Sumário

Capítulo 1

Integração

A integração tem dois aspectos:

a) Um procedimento "inverso" da derivação.

b) Um método usado para determinar a área sob uma curva.

Em certos problemas, a derivada (taxa) da função é conhecida e o objetivo é calcular a função. O processo de obtenção da função através de sua derivada denomina-se anti-diferenciação ou integração.

1.1 Integral Indefinida

Definição 1.1 *Uma função* $f(x)$ *é uma* **primitiva** *de* f*, se* $\forall x \in D(f)$*, temos* $F'(x) = f(x)$*.*

Exemplo 1.1 $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ *é uma primitiva de*$f(x) = x^2$ *pois* $F' = f$

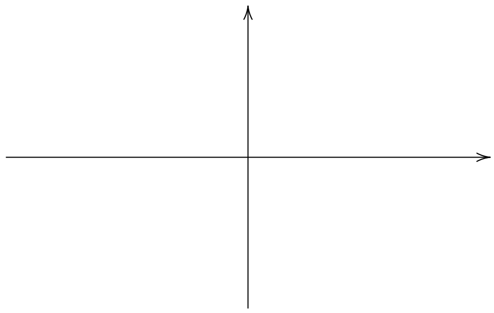
Exemplo 1.2 $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 + 5x + 3$ *é uma primitiva da*$f(x) = x^2 + 5$ *pois* $F' = f$

Exemplo 1.3 $F(x) = \sqrt{x}$ *é uma primitiva de*$f(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$*, pois* $F' = f$

Observação 1.1 *As funções* $F(x) = x^3$ *e* $G(x) = x^3 + 5$ *também são primitivos de* f*, pois* $F' = G' = f$*, observe que* $f(x)$ *admite mais de uma primitiva.*

Observação 1.2 Se F **e** G **são primitivas de** f**, então existe uma constante** C **tal que** $G(x) = F(x) + C$

Considere as funções $F(x) = x^3$ e $G(x) = x^3 + C$, essa funções são primitivas de f, pois $G'(x) = F'(x) = f(x) = 3x^2$. Observe que $f(x)$ é o coeficiente angular da tangente ao gráfico de $F(x)$ e conseqüentemente ao gráfico de $G(x)$ "paralelo" ao gráfico de $F(x)$, que pode ser obtido transladando o gráfico de $F(x)$ verticalmente, para cima ou para baixo. O gráfico abaixo mostra algumas primitivas de$f(x) = 3x^2$.



1.1.1 Integral Indefinida

Se $F(x)$ é uma primitiva de f, a expressão$F(x)+C$ é chamado **integral indefinida** da função $f(x)$ e é denotado por: $\int f(x)dx = F(x)+C$.

Observação 1.3 $\int$ *→ sinal de integração; dx → indica que x é a variável em relação a qual efetuaremos a integração.*

A função expressa em termos de outra variável: $\int f(t)dt$, $\int f(s)ds$,

$$\int f(x)dx = F(x)+C \Leftrightarrow F'(x) = f(x) \forall x \in D(t)$$

1.1.2 Regras de Integração

Vejamos algumas regras:

a) $\int cf(x)dx = c\int f(x)dx$, onde c é uma constante.

b) $\int \left[f(x) \pm g(x)\right]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx$

c) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ com $n \neq -1$

d) $\int \frac{1}{x}dx = \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

e) $\int e^x dx = e^x + C$

Observação 1.4 *As integrais do produto e quociente não possuem regras gerais, vejamos os exemplos abaixo:*

Exemplo 1.4 $\int \frac{3x^5+5x-3}{x^2}dx = \int 3x^3 + \frac{5}{x} - \frac{3}{x^2}dx$

Exemplo 1.5 $\int x^2\left(x^3-2x+1\right)dx$

1.1.3 Integração por Substituição

Usar a regra de "**derivação da função composta**" (regra da cadeia).

Considerando a função composta $F(g(x))$, onde $F'(x) = f(x)$, temos:

$$[F(g(x))]' = F'(g(x)).g'(x) = f(g(x)).g'(x)$$

isto é, $F(g(x))$ é uma primitiva de $f(g(x)).g'(x)$, logo:

$$\int f(g(x)).g'(x)dx = F(g(x)) + C$$

fazendo $u = g(x)$, $du = g'(x)dx$, temos:

$$\int f(g(x))g(x)dx = \int f(u)du = F(u) + C$$

Observação 1.5 *A escolha da função $u = g(x)$ deve ser conveniente de tal forma que a integral obtida seja mais simples.*

Exercício 1.1 *Calcule as integrais:*

a) $\int (x^2 + 3x + 5)^8 (2x + 3)dx$

b) $\int \frac{2x}{1 + x^2} dx$

c) $\int \frac{x}{(1 + x^2)^3} dx$

d) $\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$

e) $\int \frac{3x + 6}{\sqrt{2x^2 + 8x + 3}} dx$

1.1.4 Integração por Partes

Usar a regra de "**derivação do produto de duas funções".**

Sejam f e g funções deriváveis, então com base na regra de derivação do produto das funções f e g, temos:

$$[f.g]' = f'g + fg' \Rightarrow f.g' = (f.g)' - f'g$$

ou seja, $f.g$ é uma primitiva de $f'.g + f.g'$, logo:

$$\int f(x).g'(x)dx = f(x).g(x) - \int f'(x).g(x)dx$$

fazendo: $u = f(x) \Rightarrow du = f'(x)dx$ e $v = g(x) \Rightarrow dv = g'(x)dx$

$$\int f.g'dx = f.g - intf'.gdx = \int udv = uv - \int vdu$$

Como aplicar a regra de integração por partes:

a) Os fatores a serem selecionados para serem a integral e a derivada, devem ser escolhidos, de modo que:

- fator selecionado para a integração $dv \to$ fácil de integrar, observando que dx é sempre a parte de dv.

- fator selecionado para a derivação $u \to$ mais simples quando derivado.

b) A integral $\displaystyle\int vdu$ deve ser mais simples que $\displaystyle\int udv$.

Exercício 1.2 *Calcule as integrais:*

a) $\displaystyle\int x \ln x dx$

b) $\displaystyle\int xe^x dx$

c) $\displaystyle\int \ln x dx$

d) $\displaystyle\int 5xe^{-3x} dx$

e) $\displaystyle\int x^2 e^x dx$

1.1.5 LISTA DE EXERCÍCIOS

$1^{\underline{a}}$ **Questão** Calcule as integrais:

a) $y = \displaystyle\int (x^3 + 2x^{\frac{5}{2}} + 5x^{\frac{3}{2}} - 10x)dx$ se $y = 0$ quando $x = 0$

b) $y = \int 2x(x-4)^2 dx$, se $y = 12$ quando $x = 1$

$2^{\underline{a}}$ **Questão** Calcule as integrais abaixo indicando as propriedades e técnicas de integração.

a) $\displaystyle\int 5xe^{-3x} dx$

b) $\displaystyle\int 3x\sqrt[5]{9x^2 - 3}dx$

c) $\displaystyle\int 3x^2(6x^3 + 5)^{10} dx$

$3^{\underline{a}}$ **Questão** Determine a função cuja tangente possui coeficiente angular dada e passa pelo ponto dado:

a) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 - 4}{x^2}$ em $(4, 1)$

b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x}{2 - x^2}$ em $(1, 5)$

c) $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2+5}$ em $(2, 10)$

$4^{\underline{a}}$ **Questão** O lucro marginal de uma fábrica ao produzir q unidades é de $130 - 2q$ reais por unidade, quando q unidades são produzidas. Se o lucro obtido com a produção de 10 unidades é de R$ 800,00, qual será o lucro máximo da fábrica?

$5^{\underline{a}}$ **Questão** Estima-se que a valorização de determinado objeto dá-se a uma taxa de $\dfrac{0,4x^3}{\sqrt{0,2x^4+8000}}$ reais por ano. Se o objeto atualmente vale R$ 500,00, quanto valerá daqui a 10 anos?

$6^{\underline{a}}$ **Questão** Após t horas de trabalho, um operário de uma fábrica consegue produzir a uma taxa de $100te^{-0,05t}$ unidades por hora. Quantas unidades o operário consegue produzir durante as 3 primeiras horas?

$7^{\underline{a}}$ **Questão** Depois de uma certa experiência um fabricante determinou que se produzissem x unidade de um determinado produto por semana, o custo marginal seria dado por $0,3x - 11$ onde o custo de produção é em reais. Se o preço de venda do produto é fixado em R$ 19,00 por unidades, e o custo fixo por semana é de R$ 100,00, encontre o lucro semanal máximo que pode ser obtido.

$8^{\underline{a}}$ **Questão** Se a receita marginal é $R'(x) = \dfrac{3}{x^2} - \dfrac{2}{x}$ ache a função de receita, se $R(1) = 6$.

$9^{\underline{a}}$ **Questão** Mostre que $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$ [1]

$10^{\underline{a}}$ **Questão** O preço de revenda de certa máquina decresce com o decorre do tempo, quando a máquina tiver t anos de uso, a taxa de variação de seu valor será $220(t-10)$ reais por ano. Se a máquina for comprada por R$ 12.000,00, quanto valerá essa máquina daqui a 10 anos?

[1] **Sugestão:** $\dfrac{1}{a^2 - x^2} = \dfrac{1}{(a-x)(a+x)} = \dfrac{A}{a-x} + \dfrac{B}{a+x}$ calcule A e B

Capítulo 2

Integral Definida

Consideremos o seguinte problema: O custo marginal de uma empresa é $C'(x) = 4 - 0,2x$, $0 \leq x \leq 10$, onde C' é dado em milhares de reais e x é a quantidade produzida em centenas de unidades por dia. Se o número de unidades produzidas num certo dia, varia de 200 a 600 unidades, qual é a variação no custo?

Solução 2.1 *Se C é a função custo, a variação no custo de $x = 2$ a $x = 6$ é $C(6) - C(2)$, este é o número que iremos calcular, observe que x é dado em centenas.*

O custo C é a primitiva de $C'(x) = 4 - 0,2x$ assim,

$$\int C'(x)dx = \int (4 - 0,2x)dx \Rightarrow C(x) = 4x - 0,1x^2 + k$$

onde k é uma constante. Usaremos esse resultado para calcular:$C(6) - C(2)$.

$$\begin{array}{l} C(2) = 4(2) - 0,1(2)^2 + k \Rightarrow C(2) = 8 - 0,1(4) + k = 7,6 + k \\ C(6) = 4(6) - 0,1(6)^2 + k \Rightarrow C(6) = 24 - 0,1(36) + k = 20,4 + k \\ C(6) - C(2) = (20,4 + k) - (7,6 + k) = 12,8 \end{array}$$

Portanto, a variação no custo é $12,8$ milhares de reais.

Observe neste exemplo, que a variação de C foi calculada usando a primitiva (anti-derivada) de C', que é denotada por $\int C'(x)dx$. Para indicar a variação de $x = 2$ até $x = 6$, acrescentamos a seguinte notação:

$$(\text{variação em } C \text{ de } x = 2 \text{ até } x = 6) = \int_2^6 C'(x)dx = C(6) - C(2)$$

Esta forma é chamada integral definida.

Observação 2.1 *O símbolo $\int_a^b f(x)dx$, representa a integral definida de $f(x)$ desde $x = a$ até $x = b$. A função $f(x)$ é chamada integrante, enquanto os números a e b são chamados, respectivamente, limite inferior e limite superior de integração.*

2.1 Definição

Seja f uma função contínua em $[a,b]$. A integral de f, de a até b é:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\ \Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

onde F é um primitiva de f.

Exemplo 2.1 *Um estudo indica que, daqui a x meses, a população de uma cidade crescerá à taxa $5 + 3x^{\frac{2}{3}}$ pessoas por mês. De quanto a população crescerá nos próximos oito meses?*

2.2 Propriedades

a) $\displaystyle\int_a^a f(x)dx = 0$

b) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx(v)$

c) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, onde $a < c < b$

d) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$ se $f(x) > 0, \forall x \in [a,b]$

e) $\displaystyle\int_a^b f(x)dx < 0$ se $f(x) < 0, \forall x \in [a,b]$

Exercício 2.1 *Calcule o valor da integral definida:*

a) $\displaystyle\int_0^3 x^2dx$

b) $\displaystyle\int_2^5 (2 + 2t + 3t^2)dt$

c) $\displaystyle\int_1^9 \left(\sqrt{t} - \frac{1}{\sqrt{t}}\right) dt$

d) $\displaystyle\int_{-1}^0 16x(x^2 + 1)^3dx$

e) $\displaystyle\int_{-3}^{-1} \frac{t+1}{t^3}$

f) $\displaystyle\int_{1}^{e} \frac{\ln x}{x} dx$

g) $\displaystyle\int_{1}^{2} (2x-4)^5 dx$

h) $\displaystyle\int_{1}^{e^2} \ln t dt$

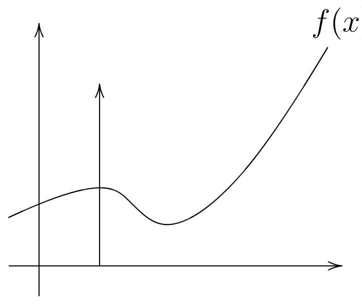
i) $\displaystyle\int_{1}^{e} x \ln x dx$

j) $\displaystyle\int_{-2}^{2} |x|\, dx$

k) $\displaystyle\int_{-2}^{2} xe^{-x} dx$

2.3 Área e Integração

Se $f(x)$ é contínua e não-negativa em $a \leq x \leq b$ e R é a região limitada pelo gráfico de f, pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$ e pelo eixo dos x, então, **área da região** $= \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)dx$.



Exemplo 2.2 *Calcule a área da região limitada pela curva* $y = -x^2 + 4x - 3$ *e o eixo* x*. Esboce o gráfico de* f *e hachurie a região* R*.*

2.4 Área entre duas curvas

Se $f(x)$ e $g(x)$ forem contínuas em $a \leq x \leq b$, com $f(x) \geq g(x)$ e se R for a região limitada pelos gráficos de f, g e pelas retas verticais $x = a$ e $x = b$, então **área da região**

$$R = \int_a^b [f(x) - g(x)]\, dx.$$

Exemplo 2.3 *Calcule a área da região limitada pelas curvas* $y = x^2 + 1$ *e* $y = 2x - 2$ *entre* $x = -1$ *e* $x = 2$

Exercício 2.2 *Encontre a área limitada pelas curvas* $y = 6x - x^2 ey = x^2 - 2x$.

Exercício 2.3 *Encontre a área da região limitada pelas curvas* $y = x^2, y = xey = 2x$.

Exercício 2.4 *Achar a área do* 1^0*quadrante limitada pelas curvas* $y = e^x, y = e^{-x}ex = 2$.

Exercício 2.5 *Observe o gráfico:*

Determine a área da região hachurada. Sabendo que a curva é: $y = f(x) = x^3 - 6x^2 + 8x$

2.5 Integral Definida - Aplicações

2.5.1 A probabilidade como uma área

Suponhamos que queremos saber a duração de um certo produto em um intervalo, ou seja, estamos interessado em determinar a probabilidade de um componente escolhido aleatoriamente possuir uma duração x em um intervalo $a \leq x \leq b$. Usando o dado resultante construiremos uma função contínua positiva $f(x)$ com a seguinte propriedade: a probabilidade $P(a \leq x \leq b)$ de duração de componentes selecionados aleatoriamente, a e b, é a área abaixo do gráfico de f entre $x = a$ e $x = b$.

$$P(a \leq x \leq b)^{1} = \int_a^b f(x)dx$$

Exemplo 2.4 *A função densidade de probabilidade da duração dos componentes eletrônicos produzidos por certa empresa é* $f(x) = 0,02e^{-0,02x}$*, onde* x *é a duração (em meses) de um componente selecionado aleatoriamente.*

a) Qual é a probabilidade de que a duração do componente selecionado aleatoriamente ser de 20 a 30 meses ?

b) Qual é a probabilidade de que a duração do componente selecionado seja menor ou igual a 20 meses ?

c) Qual é a probabilidade de que a duração do componente selecionado seja maior que 20 meses ?

[1] Função densidade de probabilidade da variável x

2.5.2 Ganho líquido proporcionado por um equipamento industrial

O ganho líquido proporcionado por uma máquina industrial durante um certo período é a diferença entre a receita total que ela gera a seu custo total de operação e manutenção.

Veremos no exemplo abaixo, como a receita líquida proporcionado por uma máquina pode ser interpretada como área entre duas curvas.

Exemplo 2.5 *Admita que, aos x anos de idade, uma máquina industrial gera uma receita à razão de $R(x) = 5000 - 20x^2$ reais por ano e acarrete gastos que se acumulam a razão de $C(x) = 2000 - 10x^2$ reais por anos.*

a) Por quantos anos o uso da máquina será lucrativo? (**Sugestão:** Ver observações abaixo)

b) Qual é o ganho líquido gerado pela máquina durante o período determinado no ítem (a)? (**Sugestão:** Ver observações abaixo)

c) Interprete o ganho líquido encontrado em (b) como área entre duas curvas.

Observação 2.2 *O uso da máquina será lucrativo enquanto a razão segundo a qual a receita é gerada for maior que a razão segundo a qual os custos se aumentam, ou seja, até que*
$R(x) = C(x)$. A máquina será lucrativa quando $R(x) \geq C(x)$

Observação 2.3 *As funções $R(x) e C(x)$ representam, respectivamente, as razões de variação da receita e custo totais (ou seja, são a receita marginal e os custos marginais). Por conseguinte, a diferença $R(x) - C(x)$ representa a razão de variação dos ganhos líquidos gerados pela máquina.*

$$\text{Ganho líquido}^2 = \int_0^{x_o} [R(x) - C(x)]\, dx$$

2.5.3 Curva de demanda e propensão de gasto do consumidor

Em economia, qualquer função $p = D(q)$ capaz de fornecer o preço por unidade que os consumidores dispor-se-ão a pagar a fim, de obter a q-ésima unidade de determinado produto denomina-se função demanda do produto. Uma função demanda Quantia total que o consumidor se dispõe a gastar

A quantia total que os consumidores desejarão gastar a fim de obter q_o unidades deste produto é dado por $\int_0^{q_o} D(q)dq$. Em termos geométricos, a disposição geral para gastar é a área situada abaixo da curva $p = D(q)$, entre $q = 0$e q=q_o.

Exemplo 2.6 *Suponha que a função de demanda de determinado produto seja* $D(q) = 4(25 - q^2)$ *reais por unidade.*

a) *Determine a quantia total que os consumidores dispor-se-ão a pagar a fim de adquirir três unidade deste produto.*

b) *Construa a curva de demanda e interprete o resultado encontrado no ítem (9) como uma área.*

2.5.4 Excedente do consumidor

Suponha que a função demanda dada por $p = D(q)$ é representada pelo gráfico abaixo, onde q_o é a demanda de mercado se o preço de mercado for p_o. O ganho do consumidor é representado pela área sob a curva de demanda e acima da reta $p = p_o$. Esta área é designada por Marshall como excedente do consumidor.

Observe que:

$$\text{Excedente do consumidor} = \int_0^{q_o} [D(q) - p_o]\, dq = \int_0^{q_o} D(q)dq - p_o q_o$$

Exemplo 2.7 *Suponha que a função demanda de determinado produto seja* $D(q) = 4(25 - q^2)$ *reais por unidade.*

a) *Determine a excedente do consumidor, se o preço unitário for de R\$64,00.*

b) *Trace a curva de demanda e interprete a economia do consumidor como uma área.*

Exemplo 2.8 *Se a função demanda é* $D(q) = 32 - 4q - q^2$ *determine o excedente do consumidor quando:*

a) $q_o = 3$

b) $p_o = 27$

Observação 2.4 *Economia dos consumidores* = *quantia que os consumidores está dispostos a gastar sem adquirir* q_o *unidades* - *gastos efetivos consumidor com* q_o *unidades*

2.5.5 Excedente do produtor

Uma função de oferta representa as respectivas quantidades de um bem que pode ser ofertado a vários preços. Se o preço de mercado y_o e a oferta de mercado corresponde é x_o, então os produtores que estejam aptos a oferecer o artigo abaixo deste preço de mercado ganham, uma vez que o preço é y_o. O ganho total do produtor é representado pela área acima da curva de oferta e abaixo da reta $y = y_o$ e é conhecido como o excedente do produtor.

$$\text{Excedente do produtor} = \int_0^{x_o} [y_o - f(x)]\,dx = x_o y_o - \int_0^{x_o} f(x)dx$$

onde $y = f(x)$ é a função de oferta.

Exemplo 2.9 *Supondo que a função de oferta* $y = (x+3)^2$ *e o preço é* $y_o = 36$*, determine o excedente do produtor.*

Exemplo 2.10 *Se a função demanda é* $y = 16 - x^2$ *e a função oferta é* $y = 2x + 1$*. Determine o excedente do consumidor e o produtor sob condições de concorrência perfeita.*

Capítulo 3

Funções de duas variáveis

3.1 Exercícios

Exercício 3.1 *Uma loja vende um certo produto P de duas marcas distintas, A e B. A demanda do produto com a marca$A$ depende de seu preç e do preç da marca competitiva$B$. A demanda do produto com marca A é $D_A = 1.300 - 50x + 20y$ unidades/mês e do produto com marcar B é $D_B = 1.700 + 12x - 20y$ unidades/mês, onde x é o preço do produto A e y é o preço do produto B. Escrever uma função que expresse a receita total mensal da loja, obtida com a venda do produto P.*

Exercício 3.2 *Descreva o domínio de f e calcule os valores das função no pontos indicados. (Represente o domínio de f no planoxy)*

a) $f(x, y) = (x-1)^2 + 2xy^3$, *em* $f(2, -1)$, $f(1, 2)$ *e* $f(1, 0)$

b) $f(x, y) = \frac{x+y}{x-y}$, *em* $f(1, 0)$, $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{3})$, $f(\frac{1}{a}, b)$*e* $f(\frac{a}{b}, 1)$

c) $f(x, y) = \frac{1}{x^2+y^2}$, *em* $f(-1, -1)$, $f(1, 1)$, $f(0, 1)$*e* $f(-1, 0)$

d) $f(x, y) = \sqrt{x^2 - y^2}$, *em* $f(5, 4)$, $f(2, -1)$, $f(1, 1)$*e* $f(-1, -1)$

e) $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, *em* $f(0, 0)$, $f(1, 1)$ *e* $f(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

f) $f(x, y) = xe^y + \ln x$, *em* $f(1, 0)$ *e* $f(e^2, \ln 2)$

g) $f(x, y) = \frac{1}{x-y} + \sqrt[3]{x-y}$, *em* $f(9, 1)$*e* $f(0, -1)$

Exercício 3.3 *Dada a função*$f(x, y) = \sqrt{9 - y - x^2}$.

a) *Determine o seu domínio e represente-o no planoxy*

b) *Representa suas curvas de nível* $c_1 = 3$, $c_2 = \sqrt{5}$ *e* $c_3 = 2$ *(planoxy).*

Exercício 3.4 *Contando com x operários especializados e y não especializados, um fabricante produz $Q(x, y) = 10x^2y$ unidades de determinado produto por dia. Atualmente, há 20 operários especializados e 40 não especializados executando este serviço.*

a) *Quantas unidades estão sendo produzidas atualmente, por dia?*

b) *Qual será a variação do nível diário de produção, ao se acrescentar mais um operário especializado à força de trabalho atual?*

c) *Qual será a variação do nível diário de produção, ao se acrescentar mais um operário não especializado à força de trabalho atual?*

d) *Qual será a variação do nível diário de produção ao se acrescentar mais um operário qualificado e mais um operário não qualificado à força de trabalho atual?*

Exercício 3.5 *Admita que em certa fábrica, a produção seja dada pela função de* ***Cobb – Douglas*** $Q(K,L) = 120K^{\frac{2}{3}}L^{\frac{1}{3}}$ *unidades onde K representa o capital investido (em unidades de R\$ 1.000,00) e L é a força de trabalho (em operários/hora).*

a) *Calcule a produção, se o capital investido for de R\$ 125.000,00 e a força de Trabalho totalizar 1331 operários/hora.*

b) *O que acontecerá à produção calculada no ítem (a) caso se reduzam à metade o capital investido e a força de trabalho?*

3.2 Derivadas Parciais

3.2.1 Exercícios

Exercício 3.6 *Calcule as derivadas parciais* f_x *e*f_y *da funções:*

a) $f(x,y) = x^3 + 5y^7 + 4xy^2$

b) $f(x,y) = \sqrt[5]{x^2y^7}$

c) $f(x,y) = x^2 + xy^{\frac{1}{2}} + x^{\frac{1}{3}}y^2$

d) $f(x,y) = \sqrt[\frac{1}{3}]{x^3y^2}$

Exercício 3.7 *Calcule as derivadas parciais* f_x *e*f_y *nos pontos indicados:*

a) $f(x,y) = 7x - y^2$ *em* $(0,1)$

b) $f(x,y) = x^2 + 2x^3y^7$ *em* $(1,1)$

c) $f(x,y) = 1 - 3xy$ *em* $(1,2)$

d) $f(x,y) = 7xy^2 - 7x^2y^3$ *em* $(1,0)$

Exercício 3.8 *Calcule todas as derivadas de primeira ordem das funções dadas:*

a) $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

b) $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 + \frac{2y}{3x}$

c) $f(x,y) = (3x + 2y)^5$

d) $f(x,y) = (x + xy + y)^3$

e) $f(x,y) = xe^{xy}$

f) $z = \ln(x^2 + y^2)$

g) $f(x,y) = \frac{x+y}{x^2+y^2}$

h) $z = x \ln y$

i) $f(x,y) = x \ln xy$

j) $f(x,y) = \frac{xy+1}{xy^2}$

Exercício 3.9 *Mostre que, se* $z = \ln \sqrt{x^2 + y^2}$ *então* $x.\frac{\partial z}{\partial y} + y.\frac{\partial z}{\partial y} = 1..$

Exercício 3.10 *Se* $z = \frac{x^3 - y^3}{xy}$, *mostre que* $x.\frac{\partial z}{\partial x} + y.\frac{\partial z}{\partial y} = z.$

Exercício 3.11 *Calcular* f_{xx}, f_{xy} *e* f_{yy} *para as funções:*

a) $f(x,y) = x^3y^2 + x^5 + y^7$

b) $f(x,y) = ax^2 + by^2 + cxy$

c) $f(x,y) = 5x^2 + 3y^2 + 7xy$

d) $f(x,y) = x^2.e^{7y}$

e) $f(x,y) = \ln(x + 2y)$

Exercício 3.12 *Se* $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$, *mostre que* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Exercício 3.13 *Se* $z = f(x,y) = xy + xe^{\frac{1}{y}}$, *mostre que* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$

Exercício 3.14 *Calcule todas as derivadas parciais da segunda ordem das funções:*

a) $f(x,y) = 5x^4y^3 + 2xy$

b) $f(x,y) = e^{x^2y}$

c) $f(x,y) = x^2ye^x$

Exercício 3.15 *Determinar a relação que deve existir entre A e B para que a função* $z = e^{ax+by}$ *satisfaça a equação* $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 9.\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$

3.3 Análise Marginal

Consideremos uma fábrica que produz dois artigos **I** e **II**, sendo que o custo de produção de x unidades de **I** e y unidades de II é $C = Q(x, y)$, uma função de (x, y). Se queremos saber, a partir de uma determinada produção (x_0, y_0), de quanto varia o custo se aumentaremos de uma unidade a produção **I**, mantendo constante a produção de **II**, então calculamos $Q_x(x_0, y_0)$. Analogamente, calculamos $Q_y(x_0, y_0)$: que é o aumento aproximado no custo por unidade de **II** produzidas a mais, a partir de (x_0, y_0), mantendo a produção de **I** constante.

Exemplo 3.1 *Uma fábrica produz mensalmente x unidades de um produto **I** e y unidades de um produto **II**, sendo o custo mensal de produção conjunta dada por: $C = Q(x, y) = 20.000 + \sqrt{x^2 + 4y^2}$ (Q em reais). Num certo mês foram produzidas 3.000 unidades de **I** e 2.000 unidades de **II**.*

a) *Calcule o custo de produção, neste mês.*

b) *Calcule $\dfrac{\partial Q}{\partial x}$ e$\frac{\partial Q}{\partial y}$ neste mês.*

c) *Q que é mais conveniente, a partir desta situação: aumentar a produção de **I** mantendo constante a de **II**, ou aumentar a de **II**, mantendo a de **I** constante? Justifique sua resposta com base nos resultados de (b).*

Solução 3.1 $C = Q(x, y) = 20.000 + \sqrt{x^2 + 4y^2}$

a) $Q(3.000, 2.000) = 20.000 + \sqrt{(3.000)^2 + 4(2.000)^2}$

$$\begin{array}{l} (3.000)^2 = (3.10^3)^2 = 9.10^6 = 20.000 + \sqrt{9.10^6 + 4.4.10^6} = 20.000 + \sqrt{9.10^6 + 16.10^6} \\ (2.000)^2 = (2.10^3)^2 = 4.10^6 = 20.000 + \sqrt{25.10^6} + 20.000 + \sqrt{25}.\sqrt{10^6} \\ = 20.000 + 5.10^3 = 20.000 + 5.000 = 25.000 \end{array}$$

Logo, $Q(3.000, 2.000)$=*R$25.000,00.*

b) $\frac{\partial Q}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}-1}.2x = (x^2 + 4y^2)^{-\frac{1}{2}}.x = \frac{x}{\sqrt{x^2+4y^2}}$ *para* $x = 3.000$ *e* $y =$ 2.000, *temos:*

$$\begin{array}{l} \frac{\partial Q}{\partial x}(3.000, 2.000) = \frac{3.000}{\sqrt{9.10^6-16.10^6}} = \frac{3.000}{5.000} = \frac{3}{5} = 0,60 \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + 4y^2)^{\frac{1}{2}-1}.8y = (x^2 + 4y^2)^{\frac{-1}{2}}4y = \frac{4y}{\sqrt{x^2+4y^2}} \\ \frac{\partial Q}{\partial y}(3.000, 2.000) = \frac{4.2000}{\sqrt{9.10^6+16.10^6}} = \frac{8.000}{5.000} = \frac{8}{5} = 1,60 \end{array}$$

c) *Observando o ítem (b), é mais conveniente aumentar a produção de **I** mantendo fixa a produção de **II**, pois, neste caso o aumento aproximando no custo por unidade de **I** será de R$ 0,60, enquanto que em **II** será de R$ 1,60.*

Exercício 3.16 *Numa empresa comercial, o lucro diário L é uma função do número de vendedores, x, e do capital investido em mercadoria, y, (y em milhares de reais). Num certo tempo tem-se:* $L(x, y) = 400 - (12 - x)^2 - (40 - y)^2$ *(em milhares de reais).*

a) *Calcule o lucro diário se a empresa tem 7 vendedores e 30 mil reais investidos;*

b) *Calcule:* $\frac{\partial L}{\partial x}(7,30)$ *e* $\frac{\partial L}{\partial y}(7,30)$

c) *O que é mais lucrativo, a partir da situação do item (a):*

- Aumentar de uma unidade o número de vendedores, mantendo o capital investido;

- Ou, investir mais 1 mil reais, mantendo o mesmo número de vendedores? Justifique sua resposta com base no resultado (b).

Exercício 3.17 *Estima-se que a produção semanal de um certa fábrica seja dada pela função* $Q(x,y) = 1.200x + 5.000y + x^2y - x^3 - y^3$ *unidades, onde* x *é o número de operários qualificados e* y*, o número de operários não-qualificados. Atualmente, a fábrica tem 30 operários qualificados e 50 não-qualificados. Use a análise marginal para estimar a variação na produção semanal, resultante da adição de 1 operário qualificado, sendo mantido o mesmo número de operário não-qualificados. Calcule a variação exata da produção, subtraindo valores apropriados de* Q*. A aproximação é boa?*

Exercício 3.18 *A produção diária numa certa fábrica é de* $Q(K,L) = 60K^{\frac{1}{2}}L^{\frac{1}{3}}$ *unidades, onde* K *representa o capital investido, medido em R\$ 1.000,00, e* L *é o número de operários-hora. Suponha que o capital investido atualmente seja de R\$ 900.000,00 e que se empreguem 1.000 operários-hora. Utilizando a análise marginal, avalie o efeito que um acréscimo de R\$ 1.000,00 provocará na produção diária, admitindo que o número de operário permaneça constante.*

3.3.1 Regra da Cadeia

Seja z uma função de x, y e x, y sejam funções de t. Então, z pode ser representado como função de t, ou seja $\dfrac{dz}{dt} = \dfrac{\partial z}{\partial x}.\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{\partial z}{\partial y}.\dfrac{dy}{dt}$ $\rightarrow$ Regra da cadeia para função de duas variáveis.

$\frac{dz}{dt}$ = taxa de variação em z a medida que t varia.
$\frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt}$ = taxa de variação de z em relação a t, sendo y fixo.
$\frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$ = taxa de variação de z em relação a t, sendo x fixo.

A regra da cadeira para derivadas parciais mostra que a taxa de variação total de z em relação a t é a soma dessas duas taxas de variação "parciais".

Exemplo 3.2 *Calcule* $\frac{dz}{dt}$*, sendo* $z = x^2 + 3xy + 1$*, onde* $x = 2t + 1$ *e* $y = t^2$*.*

Solução 3.2 *Pela regra da cadeia,* $\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}.\frac{dy}{dt}$

Calculando: $\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y$ *e* $\frac{\partial z}{\partial y} = 3x$
$\frac{dx}{dt} = 2$ *e* $\frac{dy}{dt} = 2t$
Logo, $\frac{dz}{dt} = (2x+3y).2 + 3x(2t)$*, substituindo* x *e* y*, vem:*
$\frac{dz}{dt} = [2(2t+1) + 3(t^2)].2 + 3(2t+1).2t$
$\frac{dz}{dt} = [4t + 2 + 3t^2].2 + (6t+3).2t$
$\frac{dz}{dt} = 8t + 4 + 6t^2 + 12t^2 + 6t \Rightarrow \frac{dz}{dt}18t^2 + 14 + 4$

Observação 3.1 *Podemos calcular* $\frac{dz}{dt}$, *substituindo diretamente os valores de* x *e* y *em* z, *vejamos:* $z = x^2+3xy+1 \Rightarrow z = (2t+1)^2+3(2t+1).t^2+1 \Rightarrow z = 4t^2+4t+1+6t^3+3t^2+1 \Rightarrow z = 6t^3 + 7t^2 + 4t + 2$ *assim,* $\frac{dz}{dt} = 18t^2 + 14t + 4$

Exemplo 3.3 *Se* $f(x, y) = x^3y-y^4$, $x = \frac{1}{t} ey = \ln t$ *obtenha* $\frac{dF}{dt}$ *sendo* $F(t) = (x(t), y(t))$.

Solução 3.3 $\frac{dF}{dt} = \left(\frac{-3\ln t}{t^4} + \frac{1}{t^4} - \frac{4(\ln t)^3}{}\right)$.

Exemplo 3.4 *Se* $w = xy + yz$, *onde* $x = \frac{e^t}{t}, y = \frac{e^{-t}}{t}$ *e* $z = t^2$. *Calcule* $\frac{dw}{dt}$

Solução 3.4 $\frac{dw}{dt} = e^{-t}(1 - t) - \frac{2}{t^3}$

Observação 3.2 *A regra da cadeia para função de três variáveis: Se* $w = f(x, y, z)$, *então*

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial w}{\partial x}.\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}.\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}.\frac{dz}{dt}$$

Exemplo 3.5 *Um supermercado vende duas marcas diferente de certo produto, uma vinda do do Norte do pais e, outra, do Sul. As venda indicam que, se...*