Notas de Aulas

MATEMÁTICA BÁSICA II

Prof. Sérgio de Albuquerque Souza
Departamento de Matemática

6 de fevereiro de 2003

Sumário

Capítulo 1

Revisão

1.1 Regras da derivação

1.1.1 Potências de x

Se $f(x) = x^n$ com $n \in R$, então

$$\boxed{f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = n.x^{n-1}}$$

Exemplo 1.1 *Se* $f(x) = x^5$ *então* $f'(x) = 5.x^{5-1} = 5x^4$

Exemplo 1.2 *Se* $f(x) = \sqrt{x^3} = x^{3/2}$ *então:* $f'(x) = \frac{3}{2}.x^{3/2-1} = \frac{3x^{1/2}}{2} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$

1.1.2 Constante multiplicada por uma função

Se $f(x) = K.g(x)$ com $K \in R$, então:

$$\boxed{f(x) = K.g(x) \Longrightarrow f'(x) = K.g'(x)}$$

Exemplo 1.3 *Se* $f(x) = 3.x^4$ *então* $f'(x) = 3.[x^4]' = 3.(4x^3) = 12x^3$

Exemplo 1.4 *Se* $f(x) = \frac{3}{2x^2} = \frac{3}{2}x^{-2}$ *então:*

$$f'(x) = \frac{3}{2}.[x^{-2}]' = \frac{3}{2}.(-2x^{-3}) = -\frac{3}{x^3}$$

1.1.3 Soma ou diferença de duas funções

Se $f(x) = g(x) \pm h(x)$, então

$$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \Longrightarrow f'(x) = g'(x) \pm h'(x)}$$

Exemplo 1.5 *Se* $f(x) = 4x^2 + 3x$ *então* $f'(x) = [4x^2]' + [3x]' = 8x + 3$

Exemplo 1.6 *Se* $f(x) = x - \frac{1}{x} = x - x^{-1}$ *então* $f'(x) = [x]' - [x^{-1}]' = 1 + \frac{1}{x^2}$

1.1.4 Produto de duas funções

Se $f(x) = g(x).h(x)$, então

$$\boxed{f(x) = g(x).h(x) \Longrightarrow f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)}$$

Exemplo 1.7 *Se* $f(x) = (2x^2 - 1)(x + 2)$ *então considere* $g(x) = 2x^2 - 1$ *e* $h(x) = x + 2$*, logo*

$$f'(x) = (\underbrace{4x}_{g'})(\underbrace{x+2}_{h}) + (\underbrace{2x^2-1}_{g})(\underbrace{1}_{h'})$$

$$f'(x) =$$

Exemplo 1.8 *Se* $f(x) = (5x^3 - x^2)(x^2 - x - 2)$ *então considere* $g(x) = 5x^3 - x^2$ *e* $h(x) = x^2 - x - 2$*, logo*

$$f'(x) = (\underbrace{15x^2-2x}_{g'})(\underbrace{x^2-x-2}_{h}) + (\underbrace{5x^3-x^2}_{g})(\underbrace{2x-1}_{h'})$$

$$f'(x) =$$

1.1.5 Quociente de duas funções

Se $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ com $h(x) \neq 0$, então

$$\boxed{f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Longrightarrow f'(x) = \frac{g'(x).h(x) - g(x).h'(x)}{[h(x)]^2}}$$

Exemplo 1.9 *Se* $f(x) = \dfrac{2x^2 - 1}{x + 2}$ *então considere* $g(x) = 2x^2 - 1$ *e* $h(x) = x + 2$*, logo*

$$f'(x) = \frac{(\overbrace{4x}^{g'})(\overbrace{x+2}^{h}) - (\overbrace{2x^2-1}^{g})(\overbrace{1}^{h'})}{\underbrace{(x+2)^2}_{h^2}}$$

$$f'(x) = \frac{}{(x+2)^2}$$

Exemplo 1.10 *Se* $f(x) = \dfrac{5x^3 - x^2}{x^2 - x - 2}$ *então considere* $g(x) = 5x^3 - x^2$ *e* $h(x) = x^2 - x - 2$*, logo*

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(15x^2 - 2x)}^{g'}\overbrace{(x^2 - x - 2)}^{h} - \overbrace{(5x^3 - x^2)}^{g}\overbrace{(2x - 1)}^{h'}}{\underbrace{(x^2 - x - 2)^2}_{h^2}}$$

$$f'(x) = \frac{}{(x^2 - x - 2)^2}$$

1.1.6 Função exponencial

Se $f(x) = e^x$ com $e = 2,$, então

$$\boxed{f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x}$$

Exemplo 1.11 *Se* $f(x) = 4e^x$ *então* $f'(x) = 4[e^x]' = 4e^x$

Exemplo 1.12 *Se* $f(x) = 4x^2e^x$ *então considere* $g(x) = 4x^2 - 1$ *e* $h(x) = e^x$, *logo*

$$f'(x) = (\underbrace{4x}_{g'})(\underbrace{e^x}_{h}) + (\underbrace{4x^2}_{g})(\underbrace{e^x}_{h'})$$

$$f'(x) = (4x + 4x^2)e^x$$

1.1.7 Função logarítmica

Se $f(x) = \ln x$ com $K \in R$, então

$$\boxed{f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \frac{1}{x}}$$

Exemplo 1.13 *Se* $f(x) = 5\ln x$ *então* $f'(x) = 4[\ln x]' = 4\frac{1}{x} = \frac{4}{x}$

Exemplo 1.14 *Se* $f(x) = e^x \ln x$ *então considere* $g(x) = e^x$ *e* $h(x) = \ln x$, *logo*

$$f'(x) = (\underbrace{e^x}_{g'})(\underbrace{\ln x}_{h}) + (\underbrace{e^x}_{g})(\underbrace{\frac{1}{x}}_{h'})$$

$$f'(x) = (\ln x + \frac{1}{x})e^x$$

Observação 1.1 $\ln x = \log_e x$

Observação 1.2 $\log_b a = \frac{\log_e a}{\log_e b} = \frac{\ln a}{\ln b}$

1.1.8 Funções compostas (Regra da cadeia)

Se $f(x) = g[h(x)]$, então

$$\boxed{f(x) = g[h(x)] \Longrightarrow f'(x) = g'[h(x)].h'(x)}$$

Exemplo 1.15 *Se $f(x) = (x^3 - 2x)^7$ então considere $g(x) = x^7$ e $h(x) = x^3 - 2x$, note que $f(x) = g[h(x)]$, portanto*

$$f'(x) = \underbrace{7(x^3 - 2x)^6}_{g'[h(x)]} . \underbrace{(3x^2 - 2)}_{h'(x)}$$

$$f'(x) = (21x^2 - 14)(x^3 - 2x)^6$$

A regra da cadeia pode ser usada para funções definida por várias composições, bastando derivar reutilizando a regra da cadeia seguidas vezes.

Exemplo 1.16 *Se $f(x) = [\ln(x^3 - 2x)]^7$ então considere $g(x) = x^7$, $h(x) = \ln x$ e $i(x) = x^3 - 2x$, note que $f(x) = g\{h[i(x)]\}$, portanto*

$$f'(x) = \underbrace{7[\ln(x^3 - 2x)]^6}_{g'\{h[i(x)]\}} . \underbrace{\left(\frac{1}{3x^2 - 2x}\right)}_{h'[i(x)]} . \underbrace{(6x - 2)}_{i'(x)}$$

$$f'(x) = \frac{7(6x - 2)[\ln(x^3 - 2x)]^6}{3x^2 - 2x}$$

Desafio: Derive a seguinte função: $f(x) = \dfrac{\sqrt{[\ln(x^3 - 4x)]^3}}{2x^3 e^{2x^3 - \sqrt{x}}}$

Capítulo 2

Integrais

2.1 Primitivas

Antes de iniciar propriamente as integrais e as propriedades, iremos calcular alguns exemplos de primitivas, apenas com as propriedades das derivadas.

Definição 2.1 *Diremos que uma função $F(x)$ é uma* **primitiva** *da função $f(x)$, quando:*

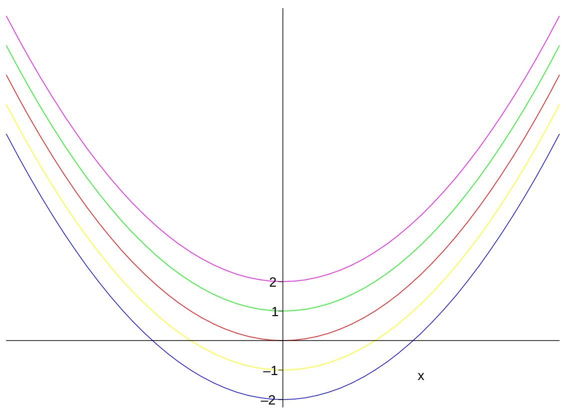
$$F'(x) = f(x)$$

Exercício 2.1 *Encontre as primitivas da função $f(x) = 2x$*

Solução 2.1 *Neste caso, nota-se facilmente que $F_1(x) = x^2 + 1$ e $F_2(x) = x^2 - 5$ são primitivas de $f(x)$ e que para qualquer constante K, a função $F(x) = x^2 + K$ também é uma primitiva de $f(x)$.*

Observação 2.1 *Se $F_1(x)$ e $F_2(x)$ são primitivas de uma função $f(x)$, então $F_1(x) = F_2(x) + K$, onde K é uma constante.*

Observação 2.2 *Note que para cada constante K existe uma primitiva, isto graficamente, significa que existem infinitas curvas que representam as primitivas de $f(x)$.*



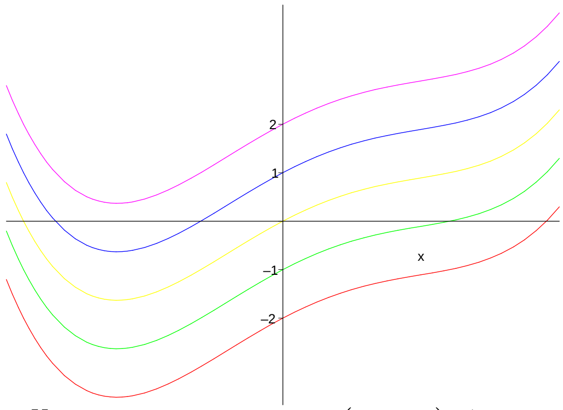
Exemplo 2.1 *Determinar a função* $f(x)$ *tal que* $f'(x) = 4x^3 - 2x^3 - 3$

Exemplo 2.2 $F(x) = 3x^4 - 2x^2 - 4$ *é uma primitiva de* $f(x) = 12x^3 - 4x$.

Exercício 2.2 *Encontre as primitivas da função* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$

Solução 2.2 *Note que, para se encontrar uma primitiva de* $f(x)$ *a função* $F(x)$, *neste caso, tem que ser uma função polinomial do quarto grau* $F(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + K$, *portanto* $F'(x) = 4ax^3 + 3bx^2 + 2cx + d$ *deve ser igual a* $f(x)$, *logo:* $4a = 3$, $3b = -2$, $2c = -2$ *e* $d = 2$ *ou seja,* $a = \frac{3}{4}$, $b = -\frac{2}{3}$, $c = -1$ *e* $d = 2$, *donde* $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + K$.

Graficamente temos várias curvas que representam as primitivas de $f(x)$.



Portanto ao se escolher um ponto $P = (x_0, y_0)$ (uma condição) a primitiva fica unicamente determinada.

Exemplo 2.3 *Encontrar a primitiva da função* $f(x) = 3x^3 - 2x^2 - 2x + 2$ *no ponto* $P = (1, 2)$

Solução 2.3 *Como* $F(x) = \frac{3}{4}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - x^2 + 2x + K$ *são as primitivas de* $f(x)$, *para determinar a primitiva que passa pelo ponto* $P = (1, 2)$, *basta substituir o ponto na primitiva, isto é,* $2 = F(1) = \frac{3}{4}(1)^4 - \frac{2}{3}(1)^3 - (1)^2 + 2(1) + K$, *donde resulta:* $K =$

2.2 Integrais Indefinidas

A **integral indefinida** de uma função $f(x)$, é uma primitiva de $f(x)$, denotado por

$$\int f(x)dx = F(x) + K$$

onde $\int$ é o sinal de integração (lê-se *integral de*), dx indica que x é a variável a ser considerada.

Temos algumas regras de integração, de fácil obtenção:

2.2.1 Potências de x

Se $f(x) = x^n$ onde $n \neq -1$, então:

$$\boxed{f(x) = x^n \Longrightarrow \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + K}$$

Exemplo 2.4 $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + K = \frac{x^6}{6} + K$

Exemplo 2.5 $\int \sqrt{x^3} dx = \int x^{3/2} dx = \frac{x^{3/2+1}}{3/2+1} + K = \frac{x^{5/2}}{5/2} + K = \frac{2\sqrt{x^5}}{5} + K$

2.2.2 Caso x^{-1}

Se $f(x) = \frac{1}{x}$, então:

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{x} \Longrightarrow \int \frac{1}{x} dx = \int x^{-1} dx = \ln|x| + K}$$

2.2.3 Constante multiplicada por uma função

Se $f(x) = c.g(x)$ onde c é uma constante qualquer, então:

$$\boxed{f(x) = c.g(x) \Longrightarrow \int c.f(x)dx = c.\int f(x)dx}$$

2.2.4 Soma ou diferença de duas funções

Se $f(x) = g(x) \pm h(x)$, então:

$$\boxed{f(x) = g(x) \pm h(x) \Longrightarrow \int [f(x) \pm g(x)dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx}$$

2.2.5 Função exponencial

Se $f(x) = e^x$, então:

$$\boxed{f(x) = e^x \Longrightarrow \int e^x dx = e^x + K}$$

Exemplo 2.6 $\int 3x^3 - 4e^x + 1dx = 3\int x^3dx - 4\int e^x dx + \int 1dx =$
$= 3\left(\frac{x^4}{4} + K_1\right) + 4\left(e^x + K_2\right) + \left(\frac{x^{0+1}}{0+1} + K_3\right) =$
$= \frac{3x^4}{4} + 4e^x + x + \overbrace{(3K_1 - 4K_2 + K_3)}^{=K}$

2.2.6 Integração de produtos e quociente

Não existe uma regra específica para o produto ou quociente de duas funções. Eventualmente será possível reescrever a integral de uma forma que possa ser integrado pelas regras anteriores.

Exemplo 2.7 $\int \sqrt{x}(x^3 - 4x - 2)dx = \int x^{1/2}(x^3 - 4x - 2)dx =$
$= \int x^{7/2} - 4x^{3/2} - 2x^{1/2}dx =$ *resolva usando as regras anteriores.*

Exemplo 2.8 $\int \frac{5x^6 - 4x^2 - 3}{x^3}dx = \int \frac{5x^6}{x^3} - \frac{4x^2}{x^3} - \frac{3}{x^3}dx =$
$= \int 5x^3 - \frac{4}{x} - 3x^{-3}dx =$ *resolva usando as regras anteriores.*

2.2.7 Integração por substituição

A idéia dessa regra, é usar a regra da cadeia para uma determinada função, usando para isso uma substituição adequada, tornando a integral mais simples do que a integral original.

Exemplo 2.9 *Calcule a integral* $\int 9(x^3 - 3x + 4)^8(3x^2 - 3)dx$.

Solução 2.4 *Considerando* $u(x) = x^3 - 3x + 4$ *temos* $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3x^2 - 3$ *ou seja,* $du = (3x^2 - 3)dx$*, logo:*

$$\int 9\underbrace{(x^3 - 3x + 4)}_{u}{}^8\underbrace{(3x^2 - 3)dx}_{du} = \int 9u^8du = u^9 + K = \underbrace{(x^3 - 3x + 4)}_{u}{}^9 + K$$

Exemplo 2.10 *Calcule a integral* $\int \frac{3x^2 - 3}{x^3 - 3x + 4}dx$.

Solução 2.5 *Considerando* $u(x) = x^3 - 3x + 4$ *temos* $u'(x) = \frac{du}{dx} = 3x^2 - 3$ *ou seja* $du = (3x^2 - 3)dx$*, logo:*

$$\int \frac{3x^2-3}{x^3-3x+4}dx = \int \frac{1}{\underbrace{x^3-3x+4}_{u}} \overbrace{(3x^2-3)dx}^{du} =$$

$$= \int \frac{1}{u}du = \ln|u| + K = \ln|\underbrace{(x^3-3x+4)}_{u}| + K$$

Exemplo 2.11 *Calcule a integral* $\int \frac{x}{x-1}dx$.

Solução 2.6 *Considerando* $u(x) = x-1$ *temos* $u'(x) = \frac{du}{dx} = 1$ *ou seja* $du = dx$*, logo:*

$$\int \frac{x}{x-1}dx = \int \frac{x}{\underbrace{x-1}_{u}} \overbrace{dx}^{du} = \int \frac{u+1}{u}du = \int 1 + \frac{1}{u}du =$$

$$= u + \ln|u| + K = \underbrace{x-1}_{u} + \ln|\underbrace{x-1}_{u}| + K$$

Exemplo 2.12 *Calcule a integral* $\int x\ln(x^2+5)dx$.

Solução 2.7 *Considerando* $u(x) = x^2-5$ *temos* $u'(x) = \frac{du}{dx} = 2x$ *ou seja* $\frac{du}{2} = xdx$*, logo:*

$$\int x\ln(x^2+5)dx = \int \ln\underbrace{x^2+5}_{u} \overbrace{xdx}^{du/2} = \int \ln u \frac{du}{2} = \frac{1}{2}\int \ln u du = ?^1$$

2.2.8 Integração por partes

Na propriedade da regra do produto (ver 1.1.4) temos:

$$g(x).h'(x) = [g(x)h(x)]' - g'(x)h(x)$$

$$\Longrightarrow \int g(x).h'(x)dx = \int [g(x)h(x)]'dx - \int g'(x)h(x)dx$$

[1] Continua na próxima seção

$$\int g(x).h'(x)dx = g(x)h(x) - \int g'(x)h(x)dx$$

Exemplo 2.13 *Calcule* $\int xe^x dx$

Solução 2.8 *Escolhendo* $g(x) = x$ *e* $h'(x) = e^x$, *temos* $g'(x) = 1$ *e* $h(x) = e^x$, *portanto:*

$$\int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{h'(x)}dx = \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{e^x}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)}\underbrace{e^x}_{h(x)}dx = xe^x - e^x + K = (x-1)e^x + K$$

Note que fazendo a escolha $g(x) = e^x$ e $h'(x) = x$, temos $g'(x) = e^x$ e $h(x) = \frac{x^2}{2}$, portanto:

$$\int \underbrace{e^x}_{g(x)}\underbrace{x}_{h'(x)}dx = \underbrace{e^x}_{g(x)}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{h(x)} - \int \underbrace{e^x}_{g'(x)}\underbrace{\frac{x^2}{2}}_{h(x)}dx = xe^x - (\text{integral mais complicada})$$

Portanto a escolha deve sempre ter como objetivo simplificar a integral, deixando mais simples que a integral original.

Exemplo 2.14 *Calcule* $\int x\sqrt{x+5}dx$

Solução 2.9 *Escolhendo* $g(x) = x$ *e* $h'(x) = \sqrt{x+5}$, *temos* $g'(x) = 1$ *e* $h(x) = \frac{2}{3}(x+5)^{3/2}$, *portanto:*

$$\int \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{\sqrt{x+5}}_{h'(x)}dx =$$

$$= \underbrace{x}_{g(x)}\underbrace{\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}}_{h(x)} - \int \underbrace{1}_{g'(x)}\underbrace{\frac{2}{3}(x+5)^{3/2}}_{h(x)}dx = \frac{2x\sqrt{x+5}}{3} - \frac{4}{15}(x+5)^{5/2} + K$$

Exemplo 2.15 *Calcule* $\int \ln x dx$

Solução 2.10 *Escolhendo* $g(x) = \ln x$ *e* $h'(x) = 1$, *temos* $g'(x) = \frac{1}{x}$ *e* $h(x) = x$, *portanto:*

$$\int \underbrace{\ln x}_{g(x)} \underbrace{1}_{h'(x)} dx = \underbrace{\ln x}_{g(x)} \underbrace{x}_{h(x)} - \int \underbrace{\frac{1}{x}}_{g'(x)} \underbrace{x}_{h(x)} dx = x \ln x - \int 1 dx = x \ln x - x + K$$

Exemplo 2.16 *Terminando o exemplo 2.12, temos*

$$\int x \ln(x^2+5) dx = \frac{1}{2} \int \ln u du = \frac{1}{2}(u \ln u - u) + K =$$
$$= \frac{1}{2}(x^2+5)\ln(x^2+5) - \frac{1}{2}(x^2+5) + K$$

2.3 Aplicações

2.3.1 Desvalorização

Exemplo 2.17 *O preço de revenda de uma certa máquina decresce a uma taxa que varia com o tempo de uso. Quando a máquina tinha t anos de uso, a taxa de variação do seu valor era* $200(t-10)$ *reais por ano. Se a máquina foi comprada por R\$ 12.000,00, quanto valerá 10 anos depois?*

Solução 2.11 *Seja* $R(t)$ *o preço de revenda daqui a t anos. Note que:*

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = 200(t-10) = 200t - 2000$$

logo,

$$R(t) = \int 200t - 2000 dt = 200\frac{t^2}{2} - 2000t + C = 100t^2 - 2000t + C$$

como a máquina foi comprada por R\$ 12.000,00, ou seja, para $t = 0$, *temos que* $C = 12.000$, *portanto daqui a 10 anos a máquina valerá:*

$$R(10) = 100(10)^2 - 2000(10) + 12000 = R\$\ 2.000,00$$

Exemplo 2.18 *O preço de revenda de uma certa máquina decresce a uma taxa que varia com o tempo de uso. Quando a máquina tinha t anos de uso, a taxa de variação do seu valor era* $-960e^{-t/5}$ *reais por ano. Se a máquina foi comprada por R\$ 5.000,00, quanto valerá 10 anos depois?*

Solução 2.12 *Seja $R(t)$ o preço de revenda daqui a t anos. Note que:*

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = -960e^{-t/5}$$

logo,

$$R(t) = \int -960e^{-t/5}dt = \int 4800e^{u}du = 4800e^{u} + C = 4800e^{-t/5} + C$$

como a máquina foi comprada por R\$ 12.000,00, ou seja, para $t = 0$, temos que $C = 200$, portanto daqui a 10 anos a máquina valerá:

$$R(10) = 4800e^{-10/5} + 200 = \frac{4800}{e^2} + 200 = \frac{4800}{7.389} + 200 = R\$\ 849,61$$

2.3.2 Valorização

Exemplo 2.19 *Estima-se que um certo objeto valoriza a uma taxa anual de $\dfrac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4 + 8000}}$ reais. Quanto valerá daqui a 10 anos o objeto que atualmente vale R\$ 500,00?*

Solução 2.13 *Seja $P(t)$ o preço do objeto daqui a t anos. Note que:*

$$P'(t) = \frac{dP}{dt} = \frac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4 + 8000}}$$

logo,

$$P(t) = \int \frac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4 + 8000}}dt = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du = \sqrt{u} + C = \sqrt{0,2x^4 + 8000} + C$$

como o objeto vale atualmente R\$ 500,00, ou seja, para $t = 0$, temos que $C = 410,55$, portanto daqui a 10 anos o objeto valerá:

$$P(10) = \sqrt{0,2(10)^4 + 8000} + 410,55 = 100 + 410,55 = R\$\ 510,55$$

2.3.3 Preços de Venda

Exemplo 2.20

Solução 2.14

2.3.4 Custo Marginal

Exemplo 2.21

Solução 2.15

2.3.5 Receita futura

Exemplo 2.22 *Um poço de petróleo produz 300 barris de petróleo por mês. Este poço deverá secar em 3 anos. Estima-se que, daqui a t meses, o preço do barril de petróleo será de* $P(t) = 18 + 0,3\sqrt{t}$ *dólares. Como o petróleo é vendido logo que extraído, qual será a receita total futura do poço?*

Solução 2.16 *Seja R a receita. Então:*

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = (\text{dólares recebidos por barril}).(\text{N. de barris vendidos por mês})$$

$$R'(t) = \frac{dR}{dt} = \frac{dR}{dB}.\frac{dB}{dt} = P(t).300 = 5400 + 90\sqrt{t}$$

Logo:

$$R(t) = \int 5400 + 90\sqrt{t}dt = 5400t + 60t^{3/2} + C$$

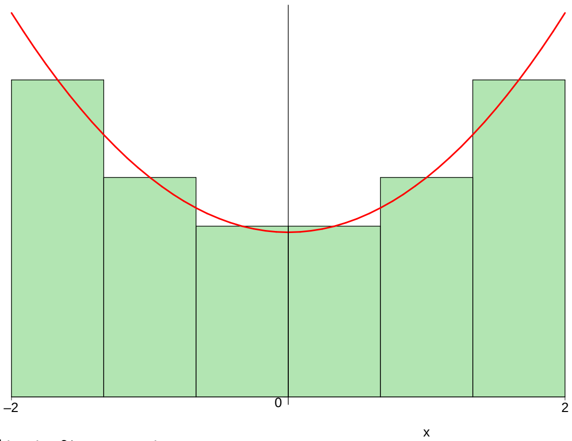
Como $R(0) = 0$*, segue que* $C = 0$ *e* $R(t) = 5400t + 60t^{3/2}$*. Como o poço secará em 36 meses, a receita futura total do poço será de:*

$$R(36) = 5400.36 + 60(36)^{3/2} = U\$\ 207.360,00$$

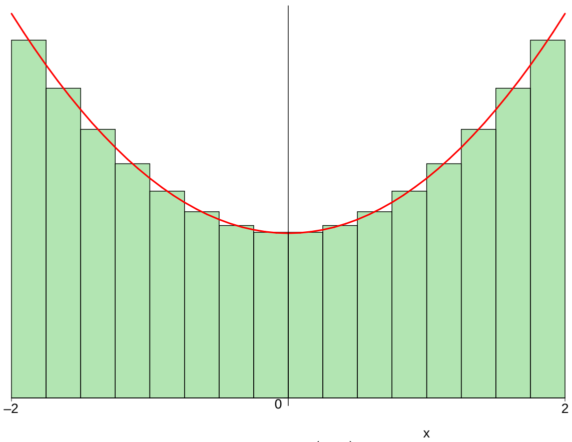
2.4 Integral Definida

2.4.1 Teorema Fundamental do Cálculo

Suponha que $f(x)$ seja contínua e não-negativa em um intervalo $a \leq x \leq b$. Você pode calcular o valor aproximado da área abaixo do gráfico de f, entre $x = a$ e $x = b$, da seguinte maneira:



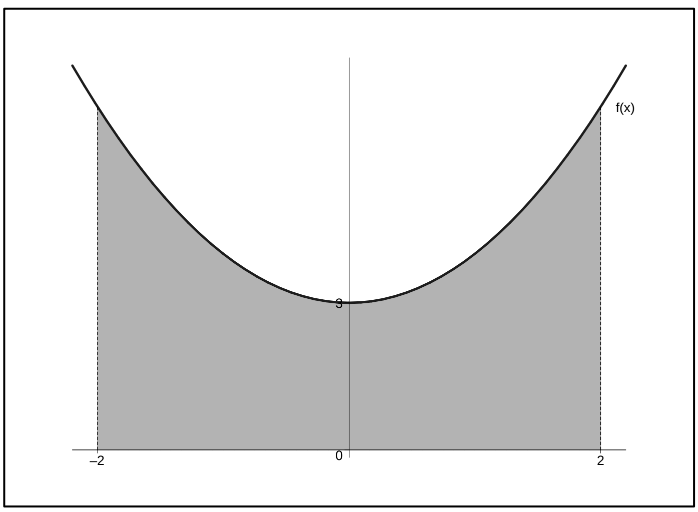
Se fizer uma subdivisão maior, temos:



Onde a área do n-ésimo retângulo é $f(x_i)\Delta x$. Portanto a área total será:

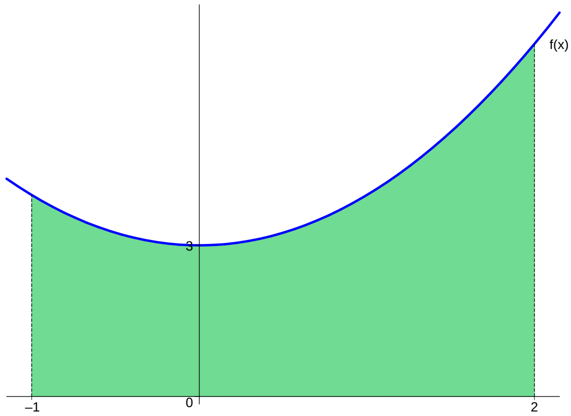
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

onde $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$.



Exemplo 2.23 *Calcule a área entre o gráfico de* $f(x) = x^2 + 3$ *e o eixo x entre* $-1 \leq x \leq 2$.

Solução 2.17 *Observando o gráfico nota-se que é só usar o teorema fundamental do calculo para se encontrar a área desejada.*

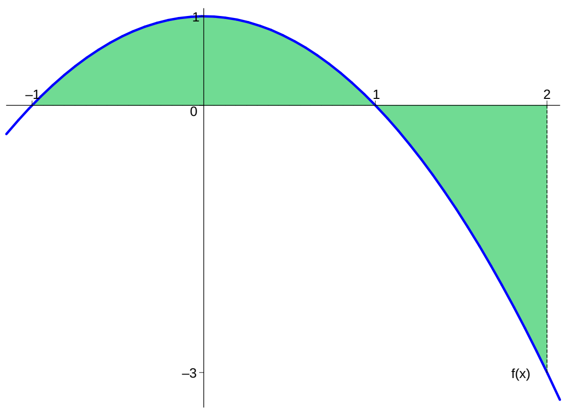


$$logo,\ A=\int_{-1}^{2} x^2+3dx = F(2)-F(-1)\ onde\ F(x)=\frac{x^3}{3}+3x+C,\ portanto:$$

$$A=\underbrace{\frac{2^3}{3}+3.2+C}_{F(2)}-\left(\underbrace{\frac{(-1)^3}{3}+3.(-1)+C}_{F(-1)}\right)=\frac{26}{3}+C+\frac{10}{3}-C=12\ u.a.$$

Exemplo 2.24 *Calcule a área entre o gráfico de $f(x)=-x^2+1$ e o eixo x entre $-1\leq x\leq 2$.*

Solução 2.18 *Observando o gráfico nota-se que só dá para usar o teorema fundamental do calculo para se encontrar a área no intervalo $-1\leq x\leq 1$. Para se calcular a área no intervalo $1\leq x\leq 2$ basta calcular a integral definida nesse intervalo, considerando-se o resultado positivo, portanto:*



$$A_{total}=A_1-A_2=\int_{-1}^{1} f(x)dx-\int_{1}^{2} f(x)dx$$

$$Como\ F(x)=-\frac{x^3}{3}+x+C\ é\ uma\ primitiva,\ temos:$$

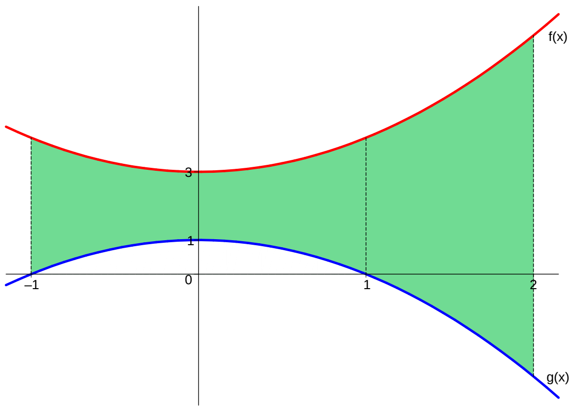
$$A_1 = \underbrace{-\frac{(1)^3}{3}+(1)+C}_{F(1)} - \left(\underbrace{-\frac{(-1)^3}{3}+(-1)+C}_{F(-1)}\right) = \frac{2}{3}+C+\frac{4}{3}-C = 2$$

$$A_2 = \underbrace{-\frac{2^3}{3}+2+C}_{F(2)} - \left(\underbrace{-\frac{(1)^3}{3}+(1)+C}_{F(1)}\right) = -\frac{6}{3}+C+\frac{2}{3}-C = -\frac{4}{3}$$

Conclusão: $A = 2 - \left(-\frac{4}{3}\right) = \frac{10}{3}\ u.a.$

Exemplo 2.25 *Calcule a área entre os gráficos de* $f(x) = x^2+3$ *e o gráfico de* $g(x) = -x^2+1$ *entre* $-1 \leq x \leq 2$.

Solução 2.19 *Observando o gráfico nota-se que a área no intervalo* $-1 \leq x \leq 1$ *é a diferença entre as áreas entre o eixo x e os graficos de* $f(x)$ *e* $g(x)$*, ou seja:*



$$A_1 = \int_{-1}^{1} f(x)dx - \int_{-1}^{1} g(x)dx = \int_{-1}^{1} [f(x)-g(x)]dx$$

e que a área no intervalo $1 \leq x \leq 2$ *é:*

$$A_1 = \int_{1}^{2} f(x)dx - \left(\int_{1}^{2} g(x)dx\right) = \int_{1}^{2} [f(x)-g(x)]dx$$

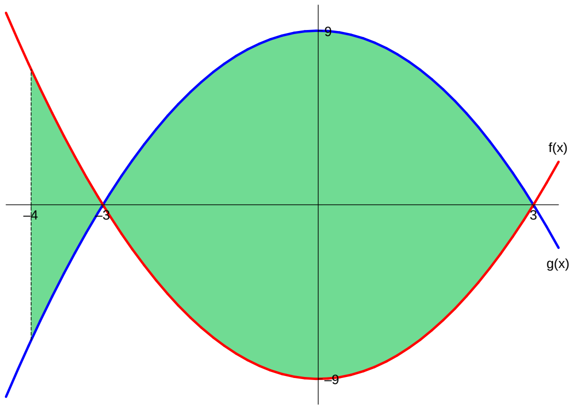
Portanto a função $h(x) = f(x)-g(x) = 2x^2+2$*, satisfaz o teorema, logo* $A_{total} = A_1 + A_2 = \int_{-1}^{2} [f(x)-g(x)]dx$ *e como* $H(x) = 2\frac{x^3}{3}+2x+C$ *é uma primitiva de* $h(x)$*, temos:*

$$A_{total} = \underbrace{2\frac{(2)^3}{3} + 2.(2) + C}_{F(2)} - \left(\underbrace{2\frac{(-1)^3}{3} + 2.(-1) + C}_{F(-1)}\right)$$

$$A_{total} = \frac{20}{3} + C + \frac{4}{3} - C = \frac{24}{3} = 8\ u.a.$$

Exemplo 2.26 *Calcule a área entre os gráficos de* $f(x) = x^2 - 9$ *e o gráfico de* $g(x) = -x^2 + 9$ *entre* $-4 \leq x \leq 3$.

Solução 2.20 *Observando o gráfico nota-se que a área* A_1 *no intervalo* $-4 \leq x \leq -3$ *é a diferença entre as áreas entre o eixo* x *e os gráficos de* $f(x)$ *e* $g(x)$ *e que a área* A_2 *no intervalo* $-3 \leq x \leq 3$ *é a diferença entre as áreas entre o eixo* x *e os gráficos de* $g(x)$ *e* $f(x)$*, ou seja:*



$$A_{total} = A_1 + A_2 = \int_{-4}^{-3} [f(x) - g(x)]dx + \int_{-3}^{3} [g(x) - f(x)]dx$$

Para resolver essas integrais, vamos utilizar uma função auxiliar

$$h(x) = f(x) - g(x) = (x^2 - 9) - (-x^2 + 9) = 2x^2 - 18$$

logo

$$A_{total} = \int_{-4}^{-3} h(x)dx + \int_{-3}^{3} -h(x)dx$$

Calculando a primitiva de $h(x)$*, temos:*

$$H(x) = \int h(x)dx = \int 2x^2 - 18dx = 2\frac{x^3}{3} - 18x + C$$

Portanto:

$$A_1 = \left(\underbrace{2\frac{(-3)^3}{3} + 18.(-3) + C}_{F(-3)} \right) - \left(\underbrace{2\frac{(-4)^3}{3} + 18.(-4) + C}_{F(-4)} \right) = \frac{20}{3} u.a.$$

e

$$A_2 = \left(\underbrace{2\frac{(3)^3}{3} + 18.(3) + C}_{F(3)} \right) - \left(\underbrace{2\frac{(-3)^3}{3} + 18.(-3) + C}_{F(-3)} \right) = 72 u.a.$$

Finalmente: $A_{total} = \frac{20}{3} + 72 = \frac{236}{3} u.a.$

Capítulo 3

Funções de várias variáveis

3.1 Funções

Na prática, o valor de uma quantidade pode depender do valor de duas ou mais quantidades.

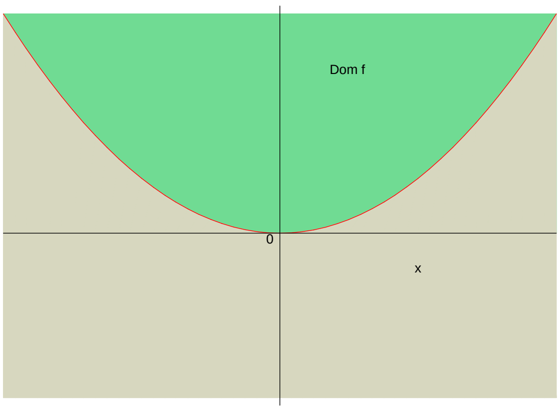
Exemplo 3.1 *Se o custo de um determinado tipo c_1 de componente custa R\$ 6,00 e do tipo c_2 custa R\$ 5,00, o custo dos componentes é de $c(c_1,c_2) = 6c_1 + 5c_2$.*

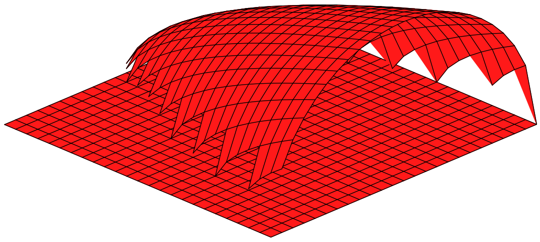
$$c(2,3) = 12 + 15$$

Exemplo 3.2 $f(x,y) = 3x - 4y$

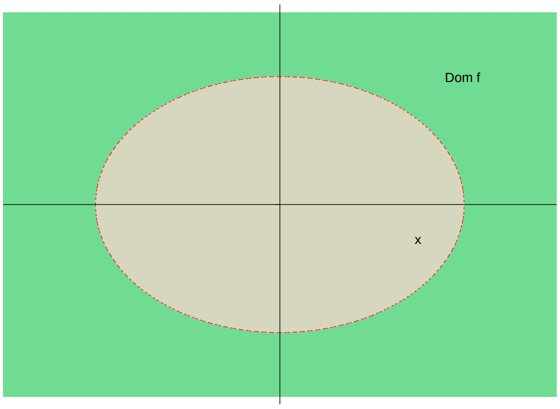
3.2 Domínio

Exemplo 3.3 *Se $f(x,y) = \sqrt{y - x^2}$, então o domínio de f será Dom $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y - x^2 \geq 0\}$ o que graficamente nos dá a região abaixo.*





Exemplo 3.4 *Se* $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{y^2+x^2-4}}$, *então o domínio de* f *será Dom* $f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, y^2+x^2-4>0\}$ *o que graficamente nos dá a região abaixo.*



3.3 Limites

3.4 Derivadas parciais

Suponha que $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ seja uma função de n variáveis. A derivada parcial de f em relação a sua j-ésima variável x_j e representada por $f_{x_j}(x,y)$ é definida como sendo a função obtida derivando-se a função f em relação a x_j e considerando-se as demais variáveis como constantes.

Exemplo 3.5 *Calcule* f_x *e* f_y *da função* $f(x,y) = 3x-4y$

Solução 3.1 f_x *= derivada parcial de* f *em relação a variável* x *=*
= derivada de $3x-4y$ *considerando* y *uma constante =* $3.1+0=3$,
analogamente,
f_y *= derivada parcial de* f *em relação a variável* y *=*
= derivada de $3x-4y$ *considerando* x *uma constante =* $0+4.1=3$

Exemplo 3.6 *Calcule* f_x *e* f_y *da função* $f(x,y) = 5x^2-4xy+3y$

Solução 3.2 f_x *= derivada parcial de* f *em relação a variável* x *=*
= derivada de $5x^2 - 4xy + 3y$ *considerando* y *uma constante =*
= $5.2x^1 - 4y.1 + 0 = 10x - 4y$,
analogamente,
f_y *= derivada parcial de* f *em relação a variável* y *=*
= derivada de $5x^2 - 4xy + 3y$ *considerando* x *uma constante =*
= $0 - 4x.1 + 3.1 = -4x + 3$

Exemplo 3.7 *Calcule* f_x, f_y *e* f_z *onde* $f(x,y,z) = 2x^2y - 3yz^3 - 4xz - x^3$

Solução 3.3 $f_x(x,y,z) = 2.y2.x^1 - 0 - 4z.1 - 3x^2 = 4xy - 4z - 3x^2$
$f_y(x,y,z) = 2x^2.1 - 2z^3.1 - 0 - 0 = 2x^2 - 2z^3$
$f_z(x,y,z) = 0 - 3y.3z^2 - 4x.1 - 0 = -9yz^2 - 4x$

Observação 3.1 *Notação também utilizada para derivadas parciais:*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,\ldots,x_n) = f_{x_i}(x_1,\ldots,x_n)$$

Observação 3.2 *As derivadas parciais também podem ser deriváveis. As funções resultantes denominam-se derivadas parciais de segunda ordem. Serão representadas por:*

- derivada de f_x *em relação a* x $f_{xx} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

- derivada de f_x *em relação a* y $f_{xy} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

Exemplo 3.8 *Determine todas as derivadas parciais de segunda ordem da função* $f(x,y,z) = 2x^3y^3 - 2xz^2 - y^2z^3$.

Solução 3.4 *Calculando as derivadas parciais de primeira ordem:*

- $f_x(x,y,z) = 6x^2y^3 - 2z^2$
- $f_y(x,y,z) = 6x^3y^2 - 2yz^3$
- $f_z(x,y,z) = -4xz - 3y^2z^2$

Calculando as derivadas parciais de segunda ordem:

$$\begin{array}{lll}
f_{xx}(x,y,z) = 12xy^3 & f_{xy}(x,y,z) = 18x^2y^2 & f_{xz}(x,y,z) = -4z \\
f_{yx}(x,y,z) = 18x^2y^2 & f_{yy}(x,y,z) = 12x^3y - 2z^3 & f_{yz}(x,y,z) = -6yz^2 \\
f_{zx}(x,y,z) = -4z & f_{zy}(x,y,z) = -6yz^2 & f_{zz}(x,y,z) = -4x - 6y^2z
\end{array}$$

Exemplo 3.9 *Determine $f_x(x,y)$ onde $f(x,y) = (x-y^2)(2x^2-y)$*

Solução 3.5 *Note que a função $f(x,y)$ é o produto de duas outras funções $g(x,y) = x-y^2$ e $h(x,y) = 2x^2-y$, logo pela regra do produto (ver 1.1.4), temos:*

$$f_x(x,y) = g_x h + g h_x = \overbrace{(1)}^{g_x}\overbrace{(2x^2-y)}^{h} + \overbrace{(x-y^2)}^{g}\overbrace{(4x)}^{h_x} = 6x^2 - y - 4xy^2$$

$$f_y(x,y) = g_y h + g h_y = \overbrace{(-2y)}^{g_y}\overbrace{(2x^2-y)}^{h} + \overbrace{(x-y^2)}^{g}\overbrace{(-1)}^{h_y} = 3y^2 - 4x^2y - x$$

Exemplo 3.10 *Determine $f_{xy}(x,y)$ onde $f(x,y) = \frac{x}{y}$*

Solução 3.6 *Note que $f(x,y) = x\frac{1}{y} = xy^{-1}$, logo $f_x(x,y) = \frac{1}{y}$ e portanto $f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{y^2}$*

Exemplo 3.11 *Determine $f_x(x,y)$ onde $f(x,y) = e^{2x^2-y}$*

Solução 3.7 *Note que a função $f(x,y)$ é a composição entre a função exponencial e $g(x,y) = 2x^2-y$, logo pelas regra do exponencial e da cadeia (ver 1.1.6 e 1.1.8), temos:*

$$f_x(x,y) = e^g g_x = e^{2x^2-y}.(4x) = 4xe^{2x^2-y}$$

$$f_y(x,y) = e^g g_y = e^{2x^2-y}.(-1) = -e^{2x^2-y}$$

Exemplo 3.12 *Determine $f_{xy}(x,y)$ onde $f(x,y) = ln(2x^2-y)$*

Solução 3.8 *Note que a função $f(x,y)$ é a composição entre a função logarítmica e $g(x,y) = 2x^2-y$, logo pelas regra do logaritmo e da cadeia (ver 1.1.7 e 1.1.8), temos:*

$$f_x(x,y) = \frac{1}{g}g_x = \frac{1}{2x^2-y}.(4x) = \frac{4x}{2x^2-y}$$

$$f_y(x,y) = \frac{1}{g}g_y = \frac{1}{2x^2-y}.(-1) = -\frac{1}{2x^2-y}$$

Para se calcular $f_{xy}(x,y)$ temos que usar a regra do quociente (ver 1.1.5), portanto:

$$f_{xy}(x,y) = \frac{g_y h - g h_y}{h^2} = \frac{0.(2x^2 - y) - (4x)(-1)}{(2x^2 - y)^2} = \frac{4x}{(2x^2 - y)^2}$$

$$f_{yx}(x,y) = \frac{g_x h - g h_x}{h^2} = \frac{0.(2x^2 - y) - (1)(4x)}{(2x^2 - y)^2} = \frac{4x}{(2x^2 - y)^2}$$

3.5 Curvas de Nível

Uma curva de nível de uma função $f(x,y)$ é uma curva no plano xy representada pela equação $f(x,y) = C$, onde C é uma constante qualquer.

Exemplo 3.13 *Encontrar a curva de nível da função $f(x,y) = x^2 - y$, para $C =$* 4.

Solução 3.9 *Note que para $f(x,y) = 4$ temos $x^2 - y = 4 \Leftrightarrow y = x^2 + 4$ que é o gráfico de uma parábola*

3.6 Máximos e Mínimos

Reportando as funções apenas de uma variável, temos que o(s) ponto(s) de máximo (ou mínimo) ocorrem no(s) ponto(s) críticos da função, ou seja, onde a derivada da função é igual a zero. De maneira similar, temos a seguinte definição:

Definição 3.1 *Diremos que o ponto (a,b) é um ponto crítico da função $f(x,y)$ se $f_x(x,y) = 0$ e $f_y(x,y) = 0$.*

3.6.1 Teste da derivada segunda

O teste da derivada segunda utilizado com várias variáveis tem a finalidade de distinguir pontos de máximo, mínimo relativos dos pontos de sela.

Suponha que $f(x,y)$ tenha derivadas parciais de segunda ordem contínuas. Seja

$$D(x,y) = \begin{vmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{vmatrix} = f_{xx}(x,y)\, f_{yy}(x,y) - (f_{xy}(x,y))^2$$

e suponha que (a,b) seja um ponto crítico de $f(x,y)$.

- Se $D(a,b) < 0$, então, $f(x,y)$ tem um ponto de sela em (a,b);
- Se $D(a,b) > 0$ e $f_{xx}(a,b) < 0$, então, $f(x,y)$ possui um máximo relativo em (a,b);
- Se $D(a,b) > 0$ e $f_{xx}(a,b) > 0$, então, $f(x,y)$ possui um máximo relativo em (a,b);
- Se $D(a,b) = 0$ o teste falha.

Exemplo 3.14 *Determine e classifique os pontos críticos de* $f(x,y) = x^2 + y^2$

Solução 3.10

Exemplo 3.15 *Um fabricante deseja vender um número limitado de máquinas e estima que, se forem vendidas x máquinas para o mercado interno e y para o externo, as máquinas serão vendidas por* $150 - x$ *milhares de reais para o mercado interno e* $100 - y$ *milhares de reais para o mercado externo. Quantas máquinas devem ser vendidas para os mercados interno e externo para se obter a receita máxima?*

Solução 3.11

Exemplo 3.16 *Um determinado tipo de sorvete de duas marcas distintas foi comprado por um negociante pelo preço de R$ 2,00 por unidade. Estima-se que, se a mercadoria de uma das marcas for vendida por x reais e a outra por y a unidade, os consumidores comprarão diariamente* $40 - 50x + 40y$ *unidades do sorvete da primeira marca e* $20 + 60x - 70y$ *unidades da segunda marca. Qual será o preço de venda de cada um dos sorvetes, para se obter o lucro maior possível?*

Solução 3.12

3.6.2 Multiplicadores de Lagrange

Suponha que $f(x,y)$ e $g(x,y)$ sejam funções cujas as derivadas de primeira ordem existam. Para encontrar o máximo e o mínimo relativos de $f(x,y)$, com à restrição $g(x,y) = K$, para uma constante K, introduza uma nova variável λ (denominada *multiplicador de Lagrange*) e resolva as três equações seguintes:

$$f_x(x,y) = \lambda g_x(x,y) \qquad f_y(x,y) = \lambda g_y(x,y) \qquad g(x,y) = K$$

O extremo relativo desejado será dado entre as soluções encontradas.

Exemplo 3.17 *No exemplo anterior, suponha que o fabricante está limitado a vender no máximo 100 máquinas. Qual será a receita máxima e quais as quantidades de máquinas vendidas para o mercado interno e externo?*

Solução 3.13

Capítulo 4

Anexos

4.1 Juros

4.1.1 Juros Simples

Se P reais forem investidos a uma taxa de juros simples anual de r (expressa como decimal), o saldo $S(t)$ após t anos será de

$$\boxed{S(t) = P(1+rt) \text{ reais}}$$

4.1.2 Juros Compostos

Se P reais forem investidos a uma taxa de juros anual de r (expressa como decimal) e os juros forem compostos k vezes por ano, o saldo $S(t)$ após t anos será de

$$\boxed{S(t) = P\left(1+\frac{r}{t}\right)^{kt} \text{ reais}}$$

4.1.3 Juros Compostos Continuamente

Se P reais forem investidos a uma taxa de juros anual de r (expressa como decimal) e os juros forem compostos continuamente, o saldo $S(t)$ após t anos será de

$$\boxed{S(t) = Pe^{rt} \text{ reais}}$$

4.2 Tempo de Duplicação

Se a quantia for investida a uma taxa de juros anual r e os juros forem compostos k vezes ao ano, então

$$\boxed{\text{Tempo de duplicação} = \frac{\ln 2}{k\ln(1+r/k)}}$$

Se a quantia for investida a uma taxa de juros anual r e os juros forem compostos continuamente, então

$$\boxed{\text{Tempo de duplicação} = \frac{\ln 2}{r}}$$

4.3 Taxa Efetiva de Juros

Se o juros são compostos k vezes ao ano, a uma taxa anual de juros r, então

$$\boxed{\text{Taxa efetiva de juros} = \left(1+\frac{r}{t}\right)^k - 1}$$

Se o juros são compostos continuamente, a uma taxa anual de juros r, então

$$\boxed{\text{Taxa efetiva de juros} = e^r - 1}$$

4.4 Valor Presente

Se o juros são compostos k vezes ao ano, a uma taxa anual de juros r, o valor presente de S reais, pagável daqui a t anos é

$$\boxed{P = S\left(1+\frac{r}{k}\right)^{-kt} \text{ reais}}$$

Se o juros são compostos continuamente, a uma taxa anual de juros r, o valor presente de S reais, pagável daqui a t anos é

$$\boxed{P = Se^{-rt} \text{ reais}}$$