

# COMPLEMENTOS DE MATEMÁTICA

(Notas de Aula)

Prof. Sérgio de Albuquerque Souza

Endereço eletrônico: [sergio@mat.ufpb.br](mailto:sergio@mat.ufpb.br)

Sítio: [www.mat.ufpb.br/sergio](http://www.mat.ufpb.br/sergio)

18 de fevereiro de 2014

# Sumário

<b>1</b>	<b>Funções</b>	<b>5</b>
1.1	Relações . . . . .	5
1.2	Funções . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Derivada</b>	<b>7</b>
2.1	Definição . . . . .	7
2.2	Regras da derivação . . . . .	7
2.2.1	Potências de $x$ . . . . .	7
2.2.2	Constante multiplicada por uma função . . . . .	7
2.2.3	Soma ou diferença de duas funções . . . . .	8
2.2.4	Produto de duas funções . . . . .	8
2.2.5	Quociente de duas funções . . . . .	9
2.2.6	Função logarítmica . . . . .	9
2.2.7	Função exponencial . . . . .	10
2.2.8	Funções compostas (Regra da cadeia) . . . . .	10
<b>3</b>	<b>Integrais</b>	<b>13</b>
3.1	Primitivas . . . . .	13
3.2	Integrais Indefinidas . . . . .	15
3.2.1	Potências de $x$ . . . . .	15
3.2.2	Caso $x^{-1}$ . . . . .	15
3.2.3	Constante multiplicada por uma função . . . . .	15
3.2.4	Soma ou diferença de duas funções . . . . .	16
3.2.5	Função exponencial . . . . .	16
3.2.6	Integração de produtos e quociente . . . . .	16
3.2.7	Integração por substituição . . . . .	16
3.2.8	Integração por partes . . . . .	18
3.3	Aplicações . . . . .	20

3.3.1	Desvalorização . . . . .	20
3.3.2	Valorização . . . . .	21
3.3.3	Preços de Venda . . . . .	21
3.3.4	Custo Marginal . . . . .	21
3.3.5	Receita futura . . . . .	21
3.4	Integral Definida . . . . .	22
3.4.1	Teorema Fundamental do Cálculo . . . . .	22
3.5	Juros . . . . .	29
3.6	Juros Simples . . . . .	29
3.6.1	Juros Compostos . . . . .	31
3.6.2	Juros Compostos Continuamente . . . . .	31
3.7	Tempo de Duplicação . . . . .	31
3.8	Taxa Efetiva de Juros . . . . .	31
3.9	Valor Presente . . . . .	31

# Funções

## 1.1 Relações

**Definição 1.1** Dados dois conjuntos  $A$  e  $B$  não vazios, definimos o **produto cartesiano**<sup>1</sup> entre  $A$  e  $B$ , denotado por  $A \times B$ , como o conjunto de todos os pares ordenados da forma  $(x, y)$  onde  $x$  pertence ao primeiro conjunto  $A$  e  $y$  pertence ao segundo conjunto  $B$ , ou seja

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \text{ e } y \in B\}$$

### Observação 1.1

- Note que  $A \times B \neq B \times A$ , se  $A$  é não vazio ou  $B$  é não vazio.
- Se  $A = \{\}$  ou  $B = \{\}$ , por definição:  $A \times \{\} = \{\} = \{\} \times B$ .
- Se  $A$  possui  $m$  elementos e  $B$  possui  $n$  elementos, então  $A \times B$  possui  $m \cdot n$  elementos.

**Exemplo 1.1** Dados  $A = \{a, b, c, d\}$  e  $B = \{1, 2, 3\}$ , o produto cartesiano  $A \times B$ , terá 12 pares ordenados e será dado por  $A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3), (c, 1), (c, 2), (c, 3), (d, 1), (d, 2), (d, 3)\}$ .

**Definição 1.2** Sejam  $A$  e  $B$  conjuntos não vazios. Uma **relação** de  $A$  em  $B$  é qualquer subconjunto  $R$  do produto cartesiano  $A \times B$ .

<sup>1</sup>Os nomes Plano Cartesiano e Produto Cartesiano são homenagens ao seu criador René Descartes (1596-1650), filósofo e matemático francês. O nome de Descartes em Latim, era Cartesius, daí vem o nome cartesiano.

**Exemplo 1.2** O conjunto  $R = \{(a, 3), (b, 3), (c, 2), (c, 3), (d, 2), (d, 3)\}$  é uma relação em  $A$  em  $B$  do exemplo anterior.

**Observação 1.2** Uma relação  $R$  de  $A$  em  $B$  pode ser denotada por  $R : A \rightarrow B$ .

**Exemplo 1.3** Se  $A = \{1, 2\}$  e  $B = \{3, 4\}$ , o produto cartesiano é  $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$  e neste caso, temos algumas relações em  $A \times B$ :

1)  $R_1 = \{(1, 3), (1, 4)\}$

2)  $R_2 = \{(1, 3)\}$

3)  $R_3 = \{(2, 3), (2, 4)\}$

## 1.2 Funções

**Definição 1.3** Uma função  $f$  de  $A$  em  $B$  é uma relação em  $A \times B$ , que associa a cada variável  $x$  em  $A$ , um único  $y$  em  $B$ . Uma das notações mais usadas para uma função de  $A$  em  $B$ , é  $f : A \rightarrow B$ .

**Observação 1.3** Quatro aspectos chamam a atenção na definição apresentada:

- O domínio  $A$  da relação.
- O contradomínio  $B$  da relação.
- Todo elemento de  $A$  deve ter correspondente em  $B$ .
- Cada elemento de  $A$  só poderá ter no máximo um correspondente no contradomínio  $B$ .

Estas características nos informam que uma função pode ser vista geometricamente como uma linha no plano, contida em  $A \times B$ , que só pode ser "cortada" uma única vez por uma reta vertical, qualquer que seja esta reta.

# Derivada

## 2.1 Definição

**Definição 2.1** Chamaremos de coeficiente de Newton de uma função  $f(x)$  a razão entre a variação da função  $\Delta y = y_1 - y_0 = f(x_1) - f(x_0)$  e a variação dos valores do domínio da função  $\Delta x = x_1 - x_0$ , ou seja,

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

## 2.2 Regras da derivação

### 2.2.1 Potências de $x$

Se  $f(x) = x^n$  com  $n \in \mathbb{R}$ , então

$$f(x) = x^n \implies f'(x) = n.x^{n-1}$$

**Exemplo 2.1** Se  $f(x) = x^5$  então  $f'(x) = 5.x^{5-1} = 5x^4$

**Exemplo 2.2** Se  $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$  então:  $f'(x) = \frac{3}{2}.x^{3/2-1} = \frac{3x^{1/2}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

### 2.2.2 Constante multiplicada por uma função

Se  $f(x) = K.g(x)$  com  $K \in \mathbb{R}$ , então:

$$f(x) = K.g(x) \implies f'(x) = K.g'(x)$$

**Exemplo 2.3** Se  $f(x) = 3.x^4$  então  $f'(x) = 3.[x^4]' = 3.(4x^3) = 12x^3$

**Exemplo 2.4** Se  $f(x) = \frac{3}{2x^2} = \frac{3}{2}x^{-2}$  então:

$$f'(x) = \frac{3}{2}.[x^{-2}]' = \frac{3}{2}.(-2x^{-3}) = -\frac{3}{x^3}$$

### 2.2.3 Soma ou diferença de duas funções

Se  $f(x) = g(x) \pm h(x)$ , então

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \implies f'(x) = g'(x) \pm h'(x)$$

**Exemplo 2.5** Se  $f(x) = 4x^2 + 3x$  então  $f'(x) = [4x^2]' + [3x]' = 8x + 3$

**Exemplo 2.6** Se  $f(x) = x - \frac{1}{x} = x - x^{-1}$  então  $f'(x) = [x]' - [x^{-1}]' = 1 + \frac{1}{x^2}$

### 2.2.4 Produto de duas funções

Se  $f(x) = g(x).h(x)$ , então

$$f(x) = g(x).h(x) \implies f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$$

**Exemplo 2.7** Se  $f(x) = (2x^2 - 1)(x + 2)$  então considere  $g(x) = 2x^2 - 1$  e  $h(x) = x + 2$ , logo

$$f'(x) = \underbrace{(4x)}_{g'} \underbrace{(x+2)}_h + \underbrace{(2x^2-1)}_g \underbrace{(1)}_{h'} \\ f'(x) =$$

**Exemplo 2.8** Se  $f(x) = (5x^3 - x^2)(x^2 - x - 2)$  então considere  $g(x) = 5x^3 - x^2$  e  $h(x) = x^2 - x - 2$ , logo

$$f'(x) = \underbrace{(15x^2 - 2x)}_{g'} \underbrace{(x^2 - x - 2)}_h + \underbrace{(5x^3 - x^2)}_g \underbrace{(2x - 1)}_{h'} \\ f'(x) =$$

## 2.2.5 Quociente de duas funções

Se  $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$  com  $h(x) \neq 0$ , então

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \implies f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

**Exemplo 2.9** Se  $f(x) = \frac{2x^2 - 1}{x + 2}$  então considere  $g(x) = 2x^2 - 1$  e  $h(x) = x + 2$ , logo

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(4x)}^{g'} \overbrace{(x+2)}^h - \overbrace{(2x^2-1)}^g \overbrace{(1)}^{h'}}{\underbrace{(x+2)^2}_{h^2}}$$

$$f'(x) = \frac{f'(x)}{(x+2)^2}$$

**Exemplo 2.10** Se  $f(x) = \frac{5x^3 - x^2}{x^2 - x - 2}$  então considere  $g(x) = 5x^3 - x^2$  e  $h(x) = x^2 - x - 2$ , logo

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(15x^2-2x)}^{g'} \overbrace{(x^2-x-2)}^h - \overbrace{(5x^3-x^2)}^g \overbrace{(2x-1)}^{h'}}{\underbrace{(x^2-x-2)^2}_{h^2}}$$

$$f'(x) = \frac{f'(x)}{(x^2-x-2)^2}$$

## 2.2.6 Função logarítmica

**Observação 2.1**  $\ln x = \log_e x$ , onde  $e = 2,7182818284590452354$  é constante de Euler.

**Observação 2.2**  $\log_b x = \frac{\log_e x}{\log_e b} = \frac{\ln x}{\ln b} = \frac{1}{\ln b} \ln x$

Se  $f(x) = \ln x$  com  $K \in R$ , então

$$f(x) = \ln x \implies f'(x) = \frac{1}{x}$$

**Exemplo 2.11** Se  $f(x) = 5 \ln x$  então  $f'(x) = 4[\ln x]' = 4 \cdot \frac{1}{x} = \frac{4}{x}$

## 2.2.7 Função exponencial

**Observação 2.3**  $b^x = e^{\ln b^x} = e^{x \ln b}$

Se  $f(x) = e^x$  com  $e = 2,7182818284590452354$  (constante de Euler), então

$$f(x) = e^x \implies f'(x) = e^x$$

**Exemplo 2.12** Se  $f(x) = 4e^x$  então  $f'(x) = 4[e^x]' = 4e^x$

**Exemplo 2.13** Se  $f(x) = 4x^2 e^x$  então considere  $g(x) = 4x^2 - 1$  e  $h(x) = e^x$ , logo

$$f'(x) = \underbrace{(4x)}_{g'} \underbrace{(e^x)}_h + \underbrace{(4x^2)}_g \underbrace{(e^x)}_{h'}$$

$$f'(x) = (4x + 4x^2)e^x$$

**Exemplo 2.14** Se  $f(x) = e^x \ln x$  então considere  $g(x) = e^x$  e  $h(x) = \ln x$ , logo

$$f'(x) = \underbrace{(e^x)}_{g'} \underbrace{(\ln x)}_h + \underbrace{(e^x)}_g \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{h'}$$

$$f'(x) = \left(\ln x + \frac{1}{x}\right)e^x$$

## 2.2.8 Funções compostas (Regra da cadeia)

Se  $f(x) = g[h(x)]$ , então

$$f(x) = g[h(x)] \implies f'(x) = g'[h(x)] \cdot h'(x)$$

**Exemplo 2.15** Se  $f(x) = (x^3 - 2x)^7$  então considere  $g(x) = x^7$  e  $h(x) = x^3 - 2x$ , note que  $f(x) = g[h(x)]$ , portanto

$$f'(x) = \underbrace{7(x^3 - 2x)^6}_{g'[h(x)]} \cdot \underbrace{(3x^2 - 2)}_{h'(x)}$$

$$f'(x) = (21x^2 - 14)(x^3 - 2x)^6$$

A regra da cadeia pode ser usada para funções definida por várias composições, bastando derivar reutilizando a regra da cadeia seguidas vezes.

**Exemplo 2.16** Se  $f(x) = [\ln(x^3 - 2x)]^7$  então considere  $g(x) = x^7$ ,  $h(x) = \ln x$  e  $i(x) = x^3 - 2x$ , note que  $f(x) = g\{h[i(x)]\}$ , portanto

$$f'(x) = \underbrace{7[\ln(x^3 - 2x)]^6}_{g' \{h[i(x)]\}} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{3x^2 - 2x}\right)}_{h' [i(x)]} \cdot \underbrace{(6x - 2)}_{i'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{7(6x - 2)[\ln(x^3 - 2x)]^6}{3x^2 - 2x}$$

**Desafio:** Derive a seguinte função:  $f(x) = \frac{\sqrt{[\ln(x^3 - 4x)]^3}}{2x^3 e^{2x^3 - \sqrt{x}}}$

# Integrais

## 3.1 Primitivas

Antes de iniciar propriamente as integrais e as propriedades, iremos calcular alguns exemplos de primitivas, apenas com as propriedades das derivadas.

**Definição 3.1** Diremos que uma função  $F(x)$  é uma **primitiva** da função  $f(x)$ , quando:

$$F'(x) = f(x)$$

**Exercício 3.1** Encontre as primitivas da função  $f(x) = 2x$

**Solução 3.1** Neste caso, nota-se facilmente que  $F_1(x) = x^2 + 1$  e  $F_2(x) = x^2 - 5$  são primitivas de  $f(x)$  e que para qualquer constante  $K$ , a função  $F(x) = x^2 + K$  também é uma primitiva de  $f(x)$ .

**Observação 3.1** Se  $F_1(x)$  e  $F_2(x)$  são primitivas de uma função  $f(x)$ , então  $F_1(x) = F_2(x) + K$ , onde  $K$  é uma constante.

**Observação 3.2** Note que para cada constante  $K$  existe uma primitiva, isto graficamente, significa que existem infinitas curvas que representam as primitivas de  $f(x)$ .



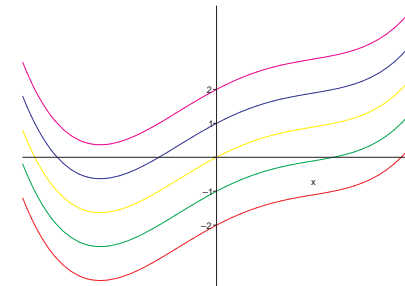
**Exemplo 3.1** Determinar a função  $f(x)$  tal que  $f'(x) = 4x^3 - 2x^3 - 3$

**Exemplo 3.2**  $F(x) = 3x^4 - 2x^2 - 4$  é uma primitiva de  $f(x) = 12x^3 - 4x$ .

**Exercício 3.2** Encontre as primitivas da função  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$

**Solução 3.2** Note que, para se encontrar uma primitiva de  $f(x)$  a função  $F(x)$ , neste caso, tem que ser uma função polinomial do quarto grau  $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + K$ , portanto  $F'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$  deve ser igual a  $f(x)$ , logo:  $4a = 3$ ,  $3b = -2$ ,  $2c = -2$  e  $d = 2$  ou seja,  $a = \frac{3}{4}$ ,  $b = -\frac{2}{3}$ ,  $c = -1$  e  $d = 2$ , donde  $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + K$ .

Graficamente temos várias curvas que representam as primitivas de  $f(x)$ .



Portanto ao se escolher um ponto  $P = (x_0, y_0)$  (uma condição) a primitiva fica unicamente determinada.

**Exemplo 3.3** Encontrar a primitiva da função  $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$  no ponto  $P = (1, 2)$

**Solução 3.3** Como  $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + K$  são as primitivas de  $f(x)$ , para determinar a primitiva que passa pelo ponto  $P = (1, 2)$ , basta substituir o ponto na primitiva, isto é,  $2 = F(1) = \frac{3}{4}(1)^4 - \frac{2}{3}(1)^3 - (1)^2 + 2(1) + K$ , donde resulta:  $K =$

## 3.2 Integrais Indefinidas

A **integral indefinida** de uma função  $f(x)$ , é uma primitiva de  $f(x)$ , denotado por

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

onde  $\int$  é o sinal de integração (lê-se *integral de*),  $dx$  indica que  $x$  é a variável a ser considerada.

Temos algumas regras de integração, de fácil obtenção:

### 3.2.1 Potências de $x$

Se  $f(x) = x^n$  onde  $n \neq -1$ , então:

$$f(x) = x^n \implies \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K$$

**Exemplo 3.4**  $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + K = \frac{x^6}{6} + K$

**Exemplo 3.5**  $\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + K = \frac{x^{5/2}}{5/2} + K = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + K$

### 3.2.2 Caso $x^{-1}$

Se  $f(x) = \frac{1}{x}$ , então:

$$f(x) = \frac{1}{x} \implies \int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln |x| + K$$

### 3.2.3 Constante multiplicada por uma função

Se  $f(x) = c.g(x)$  onde  $c$  é uma constante qualquer, então:

$$f(x) = c.g(x) \implies \int c.f(x)dx = c. \int f(x)dx$$

### 3.2.4 Soma ou diferença de duas funções

Se  $f(x) = g(x) \pm h(x)$ , então:

$$f(x) = g(x) \pm h(x) \implies \int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$$

### 3.2.5 Função exponencial

Se  $f(x) = e^x$ , então:

$$f(x) = e^x \implies \int e^x dx = e^x + K$$

**Exemplo 3.6**  $\int 3x^3 - 4e^x + 1dx = 3 \int x^3 dx - 4 \int e^x dx + \int 1dx =$   
 $= 3 \left( \frac{x^4}{4} + K_1 \right) + 4(e^x + K_2) + \left( \frac{x^{0+1}}{0+1} + K_3 \right) =$   
 $= \frac{3x^4}{4} + 4e^x + x + \overbrace{(3K_1 - 4K_2 + K_3)}^{=K}$

### 3.2.6 Integração de produtos e quociente

Não existe uma regra específica para o produto ou quociente de duas funções. Eventualmente será possível reescrever a integral de uma forma que possa ser integrado pelas regras anteriores.

**Exemplo 3.7**  $\int \sqrt{x}(x^3 - 4x - 2)dx = \int x^{1/2}(x^3 - 4x - 2)dx =$   
 $= \int x^{7/2} - 4x^{3/2} - 2x^{1/2}dx = \text{resolva usando as regras anteriores.}$

**Exemplo 3.8**  $\int \frac{5x^6 - 4x^2 - 3}{x^3} dx = \int \frac{5x^6}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3} dx =$   
 $= \int 5x^3 - \frac{4}{x} - 3x^{-3} dx = \text{resolva usando as regras anteriores.}$

### 3.2.7 Integração por substituição

A idéia dessa regra, é usar a regra da cadeia para uma determinada função, usando para isso uma substituição adequada, tornando a integral mais simples do que a integral original.



**Exemplo 3.9** Calcule a integral  $\int 9(x^3 - 3x + 4)^8(3x^2 - 3)dx$ .

**Solução 3.4** Considerando  $u(x) = x^3 - 3x + 4$  temos  $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3x^2 - 3$  ou seja,  $du = (3x^2 - 3)dx$ , logo:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{9(x^3 - 3x + 4)^8}_u \underbrace{(3x^2 - 3)dx}_{du} &= \int 9u^8 du = u^9 + K = \\ &= \underbrace{(x^3 - 3x + 4)^9}_u + K \end{aligned}$$

**Exemplo 3.10** Calcule a integral  $\int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x + 4} dx$ .

**Solução 3.5** Considerando  $u(x) = x^3 - 3x + 4$  temos  $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3x^2 - 3$  ou seja  $du = (3x^2 - 3)dx$ , logo:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x + 4} dx &= \int \underbrace{\frac{1}{x^3 - 3x + 4}}_u \overbrace{(3x^2 - 3)dx}^{du} = \\ &= \int \frac{1}{u} du = \ln |u| + K = \\ &= \ln |\underbrace{(x^3 - 3x + 4)}_u| + K \end{aligned}$$

**Exemplo 3.11** Calcule a integral  $\int \frac{x}{x-1} dx$ .

**Solução 3.6** Considerando  $u(x) = x - 1$  temos  $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1$  ou seja  $du = dx$ , logo:

$$\begin{aligned} \int \frac{x}{x-1} dx &= \int \underbrace{\frac{x}{x-1}}_u \overbrace{dx}^{du} = \int \frac{u+1}{u} du = \\ &= \int 1 + \frac{1}{u} du = u + \ln |u| + K = \\ &= \underbrace{x-1}_u + \ln |\underbrace{x-1}_u| + K \end{aligned}$$

**Exemplo 3.12** Calcule a integral  $\int x \ln(x^2 + 5) dx$ .

**Solução 3.7** Considerando  $u(x) = x^2 - 5$  temos  $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x$  ou seja  $\frac{du}{2} = x dx$ , logo:

$$\begin{aligned} \int x \ln(x^2 + 5) dx &= \int \ln \underbrace{x^2 + 5}_u \overbrace{x dx}^{du/2} = \int \ln u \frac{du}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \int \ln u du = ?^1 \end{aligned}$$

### 3.2.8 Integração por partes

Na propriedade da regra do produto (ver ??) temos:

$$\begin{aligned} g(x).h'(x) &= [g(x)h(x)]' - g'(x)h(x) \\ \Downarrow \\ \int g(x).h'(x) dx &= \int [g(x)h(x)]' dx - \int g'(x)h(x) dx \\ &= g(x)h(x) - \int g'(x)h(x) dx \end{aligned}$$

**Exemplo 3.13** Calcule  $\int x e^x dx$

**Solução 3.8** Escolhendo  $g(x) = x$  e  $h'(x) = e^x$ , temos  $g'(x) = 1$  e  $h(x) = e^x$ , portanto:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h'(x)} dx &= \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{e^x}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \underbrace{e^x}_{h(x)} dx = \\ &= x e^x - e^x + K = (x - 1)e^x + K \end{aligned}$$

Note que fazendo a escolha  $g(x) = e^x$  e  $h'(x) = x$ , temos  $g'(x) = e^x$  e  $h(x) = \frac{x^2}{2}$ , portanto:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{x}_{h'(x)} dx &= \underbrace{e^x}_{g(x)} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{h(x)} - \int \underbrace{e^x}_{g'(x)} \underbrace{\frac{x^2}{2}}_{h(x)} dx = \\ &= xe^x - (\text{integral mais complicada}) \end{aligned}$$

Portanto a escolha deve sempre ter como objetivo simplificar a integral, deixando mais simples que a integral original.

**Exemplo 3.14** Calcule  $\int x\sqrt{x+5}dx$

**Solução 3.9** Escolhendo  $g(x) = x$  e  $h'(x) = \sqrt{x+5}$ , temos  $g'(x) = 1$  e  $h(x) = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$ , portanto:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\sqrt{x+5}}_{h'(x)} dx &= \underbrace{x}_{g(x)} \underbrace{\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)} \underbrace{\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}}_{h(x)} dx \\ &= \frac{2x\sqrt{x+5}}{3} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + K \end{aligned}$$

**Exemplo 3.15** Calcule  $\int \ln x dx$

**Solução 3.10** Escolhendo  $g(x) = \ln x$  e  $h'(x) = 1$ , temos  $g'(x) = \frac{1}{x}$  e  $h(x) = x$ , portanto:

$$\begin{aligned} \int \underbrace{\ln x}_{g(x)} \underbrace{1}_{h'(x)} dx &= \underbrace{\ln x}_{g(x)} \underbrace{x}_{h(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \underbrace{x}_{h(x)} dx = \\ &= x \ln x - \int 1 dx = \\ &= x \ln x - x + K \end{aligned}$$

**Exemplo 3.16** Terminando o exemplo ??, temos

$$\begin{aligned} \int x \ln(x^2 + 5) dx &= \frac{1}{2} \int \ln u du = \\ &= \frac{1}{2} (u \ln u - u) + K = \\ &= \frac{1}{2} (x^2 + 5) \ln(x^2 + 5) - \frac{1}{2} (x^2 + 5) + K \end{aligned}$$

### 3.3 Aplicações

#### 3.3.1 Desvalorização

**Exemplo 3.17** O preço de revenda de uma certa máquina decresce a uma taxa que varia com o tempo de uso. Quando a máquina tinha  $t$  anos de uso, a taxa de variação do seu valor era  $200(t-10)$  reais por ano. Se a máquina foi comprada por R\$ 12.000,00, quanto valerá 10 anos depois?

**Solução 3.11** Seja  $R(t)$  o preço de revenda daqui a  $t$  anos. Note que:

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = 200(t-10) = 200t - 2000$$

logo,

$$R(t) = \int 200t - 2000 dt = 200 \frac{t^2}{2} - 2000t + C = 100t^2 - 2000t + C$$

como a máquina foi comprada por R\$ 12.000,00, ou seja, para  $t = 0$ , temos que  $C = 12.000$ , portanto daqui a 10 anos a máquina valerá:

$$R(10) = 100(10)^2 - 2000(10) + 12000 = \text{R\$ } 2.000,00$$

**Exemplo 3.18** O preço de revenda de uma certa máquina decresce a uma taxa que varia com o tempo de uso. Quando a máquina tinha  $t$  anos de uso, a taxa de variação do seu valor era  $-960e^{-t/5}$  reais por ano. Se a máquina foi comprada por R\$ 5.000,00, quanto valerá 10 anos depois?

**Solução 3.12** Seja  $R(t)$  o preço de revenda daqui a  $t$  anos. Note que:

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = -960e^{-t/5}$$

logo,

$$R(t) = \int -960e^{-t/5} dt = \int 4800e^u du = 4800e^u + C = 4800e^{-t/5} + C$$

como a máquina foi comprada por R\$ 12.000,00, ou seja, para  $t = 0$ , temos que  $C = 200$ , portanto daqui a 10 anos a máquina valerá:

$$R(10) = 4800e^{-10/5} + 200 = \frac{4800}{e^2} + 200 = \frac{4800}{7.389} + 200 = \text{R\$ } 849,61$$

### 3.3.2 Valorização

**Exemplo 3.19** Estima-se que um certo objeto valoriza a uma taxa anual de  $\frac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4 + 8000}}$  reais. Quanto valerá daqui a 10 anos o objeto que atualmente vale R\$ 500,00?

**Solução 3.13** Seja  $P(t)$  o preço do objeto daqui a  $t$  anos. Note que:

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4 + 8000}}$$

logo,

$$P(t) = \int \frac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4 + 8000}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{u}} du = \sqrt{u} + C = \sqrt{0,2x^4 + 8000} + C$$

como o objeto vale atualmente R\$ 500,00, ou seja, para  $t = 0$ , temos que  $C = 410,55$ , portanto daqui a 10 anos o objeto valerá:

$$P(10) = \sqrt{0,2(10)^4 + 8000} + 410,55 = 100 + 410,55 = \text{R\$ } 510,55$$

### 3.3.3 Preços de Venda

**Exemplo 3.20**

**Solução 3.14**

### 3.3.4 Custo Marginal

**Exemplo 3.21**

**Solução 3.15**

### 3.3.5 Receita futura

**Exemplo 3.22** Um poço de petróleo produz 300 barris de petróleo por mês. Este poço deverá secar em 3 anos. Estima-se que, daqui a  $t$  meses, o preço do barril de petróleo será de  $P(t) = 18 + 0,3\sqrt{t}$  dólares. Como o petróleo é vendido logo que extraído, qual será a receita total futura do poço?

**Solução 3.16** Seja  $R$  a receita. Então:

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = (\text{dólares recebidos por barril}) \cdot (N. \text{ de barris vendidos por mês})$$

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dB} \cdot \frac{dB}{dt} = P(t) \cdot 300 = 5400 + 90\sqrt{t}$$

Logo:

$$R(t) = \int 5400 + 90\sqrt{t} dt = 5400t + 60t^{3/2} + C$$

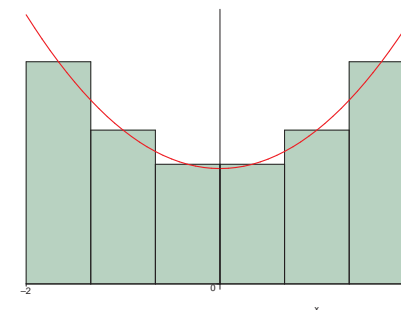
Como  $R(0) = 0$ , segue que  $C = 0$  e  $R(t) = 5400t + 60t^{3/2}$ . Como o poço secará em 36 meses, a receita futura total do poço será de:

$$R(36) = 5400 \cdot 36 + 60(36)^{3/2} = \text{US\$ } 207.360,00$$

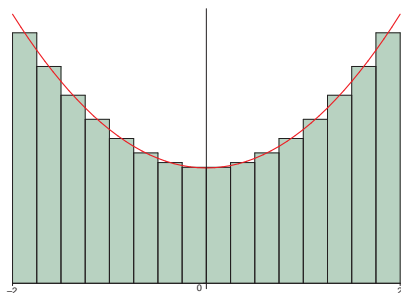
## 3.4 Integral Definida

### 3.4.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Suponha que  $f(x)$  seja contínua e não-negativa em um intervalo  $a \leq x \leq b$ . Você pode calcular o valor aproximado da área abaixo do gráfico de  $f$ , entre  $x = a$  e  $x = b$ , da seguinte maneira:



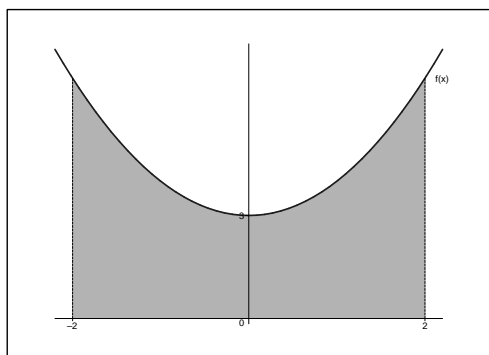
Se fizer uma subdivisão maior, temos:



Onde a área do  $n$ -ésimo retângulo é  $f(x_i)\Delta x$ . Portanto a área total será:

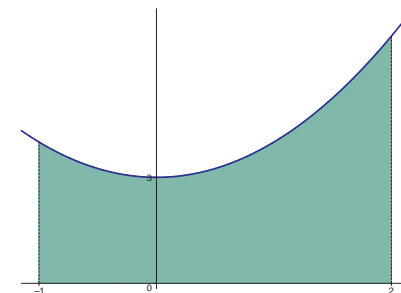
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde  $F(x)$  é uma primitiva de  $f(x)$ .



**Exemplo 3.23** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = x^2 + 3$  e o eixo  $x$  entre  $-1 \leq x \leq 2$ .

**Solução 3.17** Observando o gráfico nota-se que é só usar o teorema fundamental do cálculo para se encontrar a área desejada.

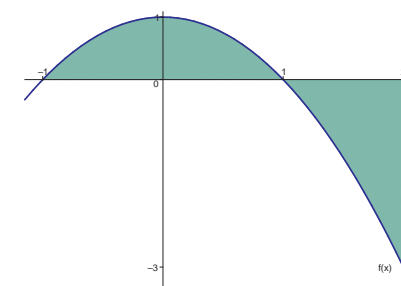


logo,  $A = \int_{-1}^2 x^2 + 3dx = F(2) - F(-1)$  onde  $F(x) = \frac{x^3}{3} + 3x + C$ , portanto:

$$A = \underbrace{\frac{2^3}{3} + 3 \cdot 2 + C}_{F(2)} - \underbrace{\left( \frac{(-1)^3}{3} + 3 \cdot (-1) + C \right)}_{F(-1)} = \frac{26}{3} + C + \frac{10}{3} - C = 12 \text{ u.a.}$$

**Exemplo 3.24** Calcule a área entre o gráfico de  $f(x) = -x^2 + 1$  e o eixo  $x$  entre  $-1 \leq x \leq 2$ .

**Solução 3.18** Observando o gráfico nota-se que só dá para usar o teorema fundamental do cálculo para se encontrar a área no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$ . Para se calcular a área no intervalo  $1 \leq x \leq 2$  basta calcular a integral definida nesse intervalo, considerando-se o resultado positivo, portanto:



$$A_{total} = A_1 - A_2 = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx$$

Como  $F(x) = -\frac{x^3}{3} + x + C$  é uma primitiva, temos:

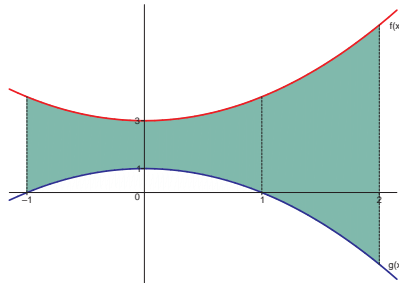
$$A_1 = \underbrace{-\frac{(1)^3}{3} + (1) + C}_{F(1)} - \underbrace{\left(-\frac{(-1)^3}{3} + (-1) + C\right)}_{F(-1)} = \frac{2}{3} + C + \frac{4}{3} - C = 2$$

$$A_2 = \underbrace{-\frac{2^3}{3} + 2 + C}_{F(2)} - \underbrace{\left(-\frac{(1)^3}{3} + (1) + C\right)}_{F(1)} = -\frac{6}{3} + C + \frac{2}{3} - C = -\frac{4}{3}$$

$$\text{Conclusão: } A = 2 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3} \text{ u.a.}$$

**Exemplo 3.25** Calcule a área entre os gráficos de  $f(x) = x^2 + 3$  e o gráfico de  $g(x) = -x^2 + 1$  entre  $-1 \leq x \leq 2$ .

**Solução 3.19** Observando o gráfico nota-se que a área no intervalo  $-1 \leq x \leq 1$  é a diferença entre as áreas entre o eixo  $x$  e os gráficos de  $f(x)$  e  $g(x)$ , ou seja:



$$A_1 = \int_{-1}^1 f(x)dx - \int_{-1}^1 g(x)dx = \int_{-1}^1 [f(x) - g(x)]dx$$

e que a área no intervalo  $1 \leq x \leq 2$  é:

$$A_2 = \int_1^2 f(x)dx - \left(\int_1^2 g(x)dx\right) = \int_1^2 [f(x) - g(x)]dx$$

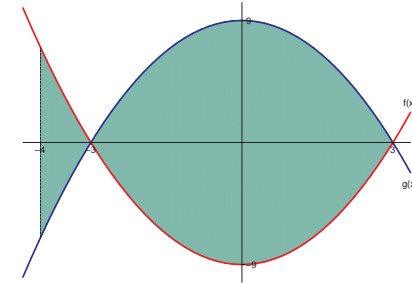
Portanto a função  $h(x) = f(x) - g(x) = 2x^2 + 2$ , satisfaz o teorema, logo  $A_{total} = A_1 + A_2 = \int_{-1}^2 [f(x) - g(x)]dx$  e como  $H(x) = 2\frac{x^3}{3} + 2x + C$  é uma primitiva de  $h(x)$ , temos:

$$A_{total} = \underbrace{2\frac{(2)^3}{3} + 2 \cdot (2) + C}_{F(2)} - \underbrace{\left(2\frac{(-1)^3}{3} + 2 \cdot (-1) + C\right)}_{F(-1)}$$

$$A_{total} = \frac{20}{3} + C + \frac{4}{3} - C = \frac{24}{3} = 8 \text{ u.a.}$$

**Exemplo 3.26** Calcule a área entre os gráficos de  $f(x) = x^2 - 9$  e o gráfico de  $g(x) = -x^2 + 9$  entre  $-4 \leq x \leq 3$ .

**Solução 3.20** Observando o gráfico nota-se que a área  $A_1$  no intervalo  $-4 \leq x \leq -3$  é a diferença entre as áreas entre o eixo  $x$  e os gráficos de  $f(x)$  e  $g(x)$  e que a área  $A_2$  no intervalo  $-3 \leq x \leq 3$  é a diferença entre as áreas entre o eixo  $x$  e os gráficos de  $g(x)$  e  $f(x)$ , ou seja:



$$A_{total} = A_1 + A_2 = \int_{-4}^{-3} [f(x) - g(x)]dx + \int_{-3}^3 [g(x) - f(x)]dx$$

Para resolver essas integrais, vamos utilizar uma função auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 9) - (-x^2 + 9) = 2x^2 - 18$$

logo

$$A_{total} = \int_{-4}^{-3} h(x)dx + \int_{-3}^3 -h(x)dx$$

Calculando a primitiva de  $h(x)$ , temos:

$$H(x) = \int h(x)dx = \int 2x^2 - 18dx = 2\frac{x^3}{3} - 18x + C$$

Portanto:

$$A_1 = \left( \underbrace{2\frac{(-3)^3}{3} + 18 \cdot (-3) + C}_{F(-3)} \right) - \left( \underbrace{2\frac{(-4)^3}{3} + 18 \cdot (-4) + C}_{F(-4)} \right) = \frac{20}{3} u.a.$$

*e*

$$A_2 = \left( \underbrace{2\frac{(3)^3}{3} + 18 \cdot (3) + C}_{F(3)} \right) - \left( \underbrace{2\frac{(-3)^3}{3} + 18 \cdot (-3) + C}_{F(-3)} \right) = 72 u.a.$$

$$\text{Finalmente: } A_{total} = \frac{20}{3} + 72 = \frac{236}{3} u.a.$$

## Anexos

### 3.5 Juros

### 3.6 Juros Simples

Juro é toda compensação em dinheiro que se paga ou se recebe pela quantia em dinheiro que se empresta ou que é emprestada em função de uma taxa e do tempo. Quando falamos em juros, devemos considerar:

1. O dinheiro que se empresta ou que se pede emprestado é chamado de **capital**.
2. A taxa de porcentagem que se paga ou se recebe pelo aluguel do dinheiro é denominada **taxa de juros**.
3. O tempo deve sempre ser indicado na mesma unidade a que está submetida a taxa, e em caso contrário, deve-se realizar a conversão para que tanto a taxa como a unidade de tempo estejam compatíveis, isto é, estejam na mesma unidade.
4. O total pago no final do empréstimo, que corresponde ao capital mais os juros, é denominado **montante**.

Para calcular os juros simples  $j$  de um capital  $C$ , durante  $t$  períodos com a taxa de  $i\%$  ao período, basta usar a fórmula:

$$j = C \times t \times \frac{i}{100}$$

**Exemplo 3.27** O preço à vista de um aparelho é de R\$ 450,00. A loja oferece este aparelho para pagamento em 5 prestações mensais e iguais porém, o preço

passa a ser de R\$ 652,50. Sabendo-se que a diferença entre o preço à prazo e o preço à vista é devida aos juros cobrados pela loja nesse período, qual é a taxa mensal de juros cobrada por essa loja?

$$\text{Os dados são: } \begin{cases} j = 652,5 - 450 = 202,5 \\ t = 5 \\ C = 450 \\ i = ? \end{cases}$$

$$\Rightarrow 202,50 = 450 \times 5 \times \frac{i}{100} \Rightarrow x = 9$$

De outra forma, como o juros pago a cada mês foi de  $\frac{202,50}{5} = 40,50$  então a taxa mensal de juros, desse problema pode ser resolvido da seguinte forma:  $i\%$  de 450,00 = 40,50

Resposta: A taxa de juros é de 9% ao mês.

**Exercício 3.3** Uma aplicação feita durante 2 meses a uma taxa de 3% ao mês, rendeu R\$ 1.920,00 de juro. Qual foi o capital aplicado? Os dados são:  $\begin{cases} j = 1.920,00 \\ t = 2 \\ C = ? \\ i = 3\% \end{cases}$

$$\Rightarrow 1.920,00 = C \times 2 \times \frac{i}{100} \Rightarrow C = 32.000,00$$

De outra forma, como o capital que a aplicação rendeu mensalmente de juros foi de:  $\frac{1920,00}{2} = 960,00$ . Se o capital aplicado é indicado por  $C$ , esse problema pode ser expresso por: 3% de  $C = 960,00$ .

Resposta: O capital aplicado foi de R\$ 32.000,00.

**Exercício 3.4** A quantia de R\$3.000,00 é aplicada a juros simples de 5% ao mês, durante cinco anos. Calcule o montante ao final dos cinco anos.<sup>2</sup>

**Exercício 3.5** Calcule o montante ao final de dez anos de um capital R\$10.000,00 aplicado à taxa de juros simples de 18% ao semestre.<sup>3</sup>

**Exercício 3.6** Quais os juros produzidos pelo capital R\$ 12.000,00 aplicados a uma taxa de juros simples de 10% ao bimestre durante 5 anos?<sup>4</sup>

**Exercício 3.7** Um certo capital é aplicado em regime de juros simples, à uma taxa mensal de 5%. Depois de quanto tempo este capital estará duplicado?<sup>5</sup>

<sup>2</sup>R 3.4: R\$ 12.000,00.

<sup>3</sup>R 3.5: R\$ 46.000,00

<sup>4</sup>R 3.6: R\$ 36.000,00

<sup>5</sup>R 3.7: 20 meses ou 1 ano e oito meses.

### 3.6.1 Juros Compostos

Se  $P$  reais forem investidos a uma taxa de juros anual de  $r$  (expressa como decimal) e os juros forem compostos  $k$  vezes por ano, o saldo  $S(t)$  após  $t$  anos será de

$$S(t) = P \left( 1 + \frac{r}{k} \right)^{kt} \text{ reais}$$

### 3.6.2 Juros Compostos Continuamente

Se  $P$  reais forem investidos a uma taxa de juros anual de  $r$  (expressa como decimal) e os juros forem compostos continuamente, o saldo  $S(t)$  após  $t$  anos será de

$$S(t) = Pe^{rt} \text{ reais}$$

## 3.7 Tempo de Duplicação

Se a quantia for investida a uma taxa de juros anual  $r$  e os juros forem compostos  $k$  vezes ao ano, então

$$\text{Tempo de duplicação} = \frac{\ln 2}{k \ln(1 + r/k)}$$

Se a quantia for investida a uma taxa de juros anual  $r$  e os juros forem compostos continuamente, então

$$\text{Tempo de duplicação} = \frac{\ln 2}{r}$$

## 3.8 Taxa Efetiva de Juros

Se o juros são compostos  $k$  vezes ao ano, a uma taxa anual de juros  $r$ , então

$$\text{Taxa efetiva de juros} = \left( 1 + \frac{r}{k} \right)^k - 1$$

Se o juros são compostos continuamente, a uma taxa anual de juros  $r$ , então

$$\text{Taxa efetiva de juros} = e^r - 1$$

## 3.9 Valor Presente

Se o juros são compostos  $k$  vezes ao ano, a uma taxa anual de juros  $r$ , o valor presente de  $S$  reais, pagável daqui a  $t$  anos é

$$P = S \left( 1 + \frac{r}{k} \right)^{-kt} \text{ reais}$$

Se o juros são compostos continuamente, a uma taxa anual de juros  $r$ , o valor presente de  $S$  reais, pagável daqui a  $t$  anos é

$$P = Se^{-rt} \text{ reais}$$