UNIVERSIDADE FEDERAL DA PARAÍBA
CCEN - Departamento de Matemática
http://www.mat.ufpb.br/sergio

4ª Prova — Matemática Básica I (Pré-prova)

Prof.: *Sérgio* Data: *01/Mai/2002* Turno: *M+N*
Curso: Nome:

Período: *01.2* Turma(s): Matrícula:

1 Algumas Aplicações das Derivadas na Administração e na Economia

1.1 CUSTO, CUSTO MÉDIO E CUSTO MARGINAL

Admitindo-se que o *custo total* y para se produzir e negociar x unidades de um artigo é uma função somente de x, então a função de custo total pode ser representada por $y_c = c(x)$.

São usadas funções de vários tipos para representar curvas de custo total. Em geral, as curvas de custo tem as seguintes propriedades:

1. Quando nenhuma unidade é produzida, o custo total é igual a zero ou positivo, isto é, $c(0) \geq 0$. Se $c(0) > 0$, então $c(0)$ é o montante das despesas gerais ou dos custos fixos de produção.

2. O custo total aumenta quando x aumenta e, portanto, $c'(x)$ é sempre positivo.

3. O custo de produção de uma quantidade muito grande de qualquer artigo usualmente atinge um ponto no qual este aumenta a uma taxa crescente. Portanto, a curva de custo total é, normalmente, côncava para cima, isto é, $c''(x) > 0$. Entretanto, dentro de uma faixa limitada, a curva de custo total é, com freqüência, côncava para baixo, correspondo ao custo marginal decrescente.

Se a função de custo total é $c(x)$ então, o *custo médio* ou *por unidade* é $\boxed{cm(x) = \overline{y}_c = \dfrac{y_c}{x} = \dfrac{c(x)}{x}}$ e o *custo marginal* é $c'(x)$.

A primeira derivada do custo médio (o *custo médio marginal*) é $cm'(x) = \dfrac{xc'(x) - c(x)}{x^2}$

$$\text{Se } \boxed{cm'(x_0) = 0} \Leftrightarrow x_0c'(x_0) - c(x_0) = 0, \text{ isto é, } c(x_0) = x_0c'(x_0) \Rightarrow$$
$$\boxed{\frac{c(x_0)}{x_0} = c'(x_0) = cm(x_0)}$$

Portanto, o custo médio é mínimo para um valor de x_0, tal que o custo médio se iguale ao custo marginal; isto é, as curvas do custo médio e do custo marginal se interceptam no ponto de custo médio mínimo. Observe que se x_0 existir, supõe-se que seu valor seja mínimo para o qual $cm'(x_0) = 0$, devido à terceira propriedade das curvas de custo mencionadas acima.

Para uma determinada curva de custo total, a existência deste mínimo pode ser testada da maneira usual.

1.2 ELASTICIDADE

A *elasticidade pontual* da função $y = f(x)$ no ponto x é a taxa de variação proporcional em y por unidade de variação em x:

$$\boxed{\eta = \frac{Ey}{Ex} = \frac{\frac{dy}{y}}{\frac{dx}{x}} = \frac{x}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \cdot f'(x)}$$

Observe que a elasticidade η de uma função é independente das unidades com as quais as variáveis são medidas. Isto resulta da definição de elasticidade, em termos de variações proporcionais, que são necessariamente independentes das unidades de medida.

A elasticidade pontual da demanda, oferta, custo, produtividade e outras funções é um importante conceito na teoria econômica.

1.3 RECEITA, RECEITA MARGINAL E ELASTICIDADE DE DEMANDA

Para qualquer função demanda dada $y = f(x)$ onde y é o preço por unidade e x é o número de unidades; a *receita total* R é o produto de x por y, isto é, $\boxed{R = x.y = x.f(x)}$

A *receita marginal* em relação à demanda é a derivada da receita total em relação a x, ou seja, $R'(x)$ e é, portanto, a taxa de variação na receita em relação à variação na demanda.

Observe que a *receita média*, ou a *receita por unidade*, representa também o preço por unidade y - isto é, a curva de receita média e a curva de demanda são idênticas.

Uma vez que x e y são sempre não negativos no contexto de nossa estrutura analítica previamente estabelecida, R também é sempre não negativa. Contudo, $R'(x)$ pode ser positivo ou negativo - isto é, embora a receita total seja sempre não negativa, ela pode aumentar ou diminuir, à medida que a demanda aumenta.

Note também que existe uma relação entre a receita marginal e a elasticidade de demanda, dada por:

$$\boxed{R'(x) = x \cdot f'(x) + y = y\left(\frac{x}{y} \cdot f'(x) + 1\right) = y\left(1 + \frac{Ey}{Ex}\right) = y\,(1 + \eta)}$$

1.4 EXERCÍCIO

1ª Questão Derive as seguintes funções e encontre os pontos críticos:

a) $a(x) = x^3 - 9x^2 - 2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{0,6\}}$

b) $b(x) = 3x^4 + 4x^3 - 12x^2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{-2,0,1\}}$

c) $c(x) = (2x^2 - 3x)(x^3 - 2x^2)$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{0,1,\frac{9}{5}\}}$

d) $d(x) = \dfrac{x^2 - x}{x^2 + 1}$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{-1 \pm \sqrt{2}\}}$

e) $f(x) = \left[ln\left(x^2 - 4x + 4\right)\right]^2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{1,2,3\}}$

f) $g(x) = x.e^{-x-199}$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{1\}}$

g) $h(x) = \ln\left[e^{(2x^2-4)^3}\right]$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{-\sqrt{2},0,\sqrt{2}\}}$

2ª Questão Em cada função abaixo, determine os intervalos onde a função é crescente[1] (decrescente) e onde a função tem concavidade positiva[2] (negativa). Esboce o gráfico.

a) $h(x) = 2x^2 - 4x - 6$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{1\} \quad \textit{Cres: } (1,\infty) \quad \textit{C.Posit: } \Re}$

b) $l(x) = x^3 - 6x^2 + 2$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{0,4\} \quad \textit{Cres: } (-\infty,0)\cup(4,\infty) \quad \textit{C.Posit: } (2,\infty)}$

c) $m(x) = x^4 - 4x^3$ $\boxed{\textit{R: P.C.}=\{0,3\} \quad \textit{Cres: } (3,\infty) \quad \textit{C.Posit: } (-\infty,0)\cup(2,\infty)}$

3ª Questão Para cada uma das seguintes funções de custo total, ache o custo médio ($cm(x) = \overline{y}$), custo marginal, custo médio marginal, o mínimo custo médio e mostre que neste mínimo, o custo marginal e o custo médio são iguais (ver **??**).

a) $y = x^2 + 200x + 10000$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = 100 \quad \overline{y}_{min} = 400}$

b) $y = 25x - 8x^2 + x^3$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = 4 \quad \overline{y}_{min} = 9}$

c) $y = 2x^2 + 5x + 18$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = 3 \quad \overline{y}_{min} = 17}$

d) $y = 20x + 2x^3 + 4x^5$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = 0 \quad \overline{y}_{min} = 20}$

e) $y = 2x + x^2lnx$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = \frac{1}{e} \quad \overline{y}_{min} = 2 - \frac{1}{e} \approx 1.6321}$

f) $y = 2xe^{-x} + xe^x$ $\boxed{\textit{R: } x_{min} = \frac{1}{2}\ln 2 \quad \overline{y}_{min} = 2\sqrt{2} \approx 2.8284}$

---

[1] Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ é crescente, basta resolver a inequação $f'(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada primeira.

[2] Para encontrar o(s) intervalo(s) onde $f(x)$ tem concavidade positiva, basta resolver a inequação $f''(x) > 0$, ou seja, fazer o teste da derivada segunda.

4ª Questão A função de receita total de uma fábrica de móveis coloniais é expressa pela equação $R(x) = 24x - 3x^2$

a) Qual é a receita máxima que esta companhia pode esperar obter, supondo que esta equação seja válida? $\boxed{\textit{R: } x_{max} = 4 \quad R_{max} = 48}$

b) Que equação representa a função de receita média e marginal?

c) Num único gráfico, trace as funções de receita total, média e marginal.

5ª Questão Para cada um dos seguintes pares de funções de demanda $(d_*(x))$ e de custo médio $(cm_*(x))$ ou custo total $(c_*(x))$, ache o lucro máximo, a receita máxima que se pode obter e verifique que a relação entre a receita marginal e a elasticidade de demanda é válida (ver **??**).

a) $d_1(x) = 18 - x$ e $c_1(x) = 2x + 14$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (8, 50) \quad R_{max} = (9, 81)}$

b) $d_2(x) = 24 - 7x$ e $cm_2(x) = 6 - x$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (\frac{3}{2}, \frac{27}{2}) \quad R_{max} = (\frac{12}{7}, \frac{144}{7})}$

c) $d_3(x) = 26 - 3x^2$ e $c_3(x) = 3x^2 + 2x + 14$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (\frac{4}{3}, \frac{50}{9}) \; R_{max} = (\frac{1}{3}\sqrt{26}, \frac{52}{9}\sqrt{26})}$

d) $d_4(x) = 12 - 4x$ e $c_4(x) = 8x - x^2$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (\frac{2}{3}, \frac{4}{3}) \quad R_{max} = (\frac{3}{2}, 9)}$

e) $d_5(x) = 12 - 5x$ e $cm_5(x) = 4x + 6$ $\boxed{\textit{R: } L_{max} = (\frac{1}{3}, 1) \quad R_{max} = (\frac{6}{5}, \frac{36}{5})}$

6ª Questão Esboce o gráfico das funções abaixo, utilizando os testes da primeira e segunda derivada:

a) $n(x) = x^2 - 2x - 3$

b) $p(x) = x^3 - x - 1$

c) $q(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

Datas das provas

Prova	Data	Turma	Turno	Hora - Local
4	07/Mai terça	02 e 06	Manhã e Noite	sala CCSA 204
4	08/Mai quarta	05	Noite	sala CCSA 201
Final	**14/Maio terça**	02, 05 e 06	Noite	19:00 - sala CCSA 204

Boa Sorte