitivas, apenas com as propriedades das derivadas.

Definição 3.1 *Diremos que uma função $F(x)$ é uma* ***primitiva*** *da função $f(x)$, quando:*

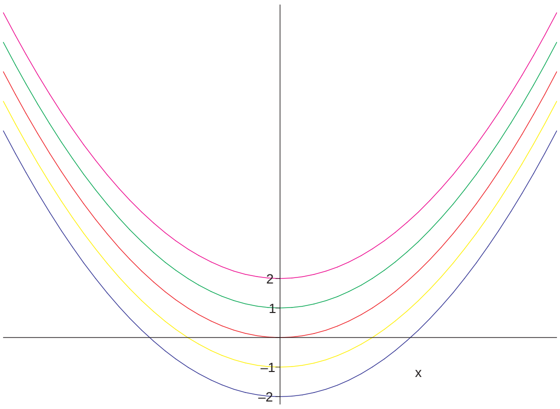
$$F'(x) = f(x)$$

Exercício 3.1 *Encontre as primitivas da função $f(x) = 2x$*

Solução 3.1 *Neste caso, nota-se facilmente que $F_1(x) = x^2 + 1$ e $F_2(x) = x^2 - 5$ são primitivas de $f(x)$ e que para qualquer constante K, a função $F(x) = x^2 + K$ também é uma primitiva de $f(x)$.*

Observação 3.1 *Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são primitivas de uma função $f(x)$, então $F_1(x) = F_2(x) + K$, onde K é uma constante.*

Observação 3.2 *Note que para cada constante K existe uma primitiva, isto graficamente, significa que existem infinitas curvas que representam as primitivas de $f(x)$.*



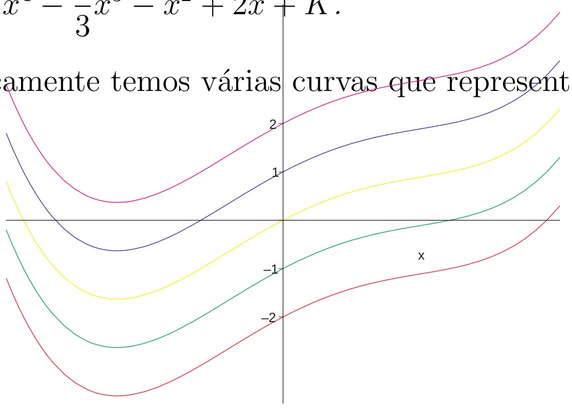
Exemplo 3.1 *Determinar a função* $f(x)$ *tal que* $f'(x) = 4x^3 - 2x^3 - 3$

Exemplo 3.2 $F(x) = 3x^4 - 2x^2 - 4$ *é uma primitiva de* $f(x) = 12x^3 - 4x$.

Exercício 3.2 *Encontre as primitivas da função* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$

Solução 3.2 *Note que, para se encontrar uma primitiva de* $f(x)$ *a função* $F(x)$, *neste caso, tem que ser uma função polinomial do quarto grau* $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + K$, *portanto* $F'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ *deve ser igual a* $f(x)$, *logo:* $4a = 3$, $3b = -2$, $2c = -2$ *e* $d = 2$ *ou seja,* $a = \dfrac{3}{4}$, $b = -\dfrac{2}{3}$, $c = -1$ *e* $d = 2$, *donde* $F(x) = \dfrac{3}{4}x^4 - \dfrac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + K$.

Graficamente temos várias curvas que representam as primitivas de $f(x)$.



Portanto ao se escolher um ponto $P = (x_0, y_0)$ (uma condição) a primitiva fica unicamente determinada.

Exemplo 3.3 *Encontrar a primitiva da função* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ *no ponto* $P = (1, 2)$

Solução 3.3 *Como* $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + K$ *são as primitivas de* $f(x)$*, para determinar a primitiva que passa pelo ponto* $P = (1, 2)$*, basta substituir o ponto na primitiva, isto é,* $2 = F(1) = \frac{3}{4}(1)^4 - \frac{2}{3}(1)^3 - (1)^2 + 2(1) + K$*, donde resulta:* $K =$

3.2 Integrais Indefinidas

A **integral indefinida** de uma função $f(x)$, é uma primitiva de $f(x)$, denotado por

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

onde $\int$ é o sinal de integração (lê-se *integral de*), dx indica que x é a variável a ser considerada.

Temos algumas regras de integração, de fácil obtenção:

3.2.1 Potências de x

Se $f(x) = x^n$ onde $n \neq -1$, então:

$$\boxed{f(x) = x^n \Longrightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K}$$

Exemplo 3.4 $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + K = \frac{x^6}{6} + K$

Exemplo 3.5 $\int \sqrt{x^3}dx = \int x^{3/2}dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + K = \frac{x^{5/2}}{5/2} + K = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + K$

3.2.2 Caso x^{-1}

Se $f(x) = \frac{1}{x}$, então:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int \frac{1}{x}dx = \int x^{-1}dx = \ln|x| + K}$$

3.2.3 Constante multiplicada por uma função

Se $f(x) = c.g(x)$ onde c é uma constante qualquer, então:

$$\boxed{f(x) = c.g(x) \Longrightarrow \int c.f(x)dx = c.\int f(x)dx}$$

3.2.4 Soma ou diferença de duas funções

Se $f(x) = g(x) \pm h(x)$, então:

$$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \Longrightarrow \int [f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

3.2.5 Função exponencial

Se $f(x) = e^x$, então:

$$\boxed{f(x) = e^x \Longrightarrow \int e^x dx = e^x + K}$$

Exemplo 3.6 $\displaystyle\int 3x^3 - 4e^x + 1dx = 3\int x^3dx - 4\int e^x dx + \int 1dx =$

$$= 3\left(\frac{x^4}{4} + K_1\right) + 4\left(e^x + K_2\right) + \left(\frac{x^{0+1}}{0+1} + K_3\right) =$$

$$= \frac{3x^4}{4} + 4e^x + x + \overbrace{(3K_1 - 4K_2 + K_3)}^{=K}$$

3.2.6 Integração de produtos e quociente

Não existe uma regra específica para o produto ou quociente de duas funções. Eventualmente será possível reescrever a integral de uma forma que possa ser integrado pelas regras anteriores.

Exemplo 3.7 $\displaystyle\int \sqrt{x}(x^3 - 4x - 2)dx = \int x^{1/2}(x^3 - 4x - 2)dx =$

$$= \int x^{7/2} - 4x^{3/2} - 2x^{1/2}dx = \textit{resolva usando as regras anteriores.}$$

Exemplo 3.8 $\displaystyle\int \frac{5x^6 - 4x^2 - 3}{x^3}dx = \int \frac{5x^6}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3}dx =$

$$= \int 5x^3 - \frac{4}{x} - 3x^{-3}dx = \textit{resolva usando as regras anteriores.}$$

3.2.7 Integração por substituição

A idéia dessa regra, é usar a regra da cadeia para uma determinada função, usando para isso uma substituição adequada, tornando a integral mais simples do que a integral original.

Exemplo 3.9 *Calcule a integral* $\int 9(x^3-3x+4)^8(3x^2-3)dx$.

Solução 3.4 *Considerando* $u(x)=x^3-3x+4$ *temos* $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=3x^2-3$ *ou seja,* $du=(3x^2-3)dx$*, logo:*

$$\begin{aligned}\int 9\underbrace{(x^3-3x+4)}_{u}{}^8\underbrace{(3x^2-3)dx}_{du} &= \int 9u^8du = u^9+K = \\ &= \underbrace{(x^3-3x+4)}_{u}{}^9+K\end{aligned}$$

Exemplo 3.10 *Calcule a integral* $\int \dfrac{3x^2-3}{x^3-3x+4}dx$.

Solução 3.5 *Considerando* $u(x)=x^3-3x+4$ *temos* $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=3x^2-3$ *ou seja* $du=(3x^2-3)dx$*, logo:*

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2-3}{x^3-3x+4}dx &= \int \frac{1}{\underbrace{x^3-3x+4}_{u}}\overbrace{(3x^2-3)dx}^{du} = \\ &= \int \frac{1}{u}du = \ln|u|+K = \\ &= \ln|\underbrace{(x^3-3x+4)}_{u}|+K\end{aligned}$$

Exemplo 3.11 *Calcule a integral* $\int \dfrac{x}{x-1}dx$.

Solução 3.6 *Considerando* $u(x)=x-1$ *temos* $u'(x)=\dfrac{du}{dx}=1$ *ou seja* $du=dx$*, logo:*

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{x-1}dx &= \int \frac{x}{\underbrace{x-1}_{u}}\overbrace{dx}^{du} = \int \frac{u+1}{u}du = \\ &= \int 1+\frac{1}{u}du = u+\ln|u|+K = \\ &= \underbrace{x-1}_{u}+\ln|\underbrace{x-1}_{u}|+K\end{aligned}$$

Exemplo 3.12 *Calcule a integral* $\int x \ln(x^2+5)dx$.

Solução 3.7 *Considerando* $u(x) = x^2 - 5$ *temos* $u'(x) = \dfrac{du}{dx} = 2x$ *ou seja* $\dfrac{du}{2} = xdx$*, logo:*

$$\begin{aligned}\int x\ln(x^2+5)dx &= \int \ln \underbrace{x^2+5}_{u} \overbrace{xdx}^{du/2} = \int \ln u \frac{du}{2} = \\ &= \frac{1}{2}\int \ln u du = ?^1\end{aligned}$$

3.2.8 Integração por partes

Na propriedade da regra do produto (ver **??**) temos:

$$\begin{aligned} g(x).h'(x) &= [g(x)h(x)]' - g'(x)h(x) \\ &\Downarrow \\ \int g(x).h'(x)dx &= \int [g(x)h(x)]'dx - \int g'(x)h(x)dx \\ &= g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)dx \end{aligned}$$

Exemplo 3.13 *Calcule* $\int xe^x dx$

Solução 3.8 *Escolhendo* $g(x) = x$ *e* $h'(x) = e^x$*, temos* $g'(x) = 1$ *e* $h(x) = e^x$*, portanto:*

$$\begin{aligned}\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h'(x)} dx &= \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \underbrace{e^x}_{h(x)} dx = \\ &= xe^x - e^x + K = (x-1)e^x + K\end{aligned}$$

Note que fazendo a escolha $g(x) = e^x$ e $h'(x) = x$, temos $g'(x) = e^x$ e $h(x) = \dfrac{x^2}{2}$, portanto:

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{x}_{h'(x)} dx &= \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{h(x)} - \int \underbrace{e^x}_{g'(x)} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{h(x)} dx = \\
&= xe^x - \text{(integral mais complicada)}
\end{aligned}
$$

Portanto a escolha deve sempre ter como objetivo simplificar a integral, deixando mais simples que a integral original.

Exemplo 3.14 *Calcule* $\int x\sqrt{x+5}dx$

Solução 3.9 *Escolhendo* $g(x) = x$ *e* $h'(x) = \sqrt{x+5}$, *temos* $g'(x) = 1$ *e* $h(x) = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$, *portanto:*

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\sqrt{x+5}}_{h'(x)} dx &= \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \underbrace{\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}}_{h(x)} dx \\
&= \frac{2x\sqrt{x+5}}{3} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + K
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.15 *Calcule* $\int \ln x dx$

Solução 3.10 *Escolhendo* $g(x) = \ln x$ *e* $h'(x) = 1$, *temos* $g'(x) = \frac{1}{x}$ *e* $h(x) = x$, *portanto:*

$$
\begin{aligned}
\int \underbrace{\ln x}_{g(x)} \underbrace{1}_{h'(x)} dx &= \underbrace{\ln x}_{g(x)} \underbrace{x}_{h(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \underbrace{x}_{h(x)} dx = \\
&= x \ln x - \int 1 dx = \\
&= x \ln x - x + K
\end{aligned}
$$

Exemplo 3.16 *Terminando o exemplo* **??**, *temos*

$$
\begin{aligned}
\int x \ln(x^2+5) dx &= \frac{1}{2} \int \ln u du = \\
&= \frac{1}{2}(u \ln u - u) + K = \\
&= \frac{1}{2}(x^2+5)\ln(x^2+5) - \frac{1}{2}(x^2+5) + K
\end{aligned}
$$

3.3 Aplicações

3.3.1 Desvalorização

Exemplo 3.17 *O preço de revenda de uma certa máquina decresce a uma taxa que varia com o tempo de uso. Quando a máquina tinha* t *anos de uso, a taxa de variação do seu valor era* $200(t-10)$ *reais por ano. Se a máquina foi comprada por R\$ 12.000,00, quanto valerá 10 anos depois?*

Solução 3.11 *Seja* $R(t)$ *o preço de revenda daqui a* t *anos. Note que:*

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = 200(t-10) = 200t - 2000$$

logo,

$$R(t) = \int 200t - 2000dt = 200\frac{t^2}{2} - 2000t + C = 100t^2 - 2000t + C$$

como a máquina foi comprada por R\$ 12.000,00, ou seja, para $t = 0$*, temos que* $C = 12.000$*, portanto daqui a 10 anos a máquina valerá:*

$$R(10) = 100(10)^2 - 2000(10) + 12000 = R\$\ 2.000,00$$

Exemplo 3.18 *O preço de revenda de uma certa máquina decresce a uma taxa que varia com o tempo de uso. Quando a máquina tinha* t *anos de uso, a taxa de variação do seu valor era* $-960e^{-t/5}$ *reais por ano. Se a máquina foi comprada por R\$ 5.000,00, quanto valerá 10 anos depois?*

Solução 3.12 *Seja* $R(t)$ *o preço de revenda daqui a* t *anos. Note que:*

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = -960e^{-t/5}$$

logo,

$$R(t) = \int -960e^{-t/5}dt = \int 4800e^u du = 4800e^u + C = 4800e^{-t/5} + C$$

como a máquina foi comprada por R\$ 12.000,00, ou seja, para $t = 0$*, temos que* $C = 200$*, portanto daqui a 10 anos a máquina valerá:*

$$R(10) = 4800e^{-10/5} + 200 = \frac{4800}{e^2} + 200 = \frac{4800}{7.389} + 200 = R\$\ 849,61$$

3.3.2 Valorização

Exemplo 3.19 *Estima-se que um certo objeto valoriza a uma taxa anual de* $\dfrac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4+8000}}$ *reais. Quanto valerá daqui a 10 anos o objeto que atualmente vale R\$ 500,00?*

Solução 3.13 *Seja* $P(t)$ *o preço do objeto daqui a* t *anos. Note que:*

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4+8000}}$$

logo,

$$P(t) = \int \frac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4+8000}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \sqrt{u} + C = \sqrt{0,2x^4+8000} + C$$

como o objeto vale atualmente R\$ 500,00, ou seja, para $t = 0$*, temos que* $C = 410,55$*, portanto daqui a 10 anos o objeto valerá:*

$$P(10) = \sqrt{0,2(10)^4+8000} + 410,55 = 100 + 410,55 = R\$\ 510,55$$

3.3.3 Preços de Venda

Exemplo 3.20

Solução 3.14

3.3.4 Custo Marginal

Exemplo 3.21

Solução 3.15

3.3.5 Receita futura

Exemplo 3.22 *Um poço de petróleo produz 300 barris de petróleo por mês. Este poço deverá secar em 3 anos. Estima-se que, daqui a* t *meses, o preço do barril de petróleo será de* $P(t) = 18 + 0,3\sqrt{t}$ *dólares. Como o petróleo é vendido logo que extraído, qual será a receita total futura do poço?*

Solução 3.16 *Seja R a receita. Então:*

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = (\textit{dólares recebidos por barril}).(\textit{N. de barris vendidos por mês})$$

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dB}.\frac{dB}{dt} = P(t).300 = 5400 + 90\sqrt{t}$$

Logo:

$$R(t) = \int 5400 + 90\sqrt{t}dt = 5400t + 60t^{3/2} + C$$

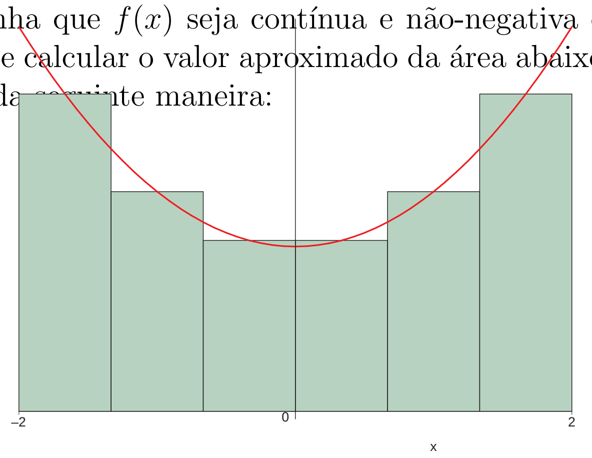
Como $R(0) = 0$, segue que $C = 0$ e $R(t) = 5400t + 60t^{3/2}$. Como o poço secará em 36 meses, a receita futura total do poço será de:

$$R(36) = 5400.36 + 60(36)^{3/2} = U\$ \ 207.360,00$$

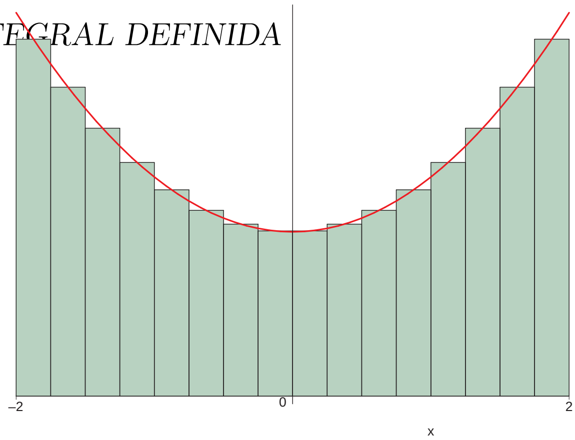
3.4 Integral Definida

3.4.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Suponha que $f(x)$ seja contínua e não-negativa em um intervalo $a \leq x \leq b$. Você pode calcular o valor aproximado da área abaixo do gráfico de f, entre $x = a$ e $x = b$, da seguinte maneira:



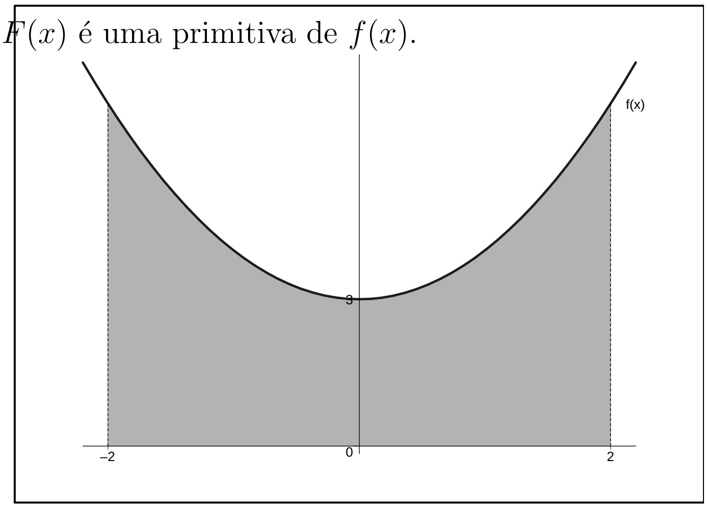
Se fizer uma subdivisão maior, temos:



Onde a área do n-ésimo retângulo é $f(x_i)\Delta x$. Portanto a área total será:

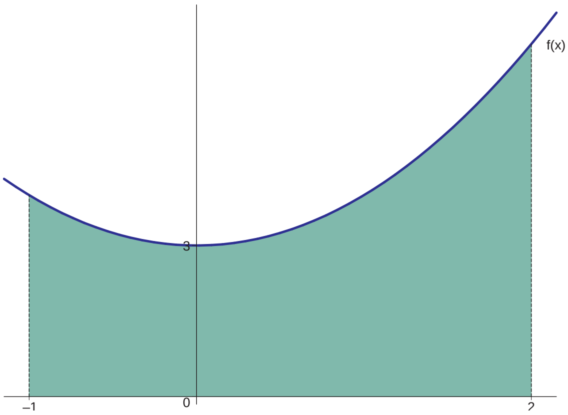
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.



Exemplo 3.23 *Calcule a área entre o gráfico de* $f(x) = x^2 + 3$ *e o eixo* x *entre* $-1 \leq x \leq 2$.

Solução 3.17 *Observando o gráfico nota-se que é só usar o teorema fundamental do calculo para se encontrar a área desejada.*

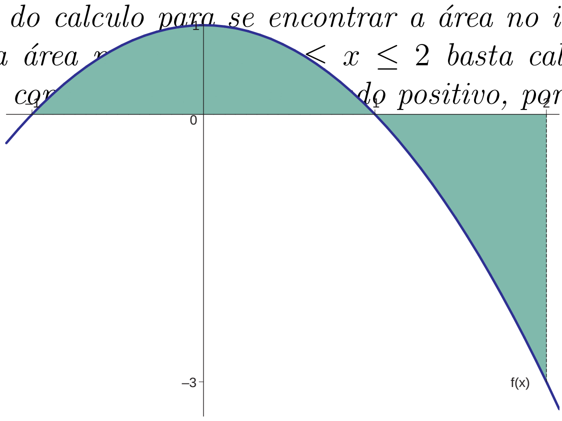


logo, $A = \int_{-1}^{2} x^2 + 3dx = F(2) - F(-1)$ *onde* $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x + C$, *portanto:*

$$A = \underbrace{\frac{2^3}{3} + 3.2 + C}_{F(2)} - \left(\underbrace{\frac{(-1)^3}{3} + 3.(-1) + C}_{F(-1)} \right) = \frac{26}{3} + C + \frac{10}{3} - C = 12 \ u.a.$$

Exemplo 3.24 *Calcule a área entre o gráfico de* $f(x) = -x^2 + 1$ *e o eixo* x *entre* $-1 \leq x \leq 2$.

Solução 3.18 *Observando o gráfico nota-se que só dá para usar o teorema fundamental do calculo para se encontrar a área no intervalo* $-1 \leq x \leq 1$. *Para se calcular a área n*... $\leq x \leq 2$ *basta calcular a integral definida nesse intervalo, co*... *do positivo, portanto:*



$$A_{total} = A_1 - A_2 = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{1}^{2} f(x)dx$$

Como $F(x) = -\frac{x^3}{3} + x + C$ *é uma primitiva, temos:*

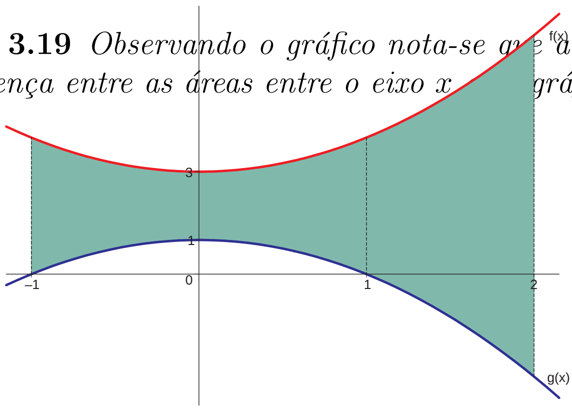
$$A_1 = \underbrace{-\frac{(1)^3}{3} + (1) + C}_{F(1)} - \left(\underbrace{-\frac{(-1)^3}{3} + (-1) + C}_{F(-1)} \right) = \frac{2}{3} + C + \frac{4}{3} - C = 2$$

$$A_2 = \underbrace{-\frac{2^3}{3} + 2 + C}_{F(2)} - \left(\underbrace{-\frac{(1)^3}{3} + (1) + C}_{F(1)} \right) = -\frac{6}{3} + C + \frac{2}{3} - C = -\frac{4}{3}$$

Conclusão: $A = 2 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}$ *u.a.*

Exemplo 3.25 *Calcule a área entre os gráficos de* $f(x) = x^2 + 3$ *e o gráfico de* $g(x) = -x^2 + 1$ *entre* $-1 \le x \le 2$.

Solução 3.19 *Observando o gráfico nota-se que a área no intervalo* $-1 \le x \le 1$ *é a diferença entre as áreas entre o eixo x e os gráficos de* $f(x)$ *e* $g(x)$*, ou seja:*



$$A_1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} [f(x) - g(x)]dx$$

e que a área no intervalo $1 \le x \le 2$ *é:*

$$A_1 = \int_{1}^{2} f(x)dx - \left(\int_{1}^{2} g(x)dx \right) = \int_{1}^{2} [f(x) - g(x)]dx$$

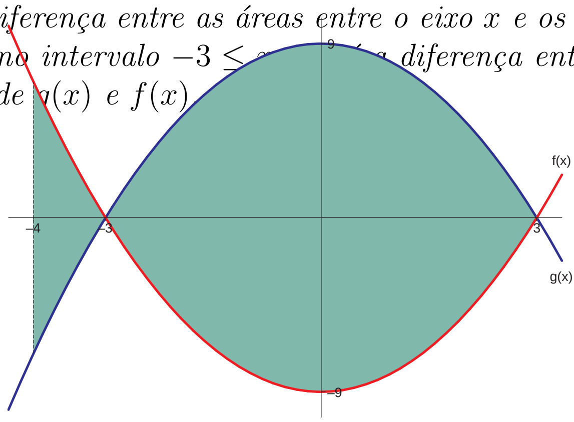
Portanto a função $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 + 2$, *satisfaz o teorema, logo* $A_{total} = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{2} [f(x) - g(x)]dx$ *e como* $H(x) = 2\frac{x^3}{3} + 2x + C$ *é uma primitiva de* $h(x)$, *temos:*

$$A_{total} = \underbrace{2\frac{(2)^3}{3} + 2.(2) + C}_{F(2)} - \left(\underbrace{2\frac{(-1)^3}{3} + 2.(-1) + C}_{F(-1)} \right)$$

$$A_{total} = \frac{20}{3} + C + \frac{4}{3} - C = \frac{24}{3} = 8 \ u.a.$$

Exemplo 3.26 *Calcule a área entre os gráficos de* $f(x) = x^2 - 9$ *e o gráfico de* $g(x) = -x^2 + 9$ *entre* $-4 \leq x \leq 3$.

Solução 3.20 *Observando o gráfico nota-se que a área* A_1 *no intervalo* $-4 \leq x \leq -3$ *é a diferença entre as áreas entre o eixo* x *e os gráficos de* $f(x)$ *e* $g(x)$ *e que a área* A_2 *no intervalo* $-3 \leq x$ [illegible] *é a diferença entre as áreas entre o eixo* x *e os gráficos de* $g(x)$ *e* $f(x)$.



$$A_{total} = A_1 + A_2 = \int_{-4}^{-3} [f(x) - g(x)]dx + \int_{-3}^{3} [g(x) - f(x)]dx$$

Para resolver essas integrais, vamos utilizar uma função auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 9) - (-x^2 + 9) = 2x^2 - 18$$

logo

$$A_{total} = \int_{-4}^{-3} h(x)dx + \int_{-3}^{3} -h(x)dx$$

Calculando a primitiva de $h(x)$, *temos:*

$$H(x) = \int h(x)dx = \int 2x^2 - 18dx = 2\frac{x^3}{3} - 18x + C$$

Portanto:

$$A_1 = \left(\underbrace{2\frac{(-3)^3}{3} + 18.(-3) + C}_{F(-3)}\right) - \left(\underbrace{2\frac{(-4)^3}{3} + 18.(-4) + C}_{F(-4)}\right) = \frac{20}{3}u.a.$$

e

$$A_2 = \left(\underbrace{2\frac{(3)^3}{3} + 18.(3) + C}_{F(3)}\right) - \left(\underbrace{2\frac{(-3)^3}{3} + 18.(-3) + C}_{F(-3)}\right) = 72u.a.$$

Finalmente: $A_{total} = \dfrac{20}{3} + 72 = \dfrac{236}{3}u.a.$

Anexos

3.5 Juros

3.6 Juros Simples

Juro é toda compensação em dinheiro que se paga ou se recebe pela quantia em dinheiro que se empresta ou que é emprestada em função de uma taxa e do tempo. Quando falamos em juros, devemos considerar:

1. O dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado é chamado de **capital**.
2. A taxa de porcentagem que se paga ou se recebe pelo aluguel do dinheiro é denominada **taxa de juros**.
3. O tempo deve sempre ser indicado na mesma unidade a que está submetida a taxa, e em caso contrário, deve-se realizar a conversão para que tanto a taxa como a unidade de tempo estejam compatíveis, isto é, estejam na mesma unidade.
4. O total pago no final do empréstimo, que corresponde ao capital mais os juros, é denominado **montante**.

Para calcular os juros simples j de um capital C, durante t períodos com a taxa de $i\%$ ao período, basta usar a fórmula:

$$j = C \times t \times \frac{i}{100}$$

Exemplo 3.27 *O preço à vista de um aparelho é de R\$ 450,00. A loja oferece este aparelho para pagamento em 5 prestações mensais e iguais porém, o preço* *passa a ser de R\$ 652,50. Sabendo-se que a diferença entre o preço à prazo e o preço à vista é devida aos juros cobrados pela loja nesse período, qual é a taxa mensal de juros cobrada por essa loja?*

Os dados são: $\begin{cases} j = 652,5 - 450 = 202,5 \\ t = 5 \\ C = 450 \\ i = ? \end{cases}$

$$\Rightarrow 202,50 = 450 \times 5 \times \frac{i}{100} \Rightarrow x = 9$$

De outra forma, como o juros pago a cada mês foi de $\dfrac{202,50}{5} = 40,50$ *então a taxa mensal de juros, desse problema pode ser resolvido da seguinte forma: i% de* $450,00 = 40,50$
Resposta: A taxa de juros é de 9% ao mês.

Exercício 3.3 *Uma aplicação feita durante 2 meses a uma taxa de 3% ao mês, rendeu R\$ 1.920,00 de juro. Qual foi o capital aplicado? Os dados são:* $\begin{cases} j = 1.920,00 \\ t = 2 \\ C = ? \\ i = 3\% \end{cases}$

$$\Rightarrow 1.920,00 = C \times 2 \times \frac{i}{100} \Rightarrow C = 32.000,00$$

De outra forma, como o capital que a aplicação rendeu mensalmente de juros foi de: $\dfrac{1920,00}{2} = 960,00$. *Se o capital aplicado é indicado por C, esse problema pode ser expresso por:* 3% *de* $C = 960,00$.
Resposta: O capital aplicado foi de R\$ 32.000,00.

Exercício 3.4 *A quantia de R\$3.000,00 é aplicada a juros simples de 5% ao mês, durante cinco anos. Calcule o montante ao final dos cinco anos.*[2]

Exercício 3.5 *Calcule o montante ao final de dez anos de um capital R\$10.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 18% ao semestre.*[3]

Exercício 3.6 *Quais os juros produzidos pelo capital R\$ 12.000,00 aplicados a uma taxa de juros simples de 10% ao bimestre durante 5 anos?*[4]

Exercício 3.7 *Um certo capital é aplicado em regime de juros simples, à uma taxa mensal de 5%. Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?*[5]

[2] R 3.4: *R\$ 12.000,00.*
[3] R 3.5: *R\$ 46.000,00*
[4] R 3.6: *R\$ 36.000,00*
[5] R 3.7: *20 meses ou 1 ano e oito meses.*

3.6.1 Juros Compostos

Se P reais forem investidos a uma taxa de juros anual de r (expressa como decimal) e os juros forem compostos k vezes por ano, o saldo $S(t)$ após t anos será de

$$\boxed{S(t) = P\left(1 + \frac{r}{t}\right)^{kt} \text{ reais}}$$

3.6.2 Juros Compostos Continuamente

Se P reais forem investidos a uma taxa de juros anual de r (expressa como decimal) e os juros forem compostos continuamente, o saldo $S(t)$ após t anos será de

$$\boxed{S(t) = Pe^{rt} \text{ reais}}$$

3.7 Tempo de Duplicação

Se a quantia for investida a uma taxa de juros anual r e os juros forem compostos k vezes ao ano, então

$$\boxed{\text{Tempo de duplicação} = \frac{\ln 2}{k \ln(1 + r/k)}}$$

Se a quantia for investida a uma taxa de juros anual r e os juros forem compostos continuamente, então

$$\boxed{\text{Tempo de duplicação} = \frac{\ln 2}{r}}$$

3.8 Taxa Efetiva de Juros

Se o juros são compostos k vezes ao ano, a uma taxa anual de juros r, então

$$\boxed{\text{Taxa efetiva de juros} = \left(1 + \frac{r}{t}\right)^{k} - 1}$$

Se o juros são compostos continuamente, a uma taxa anual de juros r, então

$$\boxed{\text{Taxa efetiva de juros} = e^{r} - 1}$$

3.9 Valor Presente

Se o juros são compostos k vezes ao ano, a uma taxa anual de juros r, o valor presente de S reais, pagável daqui a t anos é

$$\boxed{P = S\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kt} \text{ reais}}$$

Se o juros são compostos continuamente, a uma taxa anual de juros r, o valor presente de S reais, pagável daqui a t anos é

$$\boxed{P = Se^{-rt} \text{ reais}}$$