UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/∼sergio

3ª Lista de Exercícios | **Complementos de Matemática** | 15/05/2005

1ª Questão Dada as funções $a(x) = x^2 - 2x - 1$, $b(x) = -x - 1$ e $c(x) = -3x^2 - 2x - 1$

a) Calcule o "coeficiente de Newton" no ponto $x = 2$ para $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$, isto é, encontre $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ de cada função no ponto $x = 2$. $\boxed{\textit{R: } 2+h, -1 \text{ e } 14-3h}$

b) Calcule as derivadas das funções $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ no ponto $x = 2$, utilizando as propriedades das derivadas. $\boxed{\textit{R: } a'(2) = 2, b'(2) = -1 \text{ e } c'(2) = -14}$

c) Encontre as equações das retas[1] tangentes aos gráficos das funções $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ no ponto $x = 2$. $\boxed{\textit{R: } y = 2x-5, y = -x-1 \text{ e } y = -14x+11}$

2ª Questão Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $A(x) = x + \dfrac{1}{x}$ $\boxed{\textit{R: } 1 - \frac{1}{x^2}}$

b) $B(x) = \dfrac{x-1}{x^5}$ $\boxed{\textit{R: } -\frac{4x-5}{x^6}}$

c) $C(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$ $\boxed{\textit{R: } \frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x-1)^2}}}$

d) $D(x) = (x^3 - 1)e^{(x-1)}$ $\boxed{\textit{R: } (x^3+3x^2-1)e^{(x-1)}}$

e) $E(x) = ln\left(\sqrt{\dfrac{e^x}{x}}\right)$ $\boxed{\textit{R: } \frac{x-1}{2x}}$

3ª Questão Calcule as derivadas das funções abaixo nos respectivos pontos:

a) $A(x) = -2x^3 - 3x^2 + x - 1$ no ponto $x = 2$ $\boxed{\textit{R: } -35}$

b) $B(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 1$ no ponto $x = -2$ $\boxed{\textit{R: } -119}$

c) $C(x) = -x^4 - \dfrac{3}{x^3}$ no ponto $x = -1$ $\boxed{\textit{R: } 13}$

d) $D(x) = -\dfrac{1}{7}x^7 - 3x^{-2}$ no ponto $x = 1$ $\boxed{\textit{R: } 5}$

e) $E(x) = \dfrac{1}{5x^5} + \sqrt[4]{x^5} + x^{2/3}$ no ponto $x = 1$ $\boxed{\textit{R: } \frac{11}{12}}$

[1] Note que a equação da reta é dada pela expressão: $y - y_0 = m(x - x_0)$ onde (x_0, y_0) é um ponto e m é o coeficiente angular.

f) $F(x) = (x^3 - 2x)(1 + x + 2x^2)$ no ponto $x = -1$ $\boxed{\textit{R: } -1}$

g) $G(x) = \dfrac{2x+1}{x-2}$ no ponto $x = 1$ $\boxed{\textit{R: } -5}$

h) $H(x) = \dfrac{x^3 - 2x}{1 + x + 2x^2}$ no ponto $x = -1$ $\boxed{\textit{R: } \frac{5}{4}}$

i) $I(x) = \dfrac{1}{x^3} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x}$ no ponto $x = 3$ $\boxed{\textit{R: } -\frac{2}{9}}$

j) $J(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^{19}$ no ponto $x = -1$ $\boxed{\textit{R: } 0}$

k) $K(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$ no ponto $x = 1$ $\boxed{\textit{R: } \frac{1}{3}}$

l) $L(x) = 4\sqrt{\sqrt{x} - 2}$ no ponto $x = 9$ $\boxed{\textit{R: } \frac{1}{3}}$

m) $M(x) = \sqrt{e^{(x^3 - x^2 + x - 1)}}$ no ponto $x = 1$ $\boxed{\textit{R: } 1}$

n) $N(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{e^{(x-1)}}$ no ponto $x = 1$ $\boxed{\textit{R: } -\frac{2}{3}}$

4ª Questão Derive e encontre o(s) ponto(s) crítico(s) das seguintes funções :

a) $A(x) = x^3 - 9x^2 - 2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{0, 6\}}$

b) $B(x) = -2x^3 - 3x^2 + 36x + 7$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{-3, 2\}}$

c) $C(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{-2, 0, 1\}}$

d) $D(x) = (2x^2 - 3x)(x^3 - 2x^2)$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{0, 1, \frac{9}{5}\}}$

e) $E(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 - 4}$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{\pm 2, 4 \pm 2\sqrt{3}\}}$

f) $F(x) = \dfrac{x^2 - x + 6 - 1}{x^2 + 6 - 1}$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{\pm\sqrt{5}\}}$

g) $G(x) = (x^2 - 3)e^{(1-x)}$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{-1, 3\}}$

h) $H(x) = \left[ln\left(x^2 - 4x + 4\right)\right]^2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{1, 2, 3\}}$

i) $I(x) = x.e^{(-x-199)}$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{1\}}$

j) $J(x) = \ln\left[e^{(2x^2-4)^3}\right]$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{0, \pm\sqrt{2}\}}$

5ª Questão Para cada uma das funções abaixo,

- encontre o(s) ponto(s) críticos, caso existam;
- verifique em qual(is) intervalo(s) as funções são crescentes[2] e decrescentes;
- determine em qual(is) intervalo(s) as funções possuem concavidade positiva[3] (negativa);
- encontre o(s) ponto(s) de máximo e de mínimo, caso existam das funções;
- trace os gráficos das funções.[4]

a) $A(x) = 2x^2 - 4x - 6$ — *R: P.C.=*$\{1^{min}\}$ *Cres:* $\{x > 1\}$ *C.Posit:* $\mathbb{R}$

b) $B(x) = -x^2 - 2x - 2$ — *R: P.C.=*$\{-1^{max}\}$ *Cres:* $\{x < -1\}$ *C.Posit:* $\{\}$

c) $C(x) = 2x^3 - 6x$ — *R: P.C.=*$\{-1^{max}, 1^{min}\}$ *Cres:* $\{x < -1 \text{ ou } x > 1\}$ *C.Posit:* $\{x > 0\}$

d) $D(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$ — *R: P.C.=*$\{-2^{max}, 4^{min}\}$ *Cres:* $\{x < -2 \text{ ou } x > 4\}$ *C.Posit:* $\{x > 1\}$

e) $E(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 19$ — *R: P.C.=*$\{3^{max}, -1^{min}\}$ *Cres:* $\{-1 < x < 3\}$ *C.Posit:* $\{x < 1\}$

f) $F(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$ — *R: P.C.=*$\{1\}$ *Cres:* $\{\}$ *C.Posit:* $\{x < 1\}$

g) $G(x) = x^3 - x^2 + x$ — *R: P.C.=*$\{\}$ *Cres:* $\mathbb{R}$ *C.Posit:* $\{x > 1/3\}$

h) $H(x) = x^4 - 4x^3$ — *R: P.C.=*$\{0^{min}, 3\}$ *Cres:* $\{x > 3\}$ *C.Posit:* $\{x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

i) $I(x) = x^4 - 8x^2 + 2$
R: P.C.=$\{-2^{min}, 0^{max}, 2^{min}\}$ *Cres:* $\{-2 < x < 0 \text{ ou } x > 2\}$ *C.Posit:* $\{x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ ou } x > \frac{2}{3}\sqrt{3}\}$

j) $J(x) = -x^4 + 8x^3 - 1$ — *R: P.C.=*$\{0, 6^{max}\}$ *Cres:* $\{x < 0 \text{ ou } 0 < x < 6\}$ *C.Posit:* $\{0 < x < 4\}$

k) $K(x) = \dfrac{4}{x} + x$ — *R: P.C.=*$\{-2^{max}, 0, 2^{min}\}$ *Cres:* $\{x < -2 \text{ ou } x > 2\}$ *C.Posit:* $\{x > 0\}$

l) $L(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x}$ — *R: P.C.=*$\{-1^{max}, 0, 1^{min}\}$ *Cres:* $\{x < -1 \text{ ou } x > 1\}$ *C.Posit:* $\{x > 0\}$

m) $M(x) = (x^2 - 3)e^x$
R: P.C.=$\{-3^{max}, 1^{min}\}$ *Cres:* $\{x < -3 \text{ ou } x > 1\}$ *C.Posit:* $\{x < -2 - \sqrt{5} \text{ ou } x > -2 + \sqrt{5}\}$

[2] Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ é crescente, basta resolver a inequação $f'(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada primeira.

[3] Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ tem concavidade positiva, basta resolver a inequação $f''(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada segunda.

[4] Os gráficos estão na internet em *http://www.mat.ufpb.br/ sergio/provas/complementos/lista3.html*

1 Aplicações das derivadas

6ª Questão Quando se tosse, o raio da traquéia diminui de tamanho, afetando a velocidade do ar na traquéia. Sendo R o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade V e o raio r da traquéia durante a tosse é dada pela função da forma $V(r) = ar^2(R - r)$, onde a é uma constante positiva. Calcule o raio r em que é maior a velocidade do ar. *R:* $r = 2R/3$

7ª Questão Os biólogos definem o fluxo de ar na traquéia pela fórmula $F = VA$, onde V é a velocidade do ar (questão anterior) e A, a área dor circulo formado ao se seccionar a traquéia, ou seja, $A(r) = \pi r^2$. Calcule o valor de r com o qual o fluxo será maior. *R:* $r = 4R/5$

8ª Questão Deseja-se construir um tanque de base quadrada, sem tampa, que comporte 108 m^3 de água. Se o objetivo é usar a menor quantidade possível de cimento no revestimento das paredes do tanque, quais deverão ser as medidas do tanque? *R:* $6\ m \times 6\ m \times 3\ m$

9ª Questão A lei de Poiseulle afirma que a velocidade do sangue que está a r centímetros do eixo central da artéria de raio R é $V(r) = c(R^2 - r^2)$, onde c é uma constante positiva. Onde a velocidade do sangue é maior?
R: No centro da artéria $(r = 0)$

10ª Questão A taxa de contágio de uma epidemia entre os moradores de uma comunidade é proporcional ao número de moradores que ficam doentes e ao número das que não ficam doentes. Mostre que a doença contagia mais rapidamente quando metade dos moradores da comunidade já estão doentes.

11ª Questão Um cabo de eletricidade ligará uma hidrelétrica situada à margem de um rio de 900 metros de largura a uma fábrica situada na outra margem do rio, 3.000 metros abaixo da usina. O custo de instalação do cabo através do rio é R$ 500,00 por metro linear, enquanto que, em terra, custa R$ 400,00 por metro. Qual é a forma mais econômica de se instalar o cabo?
R: 1.200 metros abaixo da usina

12ª Questão Um prefeito planeja construir uma área de recreação junto à uma estrada. A área retangular, com 5.000 m^2, será cercada nos três lados não adjacentes à estrada. Qual será as dimensões dessa área e a menor quantidade de cerca necessária? *R:* $50\ m \times 100\ m$ *e* $200\ m$