UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

-3ª Lista/Roteiro — Cálculo Diferencial e Integral I

Prof.: *Sérgio* Data: *24/Nov/2014* Turno: *Tarde*
Curso: Nome:

Período: *14.2* Turma: *2* Matrícula:

1ª Questão Determine, para as funções $a(x) = x - 1$, $b(x) = x^2 + 2x - 3$, $c(x) = x^3 - 3x$, $d(x) = e^{x^2} - ex^2$ e $f(x) = \cos(x)^2 + \operatorname{sen}(x)$ (no intervalo $I_f = [0, 2\pi]$), os seguintes itens:

a) O(s) ponto(s) crítico(s), caso exista(m).

$\boxed{P_a = \emptyset,\ P_b = (-1,-4)}$

$\boxed{P_{c_1} = (-1,2) \text{ e } P_{c_2} = (1,-2),\ P_{d_1} = (-1,0),\ P_{d_2} = (0,1) \text{ e } P_{d_3} = (1,0)}$

$\boxed{P_{f_1} = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{5}{4}\right),\ P_{f_2} = \left(\frac{5\pi}{6}, \frac{5}{4}\right),\ P_{f_3} = \left(\frac{\pi}{2}, 1\right) \text{ e } P_{f_4} = \left(\frac{3\pi}{2}, -1\right)}$

b) Em qual(is) intervalo(s) são crescente (e decrescente).

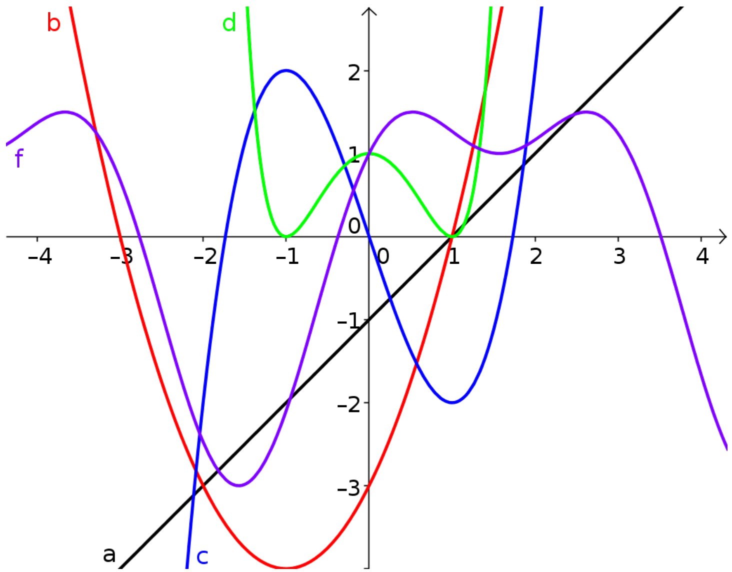
$\boxed{\textit{Crescente: } I_a = \mathbb{R},\ I_b = (-1,\infty),\ I_c = (-\infty,-1)\cup(1,\infty),\ I_d = (-1,0)\cup(1,\infty) \text{ e } I_f = (0,\tfrac{\pi}{6})\cup(\tfrac{\pi}{2},\tfrac{5\pi}{6})}$

c) O(s) ponto(s) de máximo/mínimo (locais/absolutos) das funções, caso exista(m). Use a segunda derivada.

$\boxed{\textit{Máx: } M_a = \emptyset,\ M_b = \emptyset,\ M_c = (-1,2),\ M_d = (0,1),\ M_{f_1} = (\tfrac{\pi}{6},\tfrac{5}{4}) \text{ e } M_{f_1} = (\tfrac{5\pi}{6},\tfrac{5}{4})}$

$\boxed{\textit{Mim: } m_a = \emptyset\ , m_b(-1,-4),\ m_c = (1,-2),\ m_{d_1} = (-1,0),\ m_{d_2} = (1,0),\ m_{f_1} = (\tfrac{\pi}{2},1) \text{ e } m_{f_2} = (\tfrac{3\pi}{2},-1)}$

d) Esboce os gráfico das funções.



2ª Questão Verifique, justificando, quais das funções abaixo, saisfazem o **Teorema de Rolle**, no intervalo dado, e em caso afirmativo, determine o(s) valores da(s) constante(s) existente(s) dada pelo teorema.

a) $g_a(x) = x^3 + 3x^2$ em $[-2, 1]$ $\boxed{c = 0}$

b) $g_b(x) = e^{x^2} + x^2$ em $[-1, 1]$ $\boxed{c = 0}$

c) $g_c(x) = \cos(x^2 - \pi x)$ em $[0, \pi]$ $\boxed{c = \frac{\pi}{2}}$

d) $g_d(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$ em $[-\pi, \pi]$ $\boxed{c_1 = -\frac{\pi}{4} \text{ e } c_2 = \frac{3\pi}{4}}$

e) $g_e(x) = \dfrac{1}{x^2}$ em $[-1, 1]$ $\boxed{\textit{Não é contínua em } x = 0}$

f) $g_f(x) = \operatorname{sen}(x) - \cos(x)$ em $[0, \pi]$ $\boxed{g_f(0) \neq g_f(\pi)}$

3ª Questão Verifique, justificando, quais das funções abaixo, saisfazem o **Teorema do Valor Intermediário**, no intervalo dado, e em caso afirmativo, determine o(s) valores da(s) constante(s) existente(s) dada pelo teorema.

a) $h_a(x) = x^2 + 4x - 1$ em $[0, 1]$ $\boxed{c = \frac{1}{2}}$

b) $h_b(x) = x^3 - 1$ em $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$ $\boxed{c_1 = -1 \text{ e } c_2 = 1}$

c) $h_c(x) = \dfrac{1}{x}$ em $[1, 4]$ $\boxed{c = 2}$

d) $h_d(x) = \ln(x) + x$ em $[1, e]$ $\boxed{c = e - 1}$

e) $h_e(x) = x - \operatorname{sen}(x)$ em $[0, \pi]$ $\boxed{c = \frac{\pi}{2}}$

f) $h_f(x) = |x^2 - 1|$ em $[0, 2]$ $\boxed{\textit{Não é derivável em } x = 1}$

4ª Questão Calcule os limites abaixo. Use a regra L'Hôspital, quando necessário, indicando qual o tipo da ideterminação:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^2 - x}{x^2 + x - 2}$ $\boxed{\textit{Tipo: } \frac{0}{0},\ L = \frac{1}{3}}$

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x^3}$ $\boxed{\textit{Tipo: } \frac{0}{0},\ L = \infty}$

c) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ $\boxed{\textit{Tipo: } \frac{0}{0},\ L = \frac{1}{2}}$

d) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{1 + \cos(\pi x)}$ $\boxed{\textit{Tipo: } \frac{0}{0},\ L = -\frac{1}{\pi^2}}$

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(x)}{1/x}$ $\boxed{\textit{Tipo: } \frac{-\infty}{\infty},\ L = 0}$

f) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x)$ $\boxed{\textit{Tipo: } 0\cdot\infty,\ L = 0}$

g) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^{-x}$ $\boxed{\textit{Tipo: } 0\cdot\infty,\ L = 0}$

h) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x - \ln(x)$ $\boxed{\textit{Tipo: } \infty - \infty,\ L = \infty}$

i) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^{1/x}$ $\boxed{\textit{Tipo: } \infty^0,\ L = 1}$

Alguns Teoremas

Teorema 1 (Rolle) *Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$, derivável no intervalo (a,b) e $f(a) = f(b)$, então existe $c \in (a,b)$, tal que $f'(c) = 0$*

Teorema 2 (Teorema do Valor Médio) *Seja $f(x)$ uma função contínua no intervalo $[a,b]$, derivável no intervalo (a,b), então existe $c \in (a,b)$, tal que $f'(c) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$, ou de outra forma, $f(b) - f(a) = f'(c) = (b-a)$*

Teorema 3 (Regra de L'Hôspital) *Sejam $f(x)$ e $g(x)$ funções deriváveis no ponto $x = a$, com $g'(x) \neq 0$ se: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \pm\infty$*

Então $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ se tal limite existir (ou for $\pm\infty$).

Tabela de Derivadas [1]

a) $[k]' = k$

b) $\left[x^k\right]' = k.x^{(k-1)}$

c) $[g \pm h]' = g' \pm h'$

d) $[k.g(x)]' = k.g'(x)$

e) $[g.h]' = g'.h + g.h'$

f) $\left[\dfrac{g}{h}\right]' = \dfrac{g'.h - g.h'}{h^2}$

g) $[e^x]' = e^x$

h) $[b^x]' = b^x \ln(b)$ [2]

i) $[\ln(x)]' = \dfrac{1}{x}$

j) $[\ln_b(x)]' = \dfrac{1}{x \ln(b)}$ [3]

k) $[\mathrm{sen}(x)]' = \cos(x)$

l) $[\cos(x)]' = -\,\mathrm{sen}(x)$

m) $[\mathrm{tg}(x)]' = \mathrm{cotg}^2(x)$

n) $[\mathrm{cotg}(x)]' = -\,\mathrm{cossec}^2(x)$

o) $[\mathrm{cossec}(x)]' = -\,\mathrm{cossec}(x)\,\mathrm{cotg}(x)$

p) $[\sec(x)]' = \sec(x)\,\mathrm{tg}(x)$

q) $\left[\mathrm{sen}^{-1}(x)\right]' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ [4]

r) $\left[\cos^{-1}(x)\right]' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

s) $\left[\mathrm{tg}^{-1}(x)\right]' = \dfrac{1}{1+x^2}$

Tabela de Relações Trigonométricas

a) $\cos(-x) = \cos x$

b) $\mathrm{sen}(-x) = -\,\mathrm{sen}\, x$

c) $\mathrm{tg}\, x = \dfrac{\mathrm{sen}\, x}{\cos x}$

d) $\sec = \dfrac{1}{\cos x}$

e) $\mathrm{cossec}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{sen}\, x}$

f) $\mathrm{cotg}\, x = \dfrac{1}{\mathrm{tg}\, x}$

g) $\mathrm{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$

h) $1 + \mathrm{tg}^2 x = \sec^2 x$

i) $\mathrm{sen}(a \pm b) = \mathrm{sen}\, a \cos b \pm \cos a\, \mathrm{sen}\, b$

j) $\cos(a \pm b) = \cos a \cos b \mp \mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b$

k) $\mathrm{sen}\, a\, \mathrm{sen}\, b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) - \cos(a+b)]$

l) $\cos a \cos b = \dfrac{1}{2}[\cos(a-b) + \cos(a+b)]$

---

[1] Considere g e h funções, g' e h' derivadas de g e h, e as constantes $k \in \mathbb{R}$, $b > 0$ e $b \neq 1$

[2] Mudança de base: $b^x = e^{\ln(b^x)} = e^{x \ln(b)}$

[3] Mudança de base de lnarítmo: $\ln_b(x) = \dfrac{\ln(x)}{\ln(b)}$

[4] Função inversa do sen: $\mathrm{sen}^{-1}(x) = \mathrm{arcsen}(x)$ é o arco cujo o seno é x.