



UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA

CCEN - Departamento de Matemática

<http://www.mat.ufpb.br/~sergio>

3ª Lista de Exercícios

Complementos de Matemática

15/05/2005

1ª Questão Dada as funções $a(x) = x^2 - 2x - 1$, $b(x) = -x - 1$ e $c(x) = -3x^2 - 2x - 1$

a) Calcule o “coeficiente de Newton” no ponto $x = 2$ para $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$, isto é, encontre $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ de cada função no ponto $x = 2$. R: $2 + h$, -1 e $14 - 3h$

b) Calcule as derivadas das funções $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ no ponto $x = 2$, utilizando as propriedades das derivadas. R: $a'(2) = 2$, $b'(2) = -1$ e $c'(2) = -14$

c) Encontre as equações das retas¹ tangentes aos gráficos das funções $a(x)$, $b(x)$ e $c(x)$ no ponto $x = 2$. R: $y = 2x - 5$, $y = -x - 1$ e $y = -14x + 11$

2ª Questão Calcule as derivadas das funções abaixo:

a) $A(x) = x + \frac{1}{x}$ R: $1 - \frac{1}{x^2}$

b) $B(x) = \frac{x-1}{x^5}$ R: $-\frac{4x-5}{x^6}$

c) $C(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$ R: $\frac{2x-1}{3\sqrt[3]{(x^2-x+1)^2}}$

d) $D(x) = (x^3 - 1)e^{(x-1)}$ R: $(x^3 + 3x^2 - 1)e^{(x-1)}$

e) $E(x) = \ln\left(\sqrt{\frac{e^x}{x}}\right)$ R: $\frac{x-1}{2x}$

3ª Questão Calcule as derivadas das funções abaixo nos respectivos pontos:

a) $A(x) = -2x^3 - 3x^2 + x - 1$ no ponto $x = 2$ R: -35

b) $B(x) = 3x^4 - 2x^3 + x - 1$ no ponto $x = -2$ R: -119

c) $C(x) = -x^4 - \frac{3}{x^3}$ no ponto $x = -1$ R: 13

d) $D(x) = -\frac{1}{7}x^7 - 3x^{-2}$ no ponto $x = 1$ R: 5

e) $E(x) = \frac{1}{5x^5} + \sqrt[4]{x^5} + x^{2/3}$ no ponto $x = 1$ R: $\frac{11}{12}$

¹Note que a equação da reta é dada pela expressão: $y - y_0 = m(x - x_0)$ onde (x_0, y_0) é um ponto e m é o coeficiente angular.

f) $F(x) = (x^3 - 2x)(1 + x + 2x^2)$ no ponto $x = -1$ $R: -1$

g) $G(x) = \frac{2x+1}{x-2}$ no ponto $x = 1$ $R: -5$

h) $H(x) = \frac{x^3 - 2x}{1 + x + 2x^2}$ no ponto $x = -1$ $R: \frac{5}{4}$

i) $I(x) = \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}$ no ponto $x = 3$ $R: -\frac{2}{9}$

j) $J(x) = (x^3 + x^2 + x + 1)^{19}$ no ponto $x = -1$ $R: 0$

k) $K(x) = \sqrt[3]{x^2 - x + 1}$ no ponto $x = 1$ $R: \frac{1}{3}$

l) $L(x) = 4\sqrt{\sqrt{x} - 2}$ no ponto $x = 9$ $R: \frac{1}{3}$

m) $M(x) = \sqrt{e(x^3 - x^2 + x - 1)}$ no ponto $x = 1$ $R: 1$

n) $N(x) = \frac{\sqrt[3]{x}}{e(x-1)}$ no ponto $x = 1$ $R: -\frac{2}{3}$

4ª Questão Derive e encontre o(s) ponto(s) crítico(s) das seguintes funções :

a) $A(x) = x^3 - 9x^2 - 2$ $R: P.C. = \{0, 6\}$

b) $B(x) = -2x^3 - 3x^2 + 36x + 7$ $R: P.C. = \{-3, 2\}$

c) $C(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ $R: P.C. = \{-2, 0, 1\}$

d) $D(x) = (2x^2 - 3x)(x^3 - 2x^2)$ $R: P.C. = \{0, 1, \frac{9}{5}\}$

e) $E(x) = \frac{x^2 - x}{x^2 - 4}$ $R: P.C. = \{\pm 2, 4 \pm 2\sqrt{3}\}$

f) $F(x) = \frac{x^2 - x + 6 - 1}{x^2 + 6 - 1}$ $R: P.C. = \{\pm\sqrt{5}\}$

g) $G(x) = (x^2 - 3)e^{(1-x)}$ $R: P.C. = \{-1, 3\}$

h) $H(x) = \left[\ln(x^2 - 4x + 4) \right]^2$ $R: P.C. = \{1, 2, 3\}$

i) $I(x) = x.e^{(-x-199)}$ $R: P.C. = \{1\}$

j) $J(x) = \ln \left[e(2x^2 - 4)^3 \right]$ $R: P.C. = \{0, \pm\sqrt{2}\}$

5ª Questão Para cada uma das funções abaixo,

- encontre o(s) ponto(s) críticos, caso existam;
- verifique em qual(is) intervalo(s) as funções são crescentes² e decrescentes;
- determine em qual(is) intervalo(s) as funções possuem concavidade positiva³ (negativa);
- encontre o(s) ponto(s) de máximo e de mínimo, caso existam das funções;
- trace os gráficos das funções.⁴

a) $A(x) = 2x^2 - 4x - 6$

$R: P.C. = \{1^{min}\}$ Cres: $\{x > 1\}$ C.Posit: \mathbb{R}

b) $B(x) = -x^2 - 2x - 2$

$R: P.C. = \{-1^{max}\}$ Cres: $\{x < -1\}$ C.Posit: $\{\}$

c) $C(x) = 2x^3 - 6x$

$R: P.C. = \{-1^{max}, 1^{min}\}$ Cres: $\{x < -1 \text{ ou } x > 1\}$ C.Posit: $\{x > 0\}$

d) $D(x) = x^3 - 3x^2 - 24x$

$R: P.C. = \{-2^{max}, 4^{min}\}$ Cres: $\{x < -2 \text{ ou } x > 4\}$ C.Posit: $\{x > 1\}$

e) $E(x) = -x^3 + 3x^2 + 9x - 19$

$R: P.C. = \{3^{max}, -1^{min}\}$ Cres: $\{-1 < x < 3\}$ C.Posit: $\{x < 1\}$

f) $F(x) = -x^3 + 3x^2 - 3x$

$R: P.C. = \{1\}$ Cres: $\{\}$ C.Posit: $\{x < 1\}$

g) $G(x) = x^3 - x^2 + x$

$R: P.C. = \{\}$ Cres: \mathbb{R} C.Posit: $\{x > 1/3\}$

h) $H(x) = x^4 - 4x^3$

$R: P.C. = \{0^{min}, 3\}$ Cres: $\{x > 3\}$ C.Posit: $\{x < 0 \text{ ou } x > 2\}$

i) $I(x) = x^4 - 8x^2 + 2$

$R: P.C. = \{-2^{min}, 0^{max}, 2^{min}\}$ Cres: $\{-2 < x < 0 \text{ ou } x > 2\}$ C.Posit: $\{x < -\frac{2}{3}\sqrt{3} \text{ ou } x > \frac{2}{3}\sqrt{3}\}$

j) $J(x) = -x^4 + 8x^3 - 1$

$R: P.C. = \{0, 6^{max}\}$ Cres: $\{x < 0 \text{ ou } 0 < x < 6\}$ C.Posit: $\{0 < x < 4\}$

k) $K(x) = \frac{4}{x} + x$

$R: P.C. = \{-2^{max}, 0, 2^{min}\}$ Cres: $\{x < -2 \text{ ou } x > 2\}$ C.Posit: $\{x > 0\}$

l) $L(x) = \frac{x^2 + 1}{x}$

$R: P.C. = \{-1^{max}, 0, 1^{min}\}$ Cres: $\{x < -1 \text{ ou } x > 1\}$ C.Posit: $\{x > 0\}$

m) $M(x) = (x^2 - 3)e^x$

$R: P.C. = \{-3^{max}, 1^{min}\}$ Cres: $\{x < -3 \text{ ou } x > 1\}$ C.Posit: $\{x < -2 - \sqrt{5} \text{ ou } x > -2 + \sqrt{5}\}$

²Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ é crescente, basta resolver a inequação $f'(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada primeira.

³Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ tem concavidade positiva, basta resolver a inequação $f''(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada segunda.

⁴Os gráficos estão na internet em <http://www.mat.ufpb.br/sergio/provas/complementos/lista3.html>

1 Aplicações das derivadas

6ª Questão Quando se tosse, o raio da traquéia diminui de tamanho, afetando a velocidade do ar na traquéia. Sendo R o raio normal da traquéia, a relação entre a velocidade V e o raio r da traquéia durante a tosse é dada pela função da forma $V(r) = ar^2(R - r)$, onde a é uma constante positiva. Calcule o raio r em que é maior a velocidade do ar.

$$R: r = 2R/3$$

7ª Questão Os biólogos definem o fluxo de ar na traquéia pela fórmula $F = VA$, onde V é a velocidade do ar (questão anterior) e A , a área do círculo formado ao se seccionar a traquéia, ou seja, $A(r) = \pi r^2$. Calcule o valor de r com o qual o fluxo será maior.

$$R: r = 4R/5$$

8ª Questão Deseja-se construir um tanque de base quadrada, sem tampa, que comporte 108 m^3 de água. Se o objetivo é usar a menor quantidade possível de cimento no revestimento das paredes do tanque, quais deverão ser as medidas do tanque?

$$R: 6 \text{ m} \times 6 \text{ m} \times 3 \text{ m}$$

9ª Questão A lei de Poiseulle afirma que a velocidade do sangue que está a r centímetros do eixo central da artéria de raio R é $V(r) = c(R^2 - r^2)$, onde c é uma constante positiva. Onde a velocidade do sangue é maior?

$$R: \text{No centro da artéria } (r = 0)$$

10ª Questão A taxa de contágio de uma epidemia entre os moradores de uma comunidade é proporcional ao número de moradores que ficam doentes e ao número das que não ficam doentes. Mostre que a doença contagia mais rapidamente quando metade dos moradores da comunidade já estão doentes.

11ª Questão Um cabo de eletricidade ligará uma hidrelétrica situada à margem de um rio de 900 metros de largura a uma fábrica situada na outra margem do rio, 3.000 metros abaixo da usina. O custo de instalação do cabo através do rio é R\$ 500,00 por metro linear, enquanto que, em terra, custa R\$ 400,00 por metro. Qual é a forma mais econômica de se instalar o cabo?

$$R: 1.200 \text{ metros abaixo da usina}$$

12ª Questão Um prefeito planeja construir uma área de recreação junto à uma estrada. A área retangular, com 5.000 m^2 , será cercada nos três lados não adjacentes à estrada. Qual será as dimensões dessa área e a menor quantidade de cerca necessária?

$$R: 50 \text{ m} \times 100 \text{ m e } 200 \text{ m}$$